

## TOPOLOGY OF 3-DIMENSIONAL MANIFOLDS

EAMAN EFTEKHARY 

**ABSTRACT.** This is the second paper from a trio which reviews some of the progress in low dimensional topology in the past century. Starting with the work of Poincaré in the last years of 19th century and first few years of 20th century, we review the major steps in putting 3-manifolds and their algebraic topology in a solid mathematical framework, and the important theorems which strengthened the understanding of 3-manifolds, including the prime decomposition theorem and JSJ decomposition of 3-manifolds. Highlighting the significance of hyperbolic 3-manifolds, proving the monster theorem and formulating the geometrization conjecture by Thurston has been a turning point in 3-manifold topology. The proof of geometrization conjecture by Perelman, using Ricci flow of Hamilton, affirmed that the fundamental group is an almost perfect invariant of closed 3-manifolds. Yet, it is not clear how geometric properties are reflected in the fundamental group, and it is difficult to verify whether two group presentations give isomorphic fundamental groups or not. Alternative approaches to the study of 3-manifolds and 4-dimensional cobordisms between them using abelian groups include, in particular, the theories which are formulated as topological quantum field theories (TQFTs). These approaches are also reviewed in the paper. In particular, a theorem of the author which addresses the strength of the later invariants in distinguishing 3-manifolds from the standard 3-sphere is discussed.

### 1. Introduction

The current paper focuses on the development of 3-manifold topology, which was basically initiated by celebrated papers of Poincaré in the last few years of 19th century [39, 40, 41, 42, 43, 44]. The manifolds studied by Poincaré were all smooth closed submanifold of the Euclidean space. The formulation of

---

Keywords: 3-manifolds, Poincaré conjecture, geometrization, Ricci flow, gauge theory.

Communicated by Mohamad Reza Pouryayevali.

Article Type: Research Paper.

Received: 31-01-2024, Accepted: 29-02-2024, Published Online: 02-06-2024.

**Cite this article:** E. Eftekhary, Topology of 3-dimensional manifolds, *Journal of Mathematics and Society*, **9** no. 3 (2024) 1–33.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140596.1640> .



manifolds as abstract topological spaces lasted for another couple of decades. In fact, agreement on the “correct” definition of a manifold did not happen until after Whitney proved his embedding theorems [53]. The work of Poincaré initiated what is called “algebraic topology” today. Nevertheless, the construction of a rigorous language and the solid infrastructure for algebraic topology needed more time and happened in the first half of 20th century.

Poincaré conjecture motivated some of the most important developments of low dimensional topology in 20th century. The other critical development in 20th century was the study of hyperbolic 3-manifolds and the formulation of the “geometrization conjecture” by Thurston. The proof of the latter conjecture by Perelman in the beginning of 21st century [36, 38, 37] gave a very useful and effective understanding of closed 3-manifolds. We review the major steps in the aforementioned development. Moreover, a section is devoted to the progress in low dimensional topology which resulted from the introduction of gauge theory and topological quantum fields theories. In particular, one of the results of the author, which links the gauge theoretic invariants to the geometrization of 3-manifolds is discussed in the last section of the paper.

## 2. Main Results

The study of smooth manifolds by means belonging to “algebraic topology” was initiated by Poincaré, who published a series of 6 papers between 1899 and 1904, under the title “analysis situs”. He introduced the homology groups and the fundamental groups as tools for distinguishing manifolds from one another, and formulated what we know as Poincaré duality. The formulation of the following conjecture was perhaps the most motivating part of his papers:

**Conjecture 2.1.** *Suppose that  $M$  is a closed, connected and oriented 3-manifold with trivial fundamental group. Then there is a homeomorphism from  $M$  to  $S^3$ .*

In 1911 and 1912, Herman Weyl suggested a definition of an abstract manifold, while the equivalence of his definition and the definition used by Poincaré was not proved until the middle of 20th century. Two theorems are crucial for this equivalence. One of them is due to Moise [25] (proved in 1952) and the other one is due to Whitney (proved in 1936) [53].

**Theorem 2.2** (Whitney embedding). *For every positive integer  $m$  and every smooth Hausdorff  $m$ -manifold  $M$  which is of second category, there is an embedding of  $M$  in the Euclidean space  $\mathbb{R}^{2m+1}$ . Moreover, every continuous map  $f : M \rightarrow N$  from a smooth  $m$ -dimensional manifold  $M$  to a smooth  $n$ -dimensional manifold  $N$  may be approximated by arbitrarily close smooth embeddings if  $n > 2m$ .*

**Theorem 2.3** (Moise). *Let  $M$  be a topological 3-manifold. Then  $M$  admits a maximal smooth atlas, giving a smooth structure on  $M$ . Moreover, every two such maximal smooth atlases are equivalent.*



A number of historic errors in the proof of some intuitively clear statements persuaded mathematicians that a rigorous language is needed for working with manifolds. Dehn lemma is a good example. It was first stated and proved (with a gap) by Dehn in 1910 [1]. The gap was noticed by Kneser in 1929 [18], and a complete proof was not given until 1957, when Papakyriakopoulos (Papa) proved the following stronger version [34, 35]:

**Theorem 2.4** (loop theorem). *Suppose that  $M$  is a compact 3-manifold with boundary and that  $\gamma : S^1 \rightarrow M$  be a loop which is embedded on its boundary which represents a non-trivial element of  $\pi_1(\partial M)$ , while its image in  $\pi_1(M)$  is trivial. Then, there is a proper embedding*

$$f : (\mathbb{D}, \partial\mathbb{D}) \rightarrow (M, \partial M)$$

from the standard 2-disk  $\mathbb{D}$  to  $M$ , such that the image of  $\partial\mathbb{D}$  in  $\pi_1(\partial M)$  is non-trivial.

The proof of Papa also implied the “sphere theorem”. Kneser took the first step in this direction by proving the following theorem in 1929 [18]:

**Theorem 2.5** (Kneser). *Let  $M$  be a closed 3-manifold. Then, there is a finite sequence*

$$M = M_1, \dots, M_n = M'$$

of closed (possibly not connected) 3-manifolds such that  $M_{i+1}$  is obtained from  $M_i$  by reducing along a 2-sphere, while every connected component of  $M'$  is irreducible.

The proof of Kneser theorem also implies the “prime decomposition theorem” for closed 3-manifolds:

**Theorem 2.6** (prime decomposition theorem for 3-manifolds). *Let  $M$  be a closed oriented 3-manifold which is not homeomorphic to  $S^3$ . Then, there are non-trivial prime 3-manifolds  $M_1, \dots, M_n$  such that  $M$  is homeomorphic to  $M_1 \# \dots \# M_n$ . Moreover, if  $M \simeq M'_1 \# \dots \# M'_m$  is another prime decomposition of  $M$ , then  $m = n$  and there is a permutation  $\sigma \in S_n$  such that  $M_i \simeq M'_{\sigma(i)}$ .*

Moreover, a conjecture of Kneser was eventually proved by Stallings in 1959 [49, 50]:

**Theorem 2.7** (prime decomposition theorem for 3-manifolds). *Let  $M$  be a closed connected oriented 3-manifold and assume that*

$$\pi_1(M) = G_1 \star G_2 \star \dots \star G_n$$

where  $G_1, \dots, G_n$  are non-trivial groups. Then there are closed 3-manifolds  $M_1, \dots, M_n$  such that  $\pi_1(M_i)$  is isomorphic to  $G_i$  and  $M \simeq M_1 \# \dots \# M_n$ .

Moreover, the importance of Seifert fibered 3-manifolds, which were introduced by Seifert in his PhD thesis, was noticed by several mathematicians. In particular, the following theorem was independently proved by Jaco-Shalen [15] and Johanson [17]:

**Theorem 2.8** (JSJ decomposition). *Let  $M$  be a closed irreducible 3-manifold. Then there is a minimal set of incompressible tori in  $M$  such that every connected component of their complement is either atoroidal or Seifert fibered. Moreover, this minimal set of incompressible tori is unique up to isotopy.*

A turning point in 3-manifold topology was the work of Thurston which highlighted the importance of hyperbolic manifolds. The following theorem of Mostow implies that hyperbolic structure in dimension 3, if it exists, is determined by the topology:

**Theorem 2.9** (Mostow rigidity). *Let  $(M_1, g_1)$  and  $(M_2, g_2)$  be two complete hyperbolic  $n$ -manifolds, with  $n > 2$ , and  $\iota : \pi_1(M_1) \rightarrow \pi_1(M_2)$  be an isomorphism. Then there is an isometry  $f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$  such that  $f_* : \pi_1(M_1) \rightarrow \pi_1(M_2)$  gives the isomorphism  $\iota$ .*

Despite the initial misconception that hyperbolic manifolds are “rare”, Thurston gave significant evidence that they are quite “common” [51]:

**Theorem 2.10** (Thurston hyperbolic surgery). *Let  $M$  be a hyperbolic manifold with toroidal boundary and finite volume. Then only finitely many Dehn fillings of  $M$  are non-hyperbolic.*

More importantly, Thurston proved the following theorem in 1982:

**Theorem 2.11** (Thurston monster theorem). *Let  $M$  be a compact irreducible atoroidal Haken 3-manifold such that  $\chi(\partial M) = 0$ . Then the interior of  $M$  may be equipped with a complete hyperbolic metric, so that the volume of  $M$  with respect to this volume form is finite.*

Thurston also formulated his “geometrization conjecture” which provides a very effective understanding of 3-manifolds. His conjecture, which implies the Poincaré conjecture as a very special case, remained open for more than 20 more years, until Perelman provided the first proof [36, 38, 37]:

**Theorem 2.12** (Thurston geometrization conjecture-Perelman theorem). *Let  $M$  be an irreducible closed 3-manifold and  $M_1, \dots, M_n$  be the components of its JSJ decomposition. Then every  $M_i$  is either Seifert fibered or hyperbolic (with finite volume).*

As a corollary of the above theorem, the following may be proved:

**Theorem 2.13.** *Let  $M_1$  and  $M_2$  be closed irreducible 3-manifolds such that  $\pi_1(M_1)$  and  $\pi_1(M_2)$  are isomorphic. Then either  $M_1$  and  $M_2$  are homeomorphic, or they are both lens spaces.*

### 3. Conclusions

As the progress of 3-manifold topology indicates, and in particular Theorem 2.13 and Theorem 2.7 imply, the fundamental group of a 3-manifold is a very strong invariant which distinguishes many three-manifolds from each other. Nevertheless, it is usually a very hard problem to decide whether two presentations give isomorphic groups or not. Moreover, it is not clear how different geometric and

topological properties are reflected in the fundamental group. Therefore, the resolution of geometrization conjecture did not close the study of low dimensional manifolds. Gauge theory has probably been the source of the most powerful alternative approach. It was initiated by the work of Floer [7, 8, 11, 10, 9, 12], which paved the way for the introduction of topological quantum field theories (TQFTs), and the introduction of instanton Floer theory and Seiberg-Witten theory. Ozsváth and Szabó introduced a similar theory in 2001 [32, 31, 33]. Kutluhan, Lee and Taubes proved that instanton Floer homology and Ozsváth-Szabó Floer homology (also called Heegaard-Floer homology) are equivalent [20, 21, 22, 23, 24].

We may thus turn our attention to Ozsváth-Szabó invariants. The theory associates the groups  $\widehat{HF}(M)$ ,  $HF^+(M)$ ,  $HF^-(M)$ ,  $HF^\infty(M)$  to a 3-manifold  $M$  and the maps

$$\Phi_W^\bullet : HF^\bullet(M_1) \rightarrow HF^\bullet(M_2), \quad \forall \bullet \in \{+, -, \infty, \wedge\}$$

for every cobordism  $W$  from  $M_1$  to  $M_2$ . The groups and the maps respect the corresponding decompositions according to  $Spin^c$  structures. They reflect many interesting properties, and several applications of these invariants are mentioned in the last section of the paper.

The hat theory (i.e. the groups  $\widehat{HF}(M)$ ) are the most convenient versions of the theory. It is an abelian group which may be computed combinatorially (i.e. using a computer). Yet, it is conjectured that it is relatively powerful in distinguishing 3-manifolds from  $S^3$ :

**Conjecture 3.1** (Ozsváth-Szabó). *Let  $M$  be a prime closed 3-manifold and assume that  $\widehat{HF}(M) = \widehat{HF}(S^3) = \mathbb{Z}$ . Then  $M$  is homeomorphic to either  $S^3$  or the Poincaré homology sphere  $P$ .*

The best result in the direction of Conjecture 3.1 is the following theorem of author [6], which is proved based on [5] and [4]:

**Theorem 3.2.** *Let  $M$  be a prime closed 3-manifold and assume that  $\widehat{HF}(M) = \widehat{HF}(S^3) = \mathbb{Z}$ . Then  $M$  is homeomorphic to either  $S^3$  or the Poincaré homology sphere  $P$ , or  $M$  is hyperbolic.*

**Eaman Eftekhary**

School of Mathematics, Institute for Research in Fundamental Sciences (IPM), P.O.Box 19395-5746, Tehran, Iran

Email: eamanipm.ir

## توپولوژی خمینه‌های ۳-بعدي

ایمان افتخاری<sup>ID</sup>

چکیده. این دومین مقاله از یک سه‌گانه است که به مرور تحولات مهم توپولوژی ابعاد پایین در قرن گذشته می‌پردازد. با شروع از کارهای پوانکاره در سالهای پایانی قرن نوزدهم و سالهای آغازین قرن بیستم، قدم‌های اصلی که برای قرار دان خمینه‌های سه‌بعدي و توپولوژی جبری مرتبط با آنها در یک چارچوب ریاضی استوار برداشته شد، و قضایای مهمی که فهم این خمینه‌ها را قوام بخشید را مرور خواهیم کرد. این مرور، با قضایای تجزیه اول خمینه‌های ۳ بعدی و قضیه تجزیه JSJ آغاز می‌شود. برجسته کردن اهمیت خمینه‌های ۳ بعدی هذلولوی، اثبات قضیه هیولا، و صورت‌بندی حدس هندسی‌سازی توسط ترستن نقطه عطف مهمی در مطالعه خمینه‌های ۳ بعدی بوده است. اثبات حدس پوانکاره توسط پرلمان، با استفاده از شار ریچی هامیلتون، این نکته را تأیید کرد که گروه بنیادی خمینه‌های ۳ بعدی، ناوردایی تقریباً کامل برای این خمینه‌ها است. با این وجود، مشخص نیست که بسیاری از خصوصیات هندسی خمینه‌های ۳ بعدی چگونه در گروه بنیادی منعکس می‌شود، و تشخیص این که دو نمایش گروه‌های بنیادی، گروه‌هایی یک‌ریخت را مشخص می‌کنند یا خیر هم، معمولاً بسیار دشوار است. راه‌های موازی برای مطالعه خمینه‌های ۳ بعدی و هم‌بستگی‌های ۴ بعدی بین آنها با استفاده از ناوردهای آبلی؛ که کار کردن با آنها ساده‌تر است؛ به ویژه شامل نظریه‌هایی است که در قالب نظریه‌های توپولوژیک میدان کوانتومی صورت‌بندی شده‌اند. چنین نظریه‌هایی هم در این مقاله مورد اشاره قرار می‌گیرند. به ویژه، قضیه‌ای از نویسنده که به توانایی ناوردهای اخیر در تشخیص کره<sup>۳</sup> بعدی از سایر خمینه‌ها می‌پردازد، مطالعه خواهد شد.

### ۱. مقدمه

این مقاله، دومین مقاله از سه‌گانه‌ای (شامل این مقاله و [۳] و [۲]) است که به برخی از پیشرفت‌های توپولوژی ابعاد پایین در صده گذشته می‌پردازد. در مقاله قبل به مطالعاتی اشاره شد که با تمرکز بر خود‌گره صورت گرفته است. یک رهیافت دیگر، بررسی مکمل یک گره به عنوان یک فضای توپولوژیک است. به وضوح، رده همانسانی این فضای توپولوژیک تنها به رده یک‌نهمش محیطی<sup>۱</sup> گره وابسته است. پس همه ناوردهای توپولوژیک مکمل یک گره، ناوردهایی برای رده یک‌نهمش محیطی گره هم خواهند بود. مکمل یک گره در فضای اقلیدسی یکی از نخستین نمونه‌های نابديهی از یک خمینه<sup>۳</sup>-بعدي هموار است. بررسی خمینه‌ها و به ویژه خمینه‌های ۳-بعدي به عنوان فضاهای توپولوژیک، اولین بار در مقالاتی که پوانکاره در اواخر قرن نوزدهم به نگارش در آورد پرداخته شد. خمینه‌هایی که در مقالات پوانکاره مطالعه شده بودند همگی هموار بودند. همه آنها به زبان امروزی در واقع زیرخمینه‌هایی هموار از فضای اقلیدسی هستند. صورت‌بندی مفهوم خمینه به شکل مجرد تا سال‌ها

عبارات و کلمات کلیدی: خمینه‌های ۳-بعدي، حدس پوانکاره، هندسی‌سازی، شار ریچی، نظریه‌های پیمان‌های. دبیرتخصصی رابط: محمدرضا پوریایولی  
نوع مقاله: پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۱/۱۱ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۲/۱۰ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۳/۰۳/۱۳  
ارجاع به مقاله: ۱. افتخاری، توپولوژی خمینه‌های ۳-بعدي، نشریه ریاضی و جامعه، ۹ شماره ۳ (۱۴۰۳) ۱-۳۳.  
<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140596.1640>

<sup>1</sup>ambient isotopy

بعد به طول انجامید. شاید بتوان گفت که اتفاق نظر بر روی «تعریف درست» مفهوم خمینه تنها پس از قضایای نشان‌دهنده ویتنی حاصل شد، که نشان می‌داد تعریفی که امروزه آن را می‌شناسیم با تعریف‌های شهودی‌تر فاصله چندانی ندارد. به این ترتیب، فضاهای توپولوژیک و هندسی متنوعی برای مطالعه پیش روی ریاضیدان‌ها قرار گرفتند، و رفته‌رفته، اهمیت توجه به ساختارهایی که این خمینه‌ها به آن مجهز بودند، آشکار گردید. به ویژه، تفاوت ساختارهای توپولوژیک و هموار روشن‌تر شد. علاوه بر تثبیت مفهوم خمینه، بخش‌های مهم دیگری از طرح پوانکاره برای شکل دادن به حوزه جدیدی از ریاضیات، که امروزه آن را توپولوژی جبری می‌نامیم، نیاز به زبانی دقیق، زیرساختی استوار و بازنویسی‌هایی بر پایه چنین زیرساخت‌هایی داشت. تثبیت این زیرساخت و اثبات «درست و کامل» برخی از گزاره‌های اساسی و اولیه که از منظر شهودی کمابیش بدیهی تلقی می‌شدند، بخش مهمی از تلاش‌های ریاضیدان‌های بعد از پوانکاره در نیمه اول قرن بیستم را به خود اختصاص داد. در این راستا، هم قضایای مهمی به اثبات رسیدند و هم مثال‌های جالبی ساخته شدند که اشتباهات شهودی مهمی را برملا می‌کردند. حدس پوانکاره، که در آستانه قرن بیستم و در مقالات مهم او با عنوان «تحلیل مکان» طرح گردیده بود، رفته‌رفته به یکی از انگیزه‌های مهم و الهام‌بخش در مطالعه خمینه‌ها تبدیل گردید، و برخی از مهم‌ترین تحولات نیمه دوم قرن بیستم در توپولوژی بعد پایین به شکلی مستقیم با آن در ارتباط بودند. پیشرفت ریاضیدان‌ها در توپولوژی را می‌توان از منظرهای متفاوتی روایت کرد، و روایت ما از این تحولات را نمی‌توان روایتی جامع دانست. بی‌گمان برخی از کارهای تأثیرگذار روایت نشده‌اند، و تأکیدهای این نوشتار روی برخی دیگر از پژوهش‌ها و نتایج هم، تا حدودی تابع سلیقه نگارنده بوده است. داستان ما، حول محور حدس پوانکاره روایت می‌شود، با این نگاه که حدس پوانکاره نقش بی‌بدیلی در جهت‌دهی به پژوهش‌های ریاضیدان‌های قرن بیستم در زمینه توپولوژی خمینه‌ها داشته است.

نقطه عطف دیگری که مورد توجه ویژه قرار می‌گیرد، نگرش جدیدی است که کارهای ویلیام ترستن به جامعه ریاضی عرضه کرد. طرحی که ترستن برای مطالعه خمینه‌های ۳-بعدی ریخت، نحوه تفکر ریاضیدان‌های هم‌دوره و پس از او را به شدت تحت تأثیر قرار داد، به طوری که مخالفین جدی او هم، که معمولاً در برابر سهل‌انگاری ترستن در مکتوب کردن استدلال‌های ریاضی و عدم دقت او در چیدن گام‌های اثبات، موضعی بسیار سخت داشتند، در نهایت در ریاضیاتی زندگی کردند که به نوعی از آن ترستن بود! تا پیش از ترستن، خمینه‌های هذلولوی بسته تقریباً ناشناخته بودند، و تلقی عمومی بر این بود که چنین خمینه‌هایی، در صورت وجود، در اقلیت کامل قرار دارند و به نظر نمی‌رسید که در دسته‌بندی احتمالی خمینه‌های ۳-بعدی، نقش مهمی ایفا کنند. شاید مهم‌ترین خدمت ترستن به توپولوژی بعد پایین، تصحیح این تصور بود.

در ادامه این مقاله و در بخش‌های پایانی، در مورد تحولاتی که پس از ترستن روی داد سخن خواهیم گفت و به ویژه به برخی رویکردها که خمینه‌های ۳-بعدی را در ارتباط با هندسه هم‌لیگی<sup>۲</sup> های ۴-بعدی و با استفاده از ابزارهای نظریه‌های پیمانانه‌ای<sup>۳</sup> مطالعه می‌کنند، می‌پردازیم. این رویکردها نتایج درخشانی در سه دهه اخیر داشته‌اند. در روایت رویکردهای جدید، از جمله به یکی از قضایایی که توسط نویسنده به اثبات رسیده است هم اشاره خواهد شد.

## ۲. خمینه‌های توپولوژیک و هموار

در این مقاله بیشتر تمرکز ما بر خمینه‌های توپولوژیک ۳-بعدی خواهد بود و به ساختارهای غنی‌تری که می‌توان روی خمینه‌های ۳-بعدی قرار داد، کمتر خواهیم پرداخت. در واقع، چنان که در بخش‌های بعدی به آن اشاره خواهد شد، روی خمینه‌های توپولوژیک ۳-بعدی همواره ساختار همواری وجود دارد که (به معنای درست آن) یکتاست. به این ترتیب، تعریف یک خمینه، به عنوان فضای توپولوژیکی که موضعاً شبیه به فضای اقلیدسی است (یا به عبارت دقیق‌تر، موضعاً همسان‌ریخت<sup>۴</sup> با فضای اقلیدسی است)، به مقدار قابل توجهی ساده می‌شود و این سادگی، برای شروع کار حسن بزرگی است. مفاهیم این

<sup>2</sup>cobordism <sup>3</sup>gauge theory <sup>4</sup>homeomorphic



بخش، معمولاً در درس هندسه خمینه‌ها مطالعه می‌شود. اما از جهت سهولت مطالعه مقاله برای مخاطب عمومی، برخی از پایه‌های اصلی بحث را مرور می‌کنیم.

**تعریف ۱.۲.** یک خمینه فشرده (یا نافشرده) و همبند از بعد  $n$  یک فضای توپولوژیک فشرده (یا نافشرده)، همبند و هاوسدورف مانند  $M$  است که توپولوژی آن دارای پایه‌ای شمارا باشد و در ضمن، موضعاً با فضای اقلیدسی  $n$ -بعدی همسان‌ریخت باشد، یعنی به ازای هر نقطه  $p$  در  $M$  باز  $U_p$  حول نقطه  $p$  وجود داشته باشد که با یک باز مانند  $V_p$  در  $\mathbb{R}^n$  همسان‌ریخت باشد.

فرض کنیم که  $M$  یک خمینه فشرده باشد و برای هر نقطه  $p$  از  $M$  باز  $U_p$  حول  $p$  و باز  $V_p$  در  $\mathbb{R}^n$  و همسان‌ریختی<sup>۵</sup>

$$h_p : U_p \rightarrow V_p \subset \mathbb{R}^n$$

مطابق با تعریف خمینه انتخاب شده باشند، تا ساختار  $M$  به‌عنوان یک خمینه  $n$ -بعدی داده شود. به مجموعه اطلاعات

$$\{(U_p, V_p, h_p : U_p \rightarrow V_p) \mid p \in M\}$$

یک اطلس<sup>۶</sup> برای خمینه  $M$  گفته می‌شود. در این صورت، به ازای هر دو نقطه  $p, q \in M$ ، نگاشت

$$h_q^p = h_q \circ h_p^{-1} : h_p(U_p \cap U_q) \rightarrow h_q(U_p \cap U_q)$$

به‌دست می‌آید، که نگاشتی بین بازهای اقلیدسی است. این نگاشت‌ها را نگاشت‌های گذار<sup>۷</sup> می‌نامیم. پیش‌فرض در مورد نگاشت‌های گذار در حالت عادی این است که این نگاشت‌ها پیوسته هستند. اما گاهی می‌توان اطلس را طوری انتخاب کرد که این نگاشت‌ها در دسته‌ای کوچکتر (و با ساختاری غنی‌تر) قرار داشته باشند. مثال‌های اصلی مورد نظر ما در این نوشتار، حالت‌هایی هستند که این نگاشت‌های گذار هموار باشند.

**تعریف ۲.۲.** یک اطلس مانند

$$\{(U_p, V_p, h_p : U_p \rightarrow V_p) \mid p \in M\}$$

برای خمینه  $M$  را یک اطلس هموار می‌نامیم هر گاه نگاشت‌های گذار

$$h_q^p = h_q \circ h_p^{-1} : h_p(U_p \cap U_q) \rightarrow h_q(U_p \cap U_q)$$

نگاشت‌هایی هموار باشند. خمینه  $M$  را هموار گوئیم هر گاه مجهز به اطلسی هموار باشد.

از یک اطلس هموار، یعنی اطلسی با نگاشت‌های گذار هموار، می‌توان به یک اطلس بیشین<sup>۸</sup> رسید: همسان‌ریختی

$$h : U \rightarrow V$$

از باز  $U$  در  $M$  به باز  $V$  در  $\mathbb{R}^n$  را داخل اطلس قرار می‌دهیم هر گاه به ازای هر  $p \in M$  نگاشت‌های

$$h_p \circ h^{-1} : h(U \cap U_p) \rightarrow h_p(U \cap U_p)$$

هموار باشند (از جمله، خود نگاشت‌هایی که اطلس را تعریف می‌کنند هم درون اطلس بیشین مربوطه قرار خواهند گرفت). اگر

$$\mathcal{T} = \{(U_p, V_p, h_p : U_p \rightarrow V_p) \mid p \in M\}$$

<sup>۵</sup>homeomorphism <sup>۶</sup>atlas <sup>۷</sup>transition function <sup>۸</sup>maximal



یک اطلس هموار برای خمینه  $M$  باشد و  $h : M \rightarrow M$  یک خودریختی  $M$  باشد، اطلس دیگری برای  $M$  به دست می‌آید که به صورت

$$\mathcal{T}_h = \{(U'_p = h^{-1}(U_{h(p)}), V_p, h \circ h_p : U'_p \rightarrow V_p) \mid p \in M\}$$

داده می‌شود، و به وضوح یک اطلس هموار است. می‌توان این اطلس را به یک اطلس هموار بیشین تبدیل کرد. این دو اطلس بیشین را، که معمولاً با هم متفاوت هستند، معادل می‌نامیم، چرا که این مقدار از تفاوت به طور طبیعی به ما تحمیل می‌شود. در چنین شرایطی، نگاشت  $h$  یک هموارریختی از خمینه هموار  $(M, \mathcal{T})$  به خمینه هموار  $(M, \mathcal{T}_h)$  القاء می‌کند. از این پس، وقتی که در مورد یک خمینه هموار سخن می‌گوییم، اطلس مربوطه را مفروض می‌گیریم، و در بیشتر اوقات اشاره مستقیمی به آن نخواهیم داشت.

مزیت خمینه‌های هموار آن است که برای مطالعه آنها می‌توان از ابزارهای توپولوژی دیفرانسیل استفاده کرد. وقتی که ساختاری هموار روی یک خمینه داده شده باشد، می‌توان از زیرخمینه‌های هموار آن خمینه سخن گفت: یک زیرخمینه هموار، در هر یک از نقشه‌های اطلس به یک زیرخمینه هموار فضای اقلیدسی تبدیل می‌شود. برای توضیح بیشتر در مورد زیرخمینه‌های هموار، خواننده می‌تواند به کتاب‌هایی که پیرامون هندسه خمینه‌ها یا توپولوژی دیفرانسیل نگاشته شده است، مراجعه کند. اگر در تعریف‌های بالا به جای فضای اقلیدسی  $\mathbb{R}^n$  از نیم فضای  $\mathbb{H}^n$ ، یعنی

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\},$$

استفاده کنیم، تعریف خمینه مرزدار به دست می‌آید. در این صورت، نقاطی که در تناظر با مرز نیم فضای اقلیدسی، یعنی مجموعه

$$\partial\mathbb{H}^n = \{(0, x_2, \dots, x_n) \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\},$$

قرار می‌گیرند را مرز خمینه  $M$  می‌نامیم و با  $\partial M$  نشان می‌دهیم. خمینه  $M$  را بسته می‌نامیم هرگاه فشرده و بدون مرز باشد. در ابعاد ۱ و ۲، توپولوژی خمینه‌های بسته، ساده است. در بعد ۱ تنها خمینه بسته (با تقریب همسان ریختی) دایره استاندارد است. در بعد ۲، چنبره‌های با گونا<sup>۹</sup>ی  $g = 0, 1, 2, \dots$  همه خمینه‌های بسته جهت پذیر<sup>۱۰</sup> (با تقریب همسان ریختی) هستند. جمع همبند یک صفحه افکنشی و یک چنبره با گونا<sup>۹</sup>ی  $g = 0, 1, 2, \dots$  فهرستی شامل همه خمینه‌های بسته جهت ناپذیر<sup>۱۱</sup> (با تقریب همسان ریختی) را تشکیل می‌دهند. به عبارت دیگر، هر خمینه بسته<sup>۲</sup>-بعدی با یکی از خمینه‌های این فهرست همسان ریخت است. یادآوری می‌کنیم که فضای افکنشی<sup>۲</sup>-بعدی را می‌توان با یکی کردن نقاط متقاطع یک کره<sup>۲</sup>-بعدی استاندارد و قرار دادن توپولوژی خارج قسمتی روی آن به دست آورد.

**مثال‌هایی از خمینه‌های ۳-بعدی.** در بعد سه، ساده‌ترین مثال‌ها از یک خمینه بسته،  $S^3$ ،  $S^2 \times S^1$  و  $S^1 \times S^1 \times S^1$  هستند، که در آن

$$S^n = \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n x_i^2 = 1 \right\}$$

کره استاندارد  $n$ -بعدی است. در واقع، اگر  $f : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$  یک تابع هموار بین فضاهای اقلیدسی باشد، برای بیشتر مقادیر  $y \in \mathbb{R}^m$  پیش‌تصویر این مقدار، یعنی زیرمجموعه  $M_y = M_y(f) = f^{-1}(y)$  از  $\mathbb{R}^{n+m}$  یک خمینه خواهد بود، که البته ممکن است فشرده نباشد. شرطی که تضمین می‌کند برای یک مقدار داده شده  $y$  پیش‌تصویر آن، یعنی  $M_y$  یک خمینه باشد آن است که مشتق تابع  $f$  در تمام نقاط  $x \in M_y$  به عنوان یک ماتریس  $m \times (n+m)$  دارای رتبه تمام، یعنی  $m$  باشد. چنین مقداری را یک مقدار عادی<sup>۱۲</sup> برای تابع  $f$  می‌نامیم، و سایر مقادیر را مقادیر بحرانی<sup>۱۳</sup> تابع  $f$  می‌خوانیم. طبق قضیه

<sup>9</sup>genus <sup>10</sup>orientable <sup>11</sup>non-orientable <sup>12</sup>regular value <sup>13</sup>critical value

سارد<sup>۱۴</sup> مجموعه مقادیر عادی، از رسته دوم<sup>۱۵</sup> است. به عبارت دیگر، این مجموعه اشتراک تعداد شمارایی از مجموعه‌های باز و چگال است. به عبارت ساده، بیشتر مقادیر عادی هستند. در مثال کره استاندارد،  $m = 1$  و  $f$  تابع هموار

$$f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^n x_i^2$$

است. به جز  $y = 0$ ، سایر مقادیر  $y \in \mathbb{R}$  عادی هستند. برای مقادیر مثبت  $y$  پیش‌تصویر  $M_y$  یک کره با شعاع  $\sqrt{y}$  است، و برای مقادیر منفی  $y$  این پیش‌تصویر تهی است (که آن را خمینه‌ای از هر بعد می‌توان فرض کرد). یک دسته جالب دیگر از مثال‌ها، خمینه‌های عدسی‌وار هستند. برای این منظور، توجه کنید که کره استاندارد ۳-بعدی را می‌توان به صورت

$$S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid \|z\|^2 + \|w\|^2 = 1\}$$

تصور کرد. در این صورت، اگر  $p > 1$  عددی صحیح باشد و  $0 < q < p$  عددی صحیح و اول نسبت به  $p$  باشد، عملی از گروه  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  روی  $S^3$  را که توسط نگاشت

$$f = f_{p,q}: S^3 \rightarrow S^3 \quad f(z, w) = (\zeta_p z, \zeta_p^q w)$$

تولید می‌شود متناظر با دوتایی  $(p, q)$  به دست می‌آوریم، که در آن

$$\zeta_p = \exp(2\pi i/p)$$

یک ریشه  $p$ ام واحد است. خارج قسمت  $S^3$  تحت این عمل گروه  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  را با  $L(p, q)$  نشان می‌دهیم، و آن را فضای عدسی‌وار<sup>۱۶</sup> متناظر با دوتایی  $(p, q)$  می‌نامیم. می‌توان به سادگی دید که به این ترتیب  $L(p, q)$  یک خمینه ۳-بعدی بسته خواهد بود، و نگاشت خارج قسمتی

$$\pi_{p,q}: S^3 \rightarrow L(p, q) = S^3/(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

یک نگاشت پوششی<sup>۱۷</sup> است، که در واقع فضای پوششی جامع<sup>۱۸</sup> فضای عدسی‌وار را می‌دهد. مثال جالب دیگر در بعد سه، چنبره خودریختی<sup>۱۹</sup> یک رویه است. فرض کنید که  $f: S \rightarrow S$  یک خودریختی از رویه (یعنی خمینه ۲-بعدی) فشرده  $S$  باشد. منظور از چنبره نگاشت<sup>۲۰</sup>  $f$  خمینه ۳-بعدی و مرزدار

$$M_f = (S \times [0, 1]) / \sim \quad (x, 0) \sim (f(x), 1) \quad \forall x \in S$$

است که مرز آن از تعدادی چنبره  $S^1 \times S^1$  تشکیل شده است. اگر  $S$  بسته باشد، خمینه  $M_f$  هم بسته خواهد بود. چنبره نگاشت  $f$  روی  $S^1$  تاریندی می‌شود. تصویر روی مؤلفه دوم نگاشت

$$\pi_f: M_f = (S \times [0, 1]) / \sim \rightarrow S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

را می‌دهد که پیش‌تصویر هر نقطه تحت آن، یک نسخه از رویه  $S$  است.

با اضافه شدن بعد، رده‌بندی خمینه‌ها دشوارتر می‌شود. شاید به یک معنا، جالب‌ترین اتفاقات در مسأله رده‌بندی خمینه‌های  $n$ -بعدی در حالت  $n = 3$  مشاهده می‌شود، جایی که رده‌بندی خمینه‌ها بیش از یکصد سال ریاضیدان‌ها را به خود مشغول داشت و منشاء تحولات و دستاوردهای مهمی در ریاضیات شد. این ادعا که امروز خمینه‌های ۳-بعدی را به‌طور کامل می‌فهمیم، فاصله زیادی با واقعیت دارد، چنان که این ادعا در مورد فهم کامل خمینه‌های ۲-بعدی هم سخنی گزاف است. اما بی‌گمان

<sup>14</sup>Sard's theorem <sup>15</sup>second category <sup>16</sup>lens space <sup>17</sup>covering map <sup>18</sup>universal covering space <sup>19</sup>automorphism

<sup>20</sup>mapping torus

پیشرفت‌های مهمی در راستای مسأله رده‌بندی خمینه‌های ۳-بعدی حاصل شده است، که برخی از آنها در ادامه گزارش خواهد شد.

### ۳. مشاهدات پوانکاره

شاید اولین کسی که فضاهای توپولوژیک مجرد را مورد بررسی قرار داد، کارل فردریش گاوس بود. در قضیه عالی<sup>۲۱</sup>، گاوس راهی برای محاسبه انحناء یک رویه ارائه می‌دهد که به نشستن رویه در فضای پیرامونی ارجاعی ندارد. به زبان ریاضیات امروز، رویه‌هایی که گاوس در نظر گرفت خمینه‌هایی<sup>۲۲</sup> ۲-بعدی بودند و قضیه او چنین فهمیده می‌شود که مفهوم انحناء یک مفهوم ذاتی<sup>۲۳</sup> است که به خود خمینه و متریک روی آن بستگی دارد، و نه به محیط پیرامون آن. این نگرش توسط پرنهارد ریمان<sup>۲۴</sup> تا حدود زیادی بسط داده شد. او اولین کسی بود که مطالعات قابل توجهی را در توسعه مفاهیم و خصوصیات رویه‌ها به ابعاد بالاتر صورت داد. کلمه منیفلد که در فارسی خمینه را در مقابل آن استفاده می‌کنیم، از کلمه‌ای آلمانی<sup>۲۵</sup> گرفته شده است که اولین بار توسط ریمان مورد استفاده قرار گرفت. این اصطلاح را، که شباهت مفهومی به چندلایه بودن دارد، ریمان در سخنرانی آغازین<sup>۲۶</sup> جهت شروع به کار در قامت استاد گوتینگن<sup>۲۷</sup> در سال ۱۸۵۴ برای توصیف مجموعه جواب‌های متغیرهایی استفاده کرد که به‌طور ضمنی توسط تعدادی شرط مقید می‌شدند، و بنابراین مقادیر متعددی را می‌توانستند به خود بگیرند. این دیدگاه، به توصیف خمینه‌ای که پیش‌تصویر مقدار عادی به‌خصوصی تحت تابعی هموار بین دوفضای اقلیدسی است (به‌گونه‌ای که در بخش قبل به آن اشاره شد)، قرابت زیادی دارد. از نظر ریمان، این چندلایه بودن می‌توانست به صورت گسسته و یا پیوسته اتفاق بیافتد. او به شکلی استقرائی، کمیتی که در  $n$  جهت توسعه دارد<sup>۲۸</sup> را به‌عنوان تغییر پیوسته‌ای از کمیتی که در  $(n-1)$  جهت توسعه دارد، تعریف می‌کرد. این توصیف از چند بعدی بودن در نهایت به مفهوم مجرد و رسمی خمینه، آن‌گونه که ما می‌شناسیم، تکامل پیدا کرد.

آنری پوانکاره را می‌توان آغازگر توپولوژی جبری دانست. در اواخر قرن نوزدهم، پوانکاره مقاله‌ای را تحت عنوان «تحلیل مکان<sup>۲۹</sup>» [۳۹] منتشر کرد، که نقشی اساسی در شکل‌گیری رشته توپولوژی جبری، به‌عنوان بخش مهمی از ریاضیات جدید داشت. این مقاله که در سال ۱۸۹۵ در مجله مدرسه عالی پلی‌تکنیک<sup>۳۰</sup> به چاپ رسید، با ۵ مقاله دیگر که توسط پوانکاره در فاصله سال‌های ۱۸۹۹ تا ۱۹۰۴ به‌عنوان متمم‌هایی برای مقاله اول به چاپ رسیدند، تکمیل شد [۴۰-۴۴]. این مقالات در [۴۵] گردآوری و به انگلیسی ترجمه شده‌اند. پوانکاره، با وجود آن‌که خود به ناکارآمدی زبان ریاضیات دوره خود برای به تصویر کشیدن ایده‌هایش آگاهی داشت، در مقاله «تحلیل مکان» کوشید تا برخی از مفاهیم مهم توپولوژی جبری را معرفی کند، و قضایایی را در مورد آنها به اثبات برساند. بازنگاری برخی از این قضایا به همراه اثبات‌هایی که از استاندارد دقت امروزی برخوردار باشند، چندین سال به طول انجامید. با این وجود، تأثیر عمیق پوانکاره بر ریاضیات پس از خود، و به ویژه توپولوژی جبری که خود آن را بنیان نهاد، انکارناپذیر است. در مقاله «تحلیل مکان» تمرکز پوانکاره بر معرفی ساختارهایی جبری بود که بتوانند بین فضاهای توپولوژیک ناهمسان‌ریخت<sup>۳۱</sup> تمایز قائل شوند. به ویژه، مفهوم گروه بنیادی<sup>۳۲</sup> و گروه‌های مانستگ<sup>۳۳</sup> برای اولین بار در این مقالات معرفی شدند. پوانکاره موفق شد نسخه‌ای اولیه از دوگانی پوانکاره<sup>۳۴</sup> را در این مقاله صورت‌بندی کند. آن‌چه امروز با نام حدس پوانکاره شناخته می‌شود، در مقاله آخر از این سلسله مقالات ظاهر می‌شود.

در اولین بخش از مقاله «تحلیل مکان» پوانکاره خمینه‌ها را به‌عنوان پیش‌تصویرهای مقادیر عادی برای توابعی بین فضاهای اقلیدسی توصیف می‌کند که مشتق اول پیوسته دارند. به این ترتیب، تعریف پوانکاره حالت خاصی از خمینه‌ها را در

<sup>21</sup>Theorema Egregium <sup>22</sup>intrinsic <sup>23</sup>Bernhard Riemann <sup>24</sup>Mannigfaltigkeit <sup>25</sup>inaugural lecture <sup>26</sup>Göttingen <sup>27</sup>n-fach  
ausgedehnte Mannigfaltigkeit <sup>28</sup>analysis situs <sup>29</sup>Journal de l'École Polytechnique <sup>30</sup>non-homeomorphic <sup>31</sup>fundamental  
group <sup>32</sup>homology group <sup>33</sup>Poincaré duality

بر می‌گیرد. در بخش سوّم، او اشاره می‌کند که گراف یک تابع هموار، خمینه است و بر این اساس به تعریفی کلی‌تر، بر اساس آنچه زنجیره‌ای از خمینه‌ها<sup>۳۴</sup> می‌خواند، می‌پردازد. این مفهوم را می‌توان مادر تعریف امروزی ما از یک اطلس برای خمینه دانست. بالاخص، پوانکاره در حالتی که گراف تابع هموار  $\theta$  از متغیر  $y$  و گراف تابع هموار دیگر  $\theta'$  از متغیر  $y'$  با هم اشتراکی داشته باشند، این محدودیت را قائل می‌شود که هم  $y$  تابعی هموار از  $y'$  باشد و هم  $y'$  تابعی هموار از  $y$  باشد. به این ترتیب، او در واقع یک دستگاه مختصات و نگاشت‌های گذار متناظر با آن را تعریف می‌کند.

در سال‌های ۱۹۱۱ و ۱۹۱۲ هرمان وایل<sup>۳۵</sup> در درسی که در مورد رویه‌های ریمانی می‌داد، تعریف مجردی از خمینه‌های هموار را ارائه کرد که در نهایت منجر به تعریف مجرد فضاهای توپولوژیک در سال‌های بعدی شد. بر این اساس تعریف مجرد امروزی از خمینه‌ها هم شکل گرفت، و معادل بودن چنین تعریف‌های مجردی با تعریف مورد استفاده پوانکاره (در ابتدای مقاله «تحلیل مکان»)<sup>۳۶</sup> کمی بعدتر و در حوالی سال ۱۹۳۰ به اثبات رسید (در این مورد با تفصیل بیشتری سخن خواهیم گفت). به هر صورت، تحولات بعدی نشان داد که تعریف اولیه پوانکاره هم کاستی معناداری از جهت کلیت نداشته است.

پوانکاره ابتدا موفق به ساختن گروه‌های مانستگی شد و با استفاده از آنها، درست پیش از آغاز قرن بیستم، به مطالعه خمینه‌های ۳-بعدی پرداخت. پوانکاره این سؤال را مطرح کرد که آیا گروه‌های مانستگی قادر به تشخیص کره ۳-بعدی به همراه توپولوژی القایی بر آن از فضای اقلیدسی ۴-بعدی، از سایر خمینه‌های ۳-بعدی همبند و بسته است؟ همه ما در درس توپولوژی جبری با محاسبه گروه‌های مانستگی آشنا شده‌ایم و می‌دانیم که گروه صفرم مانستگی یک خمینه همبند برابر با  $\mathbb{Z}$  است. به علاوه، برای یک خمینه همبند (یعنی خمینه‌ای که گروه صفرم مانستگی آن  $\mathbb{Z}$  است) گروه سوّم مانستگی به ما می‌گوید که آیا خمینه جهت‌پذیر است یا نه. بنابراین برابر بودن گروه‌های صفرم و سوّم مانستگی یک خمینه ۳-بعدی مانند  $M$  با گروه‌های متناظر برای  $S^3$  به این معناست که خمینه  $M$  همبند و جهت‌پذیر است. به علاوه، در مورد  $M$  می‌دانیم که گروه‌های اول و دوّم مانستگی بدیهی هستند. البته توجه کنید که بدیهی بودن گروه اول مانستگی یعنی  $H_1(M, \mathbb{Z})$  و اینکه  $H_0(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$  بر اساس دوگانگی پوانکاره (با ضرایب در اعداد صحیح) نتیجه می‌دهند که  $H_2(M, \mathbb{Z})$  هم بدیهی است. به این ترتیب، سؤال پوانکاره را می‌توان به این صورت بازنویسی کرد.

**سؤال ۱.۳.** فرض کنیم که  $M$  خمینه‌ای ۳-بعدی، بسته، همبند و جهت‌پذیر باشد و فرض کنیم گروه اول مانستگی  $M$  یعنی  $H_1(M, \mathbb{Z})$  بدیهی باشد. آیا یک همسان‌ریختی بین  $M$  و  $S^3$  وجود دارد؟

پوانکاره در ادامه مطالعاتش بر روی خمینه‌های ۳-بعدی اولین مثال ناقص<sup>۳۶</sup> برای سؤال بالا را ساخت. مثالی که پوانکاره ساخت و در زیر آن را معرفی می‌کنیم امروزه به نام کره-مانسته<sup>۳۷</sup> پوانکاره شناخته می‌شود. پوانکاره در مسیر نشان دادن تفاوت خمینه‌ای که ساخته بود با کره استاندارد، مفهوم گروه بنیادی را به دنیای ریاضیات عرضه کرد.

مثالی که پوانکاره به آن دست یافت را می‌توان به صورت‌های مختلفی معرفی کرد. شاید ساده‌ترین راه این باشد که به یک ۲۰-وجهی منتظم که مرکز ثقل آن بر مبداء منطبق شده است و گروه تقارن‌های جهت‌نگهدار آن نگاه کنیم. این گروه، که آن را با  $G$  نشان خواهیم داد در واقع زیرگروهی است از گروه دوران‌های فضای ۳-بعدی، یعنی گروه  $SO_3(\mathbb{R})$  که شامل ۶۰ عضو است. در واقع  $G$  شامل اعضای از  $SO_3(\mathbb{R})$  است که ۲۰-وجهی منتظم را به خودش می‌نگارند. اگر  $S_n$  گروه جایگشت‌های روی  $n$  حرف باشد و  $A_n$  زیرگروه شامل جایگشت‌های زوج باشد، به سادگی می‌توان مشاهده کرد که  $G$  با  $A_5$  یک‌ریخت است. گروه  $SO_3(\mathbb{R})$  ساختار یک خمینه ۳-بعدی دارد (این تمرینی است که گاهی در درس هندسه خمینه‌ها به دانشجویان داده می‌شود) و در واقع با فضای افکنشی ۳-بعدی که از یکی کردن نقاط متقاطع در کره ۳-بعدی به دست می‌آید هموارریخت

<sup>34</sup>Une chaine des variétés (chain of manifolds) <sup>35</sup>Herman Weyl <sup>36</sup>counter-example <sup>37</sup>homology sphere

است. به این ترتیب، می‌توان روی خارج قسمت

$$M = SO_3(\mathbb{R})/A_5 = \mathbb{RP}^3/G$$

توپولوژی خارج قسمتی قرار داد و مشاهده کرد که این خارج قسمت، یک خمینه ۳-بعدی فشرده است. توجه کنید که فضای پوششی  $120$ -لایه‌ای از این خارج قسمت، کره استاندارد است، که خمینه‌ای همبند ساده است. بنابراین، گروه بنیادی خمینه  $M$  یک گروه  $120$ -عضوی است. پوانکاره نشان داد که این گروه  $120$ -عضوی زیرگروه بهنجار<sup>۳۸</sup> نابدهی ندارد، و از جمله زیرگروه جابه‌جاگر<sup>۳۹</sup> آن با کل گروه برابر است. به علاوه نشان داد (و ما این موضوع را در درس توپولوژی جبری می‌آموزیم) که خارج قسمت گروه بنیادی یک خمینه و جابه‌جاگر این گروه همان گروه اول مانستگی است. به این ترتیب، از مشاهدات پوانکاره نتیجه می‌شود که  $M$  خمینه‌ای است با گروه بنیادی  $120$ -عضوی که گروه‌های مانستگی آن با گروه‌های مانستگی  $S^3$  یک‌ریخت هستند.

به خمینه‌هایی مانند  $M$  که گروه‌های مانستگی آنها با گروه‌های مانستگی کره استاندارد یک‌ریخت هستند، کره-مانسته‌های صحیح<sup>۴۰</sup> (یا به اختصار کره-مانسته) گفته می‌شود. امروزه روش‌های بسیار متنوعی برای تولید کره-مانسته‌ها وجود دارد، و به یک معنا، تنوع توپولوژیک کره-مانسته‌ها چندان کمتر از تنوع توپولوژیک همه خمینه‌های ۳-بعدی نیست. با این وجود، هنوز هم مثال پوانکاره جایگاه ویژه‌ای نزد توپولوژی‌دان‌ها دارد. در سال ۲۰۰۳ ژان پیر لومینه<sup>۴۱</sup> و همکاران او در رصدخانه پاریس، برای توجیه برخی محدودیت‌هایی که در مشاهدات منعکس شده بود، مدلی را پیشنهاد کردند که در آن شکل سرتاسری دنیای پیرامون ما با یک کره پوانکاره مدل شده بود. برخی از پیش‌بینی‌های این مدل در سال ۲۰۰۸ توسط مشاهدات فضاپیمای WMAP مورد تأیید قرار گرفت. هر چند قرائن مستحکمی برای تأیید مدل ژان پیر لومینه وجود ندارد، اما ظاهر شدن کره پوانکاره در خارج از دنیای مجرد ریاضی در نوع خود جالب توجه است.

پس از کشف (مفهوم) گروه بنیادی و اولین مثال از یک کره-مانسته، پوانکاره سؤال خود را بازنویسی کرد. به زبان ریاضیات امروز، حدس مهم پوانکاره که در سال ۱۹۰۴ به دنیای ریاضیات عرضه شد را می‌توان به این صورت بازنویسی کرد:

**حدس ۲.۳ (پوانکاره).** هر خمینه بسته، همبند، و همبند ساده ۳-بعدی، با کره استاندارد همسان‌ریخت است.

در ادامه، از میان تلاش‌های ریاضیدان‌ها در یکصد سال گذشته، گام‌هایی را که به زعم نویسنده نقش مهمی در رشد فهم ما از توپولوژی خمینه‌های ۳-بعدی داشته‌اند و به اثبات حدس پوانکاره در ابتدای قرن ۲۱م منجر شدند را، خواهیم کرد. البته باید توجه جدی داشت که پاسخ دادن به حدس پوانکاره همه آن چیزی نیست که باید در مورد خمینه‌های ۳-بعدی دانست، و همه ریاضیاتی که حول مطالعه خمینه‌های ۳-بعدی شکل گرفت هم به مسیری که در این نوشتار ترسیم می‌شود، ارتباط مستقیم ندارد. سؤال‌های باز و دشواری همچنان در مطالعه خمینه‌های ۳-بعدی حل نشده باقی مانده‌اند، و تحولات مهمی هم مسیره‌های دیگری را طی کردند، که در این نوشتار آنها را منعکس نکرده‌ایم. با این وجود، گوشه‌ای از این سؤال‌های باز و تحولات مرتبط را نیز به تصویر کشیده‌ایم.

#### ۴. قضیه مؤثر و قضیه نشانندن ویتنی

نکته مهمی که نحوه پرداختن ما به خمینه‌های ۳-بعدی را بر روند تاریخی پیشرفت‌ها منطبق می‌کند، این واقعیت است که ساختارهای توپولوژیک، و هموار روی خمینه‌های ۳-بعدی، تفاوتی با هم ندارند. قضیه مهم زیر در سال ۱۹۵۲ توسط ادوین مؤیز<sup>۴۲</sup> به اثبات رسید [۲۵].

<sup>38</sup>normal <sup>39</sup>commutator subgroup <sup>40</sup>integral homology sphere <sup>41</sup>Jean-Pierre Luminet <sup>42</sup>Edwin Moise

ne saurait donc en déduire  $C_2 \equiv 0$ ,  $C_4 \equiv 0$ , ni a fortiori déduire ces deux équivalences de (2) et de (3) seulement.

Il y a donc deux cycles de  $V$  qui ne sont pas équivalents à zéro; donc  $V$  n'est pas simplement connexe.

En d'autres termes, le groupe fondamental de  $V$  ne saurait se réduire à la substitution identique, puisqu'il contient comme sous-groupe le groupe icosaédrique.

Il resterait une question à traiter :

Est-il possible que le groupe fondamental de  $V$  se réduise à la substitution identique, et que pourtant  $V$  ne soit pas simplement connexe?

En d'autres termes, peut-on tracer les cycles  $K'_1$  et  $K'_2$  de telle façon qu'ils ne soient pas bouclés et ne se coupent pas; que les équivalences

$$K'_1 \equiv K'_2 \equiv 0, \quad K''_1 \equiv K''_2 \equiv 0$$

entraînent les équivalences

$$C_1 \equiv C_2 \equiv C_3 \equiv C_4 \equiv 0$$

et que cependant la surface  $W$  ne puisse pas être regardée comme homéomorphe à elle-même de telle façon qu'aux cycles  $C_1, C_2, C_3, C_4$  correspondent les cycles  $C'_1, C'_2, C'_3, C'_4$ ; que les équivalences

$$K'_1 \equiv K'_2 \equiv 0$$

entraînent  $C'_1 \equiv C'_2 \equiv 0$  et réciproquement; et qu'enfin les équivalences

شکل ۱. حدس پوانکاره در پنجمین متمم «تحلیل مکان» نوشته آنری پوانکاره.

Figure 1: Poincaré conjecture in the fifth supplement to "analysis situs" by Henry Poincaré.

قضیه ۱۰۴ (مویز). فرض کنیم  $M$  یک خمینه ۳-بعدی توپولوژیک باشد. در این صورت  $M$  دارای یک اطلس هموار بیشین است که ساختاری هموار روی  $M$  می‌دهد. به علاوه، هر دو اطلس هموار بیشین روی  $M$  با هم معادل هستند.

معنای قضیه مویز آن است که در دنیای خمینه‌های ۳-بعدی، بدون آن که چیزی از کلیت مسأله کاسته شود، و بدون آن که ابهامی پیش بیاید، می‌توان فرض کرد که هر خمینه‌ای که آن را مطالعه می‌کنیم به ساختاری هموار مجهز است. این موضوع در ابعاد بالاتر درست نیست. اول آن که خمینه‌های ۴-بعدی بسته‌ای وجود دارند که روی آنها هیچ ساختار همواری نمی‌توان قرار داد، و دوم خمینه‌های ۴-بعدی وجود دارند که روی آنها بی‌نهایت ساختار هموار دویبه‌دو نامعادل وجود دارد. این موضوع که خمینه‌های ۳-بعدی را می‌توان هموار فرض کرد، به ریاضیدان‌ها اجازه داد که از ابزارهای هندسی هم در مطالعه خمینه‌های ۳-بعدی استفاده کنند. به علاوه، این موضوع بررسی مجرد خمینه‌های ۳-بعدی را بر بررسی‌های اولیه این خمینه‌ها، به عنوان زیرخمینه‌های هموار فضای اقلیدسی که موضعاً توسط صفرهای مشترک تعدادی تابع هموار مستقل داده می‌شوند، منطبق می‌کند.

یکی از قضایای مهم دیگری که به مطالعه خمینه‌های هموار شکلی منسجم بخشید، و به مناقشه بر سر تعریف درست یک خمینه هموار پایان داد، قضیه‌ای است که هسلر ویتنی<sup>۴۳</sup> در سال ۱۹۳۶ اثبات کرد. همان‌گونه که ویتنی در مقدمه مقاله‌اش اشاره می‌کند، تا پیش از مقاله او روشن نبود که آیا خمینه‌های همواری که با یک اطلس هموار و به طور مجرد تعریف می‌شوند، دسته‌ای بزرگ‌تر از زیرخمینه‌های هموار فضاهای اقلیدسی (چنان‌که پوانکاره در نظر می‌گرفت) هستند، یا نه! ویتنی برای اولین بار نشان

<sup>43</sup>Hassler Whitney



داد که این دو تعریف با هم معادل هستند [۵۳]. قضیهٔ ویتنی که بر پایهٔ استفاده از قضیهٔ تقریب<sup>۴۴</sup> و اِیْرِشْتِرَاس<sup>۴۵</sup> و تعمیم‌هایی از آن بنا شده است، نشان می‌دهد که هر خمینهٔ هموار را می‌توان در فضایی اقلیدسی که بعد آن هم چندان بالا نیست نشان داد.

**قضیه ۲.۴** (نشان دادن ویتنی). برای هر عدد صحیح و مثبت  $m$ ، هر خمینهٔ هموار  $m$ -بعدی (که هاوسدورف و شمارای نوع دوّم<sup>۴۶</sup> باشد) را می‌توان به‌طور هموار در فضای اقلیدسی  $\mathbb{R}^{2m+1}$  نشان داد. به‌علاوه، هر نگاشت پیوسته  $f: M \rightarrow N$  از خمینهٔ هموار  $m$ -بعدی  $M$  به خمینهٔ هموار  $n$ -بعدی  $N$  را می‌توان با نشان دادن‌های هموار به دلخواه نزدیک تقریب زد، مشروط به این‌که  $n$  از  $2m$  بزرگ‌تر باشد.

در واقع، می‌توان با تقویت استدلال ویتنی نشان داد که هر خمینهٔ هموار  $m$ -بعدی را می‌توان در فضای اقلیدسی  $\mathbb{R}^{2m}$  نشان داد. به این قضیه، قضیهٔ نشان دادن قوی<sup>۴۷</sup> ویتنی می‌گویند. اگر  $m$  توانی از ۲ باشد، فضای تصویری حقیقی<sup>۴۸</sup>  $m$ -بعدی  $(\mathbb{R}P^m)$  را نمی‌توان در  $\mathbb{R}^{2m-1}$  نشان داد. فرض کنیم که  $e(m)$  کوچکترین عدد صحیحی باشد که هر خمینهٔ هموار، فشرده و همبند  $m$ -بعدی را بتوان در  $\mathbb{R}^{e(m)}$  نشان داد. طبق قضیهٔ نشان دادن قوی ویتنی و مثال یاد شده، اگر  $m$  توانی از ۲ باشد، داریم  $2m = e(m)$ . اثبات قضیهٔ زیر را در حالت  $4 \leq m$  موریس هرش<sup>۴۹</sup> و آندره هفلیگر<sup>۵۰</sup> و در حالت  $m = 3$  چارلز ترنس کِلِگ<sup>۵۱</sup> وال<sup>۵۲</sup> انجام داده‌اند [۱۳]، [۵۲].

**قضیه ۳.۴** (نشان دادن ویتنی-هفلیگر-هرش-وال). هر خمینهٔ هموار  $m$ -بعدی (که هاوسدورف و شمارای نوع دوّم باشد) را می‌توان به‌طور هموار در فضای اقلیدسی  $\mathbb{R}^{2m-1}$  نشان داد، مشروط به این‌که  $m$  توانی از ۲ نباشد. به‌عبارت دیگر، اگر  $m$  توانی از ۲ باشد، آنگاه  $2m = e(m)$  و در غیر این صورت داریم  $2m > e(m)$ .

## ۵. تجزیهٔ خمینه‌های ۳-بعدی

چند اشتباه تاریخی به ریاضیدان‌ها نشان داد که شهود هندسی آنها (که بدون آن پرداختن به مطالعهٔ خمینه‌های ۳-بعدی ناممکن بود) پختگی لازم برای پرهیز از اشتباه و تصوّر اتفاقات عجیبی که با بالا رفتن بعد روی می‌دهد را ندارد. شهود ریاضیدان‌ها تا قبل از تحولات ابتدای قرن بیستم، شهودی ۲-بعدی بود که کارایی لازم برای فهم ظرافت‌های بعد ۳ را نداشت. لم دن<sup>۵۲</sup> مثال خوبی برای این موضوع است:

**قضیه ۱.۵** (خم بسته (تعمیم لم دن)). فرض کنیم  $M$  خمینه‌ای ۳-بعدی و مرزدار باشد و خم بسته  $\partial M \rightarrow S^1$  روی مرز  $M$  وجود داشته باشد که عنصری نابديهی در گروه بنیادی  $\partial M$  را نمایش می‌دهد، در حالی‌که تصویر آن در گروه بنیادی  $M$  بديهی است. در این صورت نشان دادن سره‌ای مانند

$$f: (\mathbb{D}, \partial\mathbb{D}) \rightarrow (M, \partial M)$$

از گوی ۲-بعدی  $\mathbb{D}$  در  $M$  وجود دارد به‌طوری‌که مرز گوی ۲-بعدی به مرز  $M$  و درون آن به درون  $M$  نگاشته می‌شود و تصویر مرز گوی تحت  $f$  در گروه بنیادی  $\partial M$  نابديهی است.

توجه کنید که قضیهٔ بالا، برخلاف شهود اوّلیه، ادعا نمی‌کند که تحدید نگاشت  $f$  به مرز قرص، یعنی  $f|_{\partial\mathbb{D}}: S^1 \rightarrow \partial M$ ، به‌عنوان عضوی از  $\pi_1(\partial M)$  با  $\pi_1(\partial M)$  یکی است. این گزاره، در واقع تعمیمی است از لم دن که به قضیهٔ خم بسته<sup>۵۳</sup>

<sup>44</sup>approximation theorem <sup>45</sup>Karl Theodor Wilhelm Weierstrass <sup>46</sup>second countable <sup>47</sup>strong embedding theorem

<sup>48</sup>real projective space <sup>49</sup>Morris William Hirsch <sup>50</sup>André Haefliger <sup>51</sup>Charles Terence Clegg Wall <sup>52</sup>Dehn lemma

<sup>53</sup>loop theorem



معروف است. لم دن ابتدا در سال ۱۹۱۰ توسط ماکس دن<sup>۵۴</sup> صورت‌بندی و اثبات گردید [۱]. اما ۱۹ سال بعد، در سال ۱۹۲۹ هلموت کنیزر<sup>۵۵</sup> متوجه اشتباهی در اثبات دن گردید [۱۸]. تردید در درستی ادعای لم دن، که شهود هندسی اولیه به درستی آن گواهی می‌دهد، نزدیک به ۳۰ سال دیگر ادامه پیدا کرد تا سال ۱۹۵۷ که کریستوس پاپاکیریاکوپولوس<sup>۵۶</sup> (معروف به پاپا) موفق به اثبات آن شد [۳۴، ۳۵]. اثبات پاپا علاوه بر لم دن، قضیه خم بسته و قضیه کره<sup>۵۷</sup> را هم نتیجه می‌داد.

قضیه ۲.۵ (کره). فرض کنیم  $M$  خمینه‌ای ۳-بعدی و جهت‌پذیر باشد به طوری که گروه هم‌نهش<sup>۵۸</sup> دوم آن یعنی  $\pi_2(M)$  نابدیهی است. در این صورت برای یک عضو نابدیهی  $\pi_2(M)$  نماینده‌ای مانند  $f: S^2 \rightarrow M$  وجود دارد که یک نشان‌دهنده کره در  $M$  است.

گزاره‌هایی نظیر قضیه خم بسته و قضیه کره به توپولوژیست‌ها اجازه می‌دهند که به‌طور مؤثری از اطلاعاتی که توپولوژی جبری در مورد خمینه‌های ۳-بعدی به ما ارائه می‌کند، استفاده کنند و زیرخمینه‌هایی از این خمینه‌ها را پیدا کنند که در راستای آنها می‌توان خمینه‌های ۳-بعدی را جراحی کرد. این جراحی‌ها در عمل می‌تواند منجر به ساده شدن خمینه‌های ۳-بعدی و فهم بهتر آنها شود. به‌علاوه، این فهم جدید را می‌توان به اطلاعاتی در مورد خمینه اولیه ترجمه کرد.

اولین گام جدی برای به ثمر رساندن برنامه جراحی که به آن اشاره شد توسط هلموت کنیزر در سال ۱۹۲۹ برداشته شد [۱۸]. زیرخمینه همبند ۲-بعدی  $S$  از خمینه ۳-بعدی  $M$  را ۲-طرفه می‌گوییم هرگاه باز همبند  $U$  حول  $S$  در  $M$  وجود داشته باشد به طوری که  $U \setminus S$  دارای دو مؤلفه همبندی باشد. فرض کنیم خمینه ۳-بعدی  $M$  که آن را به ساختاری هموار مجهز کرده‌ایم، شامل یک زیرخمینه هموار مانند  $S$  باشد. به‌علاوه، فرض کنیم که  $S$  کره‌ای ۲-بعدی و ۲-طرفه است که خود مرز یک گوی ۳-بعدی در  $M$  نیست. در این صورت خمینه  $M$  را تحویل‌پذیر<sup>۵۹</sup> می‌گوییم. اگر خمینه  $M$  تحویل‌پذیر باشد، می‌توان  $M$  را در راستای کره  $S$  برید و به هر یک از دو مؤلفه مرزی که به این ترتیب به دست می‌آید یک گوی ۳-بعدی چسباند و به یک خمینه ۳-بعدی جدید (احتمالاً ناهمبند) رسید که ساختار هموار آن هم به‌طور طبیعی مشخص می‌شود. این فرآیند را یک تحویل خمینه ۳-بعدی می‌نامیم. خمینه‌ای که تحویل‌پذیر نباشد را تحویل‌ناپذیر<sup>۶۰</sup> می‌گوییم. کنیزر ثابت کرد بعد از متناهی بار تحویل کردن، هر خمینه ۳-بعدی بسته به خمینه‌ای تحویل‌ناپذیر (و احتمالاً ناهمبند) تبدیل می‌شود:

قضیه ۳.۵ (کنیزر). فرض کنیم  $M$  خمینه‌ای بسته و ۳-بعدی باشد. در این صورت دنباله متناهی

$$M = M_1, \dots, M_n = M'$$

خمینه‌های ۳-بعدی (احتمالاً ناهمبند) وجود دارد به طوری که  $M_{i+1}$  از تحویل  $M_i$  در راستای کره ۲-بعدی هموار  $S_i \subset M_i$  به دست آمده، و هر مؤلفه همبندی  $M'$  تحویل‌ناپذیر است.

قضیه کنیزر ارتباطی تنگاتنگ با قضیه تجزیه اول خمینه‌های ۳-بعدی دارد. اگر  $M_1$  و  $M_2$  دو خمینه ۳-بعدی باشند، می‌توان از هر یک از آنها گوی هموار کوچکی را خارج کرد و دو خمینه مرزدار به دست آورد که دارای مرزهای  $S_1$  و  $S_2$  هستند. خمینه‌های ۳-بعدی مرزدار به دست آمده را می‌توان از روی  $S_1$  و  $S_2$  که همسان‌ریخت با کره ۲-بعدی هستند به هم چسباند تا خمینه ۳-بعدی جدیدی به دست آید. این خمینه جدید را جمع همبند  $M_1$  و  $M_2$  می‌نامیم و با  $M = M_1 \# M_2$  نشان می‌دهیم. تصویر مشترک  $S_1$  و  $S_2$  در  $M$  یک کره ۲-بعدی است که آن را با  $S$  نشان می‌دهیم. اگر  $M_1$  و  $M_2$  متفاوت از  $S^3$  باشند، خمینه  $M_1 \# M_2$  تحویل‌پذیر خواهد بود. در واقع، اگر  $M_1$  و  $M_2$  متفاوت از  $S^3$  باشند آنگاه  $M$  را می‌توان در راستای  $S$  شکافت و به اجتماع مجزای  $M_1 \amalg M_2$  تحویل کرد. خمینه  $M$  را اول گوییم هرگاه نتوان آن را به صورت  $M \simeq M_1 \# M_2$

<sup>54</sup>Max Dehn <sup>55</sup>Hellmuth Kneser <sup>56</sup>Christos Papakyriakopoulos <sup>57</sup>sphere theorem <sup>58</sup>homotopy group <sup>59</sup>reducible

<sup>60</sup>irreducible

نوشت به طوری که  $M_1$  و  $M_2$  هر دو نابديهی (ناهمسان ریخت با کره ۳-بعدی) باشند. مشابه قضیه کنیزر می‌توان قضیه زیر را ثابت کرد:

**قضیه ۴.۵** (تجزیه اول خمینه‌های ۳-بعدی). فرض کنیم که  $M$  خمینه‌ای بسته، ۳-بعدی، جهت‌پذیر و نابديهی (یعنی ناهمسان ریخت با  $S^3$ ) باشد. در این صورت خمینه‌های اول و نابديهی  $M_1, M_2, \dots, M_n$  وجود دارند به طوری که  $M_1 \# M_2 \# \dots \# M_n$  با  $M$  همسان ریخت است. به علاوه این تجزیه اول یکتاست. یعنی اگر  $M$  با

$$M'_1 \# M'_2 \# \dots \# M'_m$$

همسان ریخت باشد و  $M'_1, \dots, M'_m$  اول و نابديهی باشند در این صورت  $m = n$  و جایگشت  $\sigma \in S_n$  وجود دارد به طوری که به ازای هر  $i = 1, \dots, n$  خمینه  $M_i$  با  $M'_{\sigma(i)}$  همسان ریخت است.

تجزیه اول خمینه‌های ۳-بعدی رفتاری گره خورده با رفتار گروه بنیادی دارد. یک سوی این ارتباط را به سادگی می‌توان مشاهده کرد. از آنجا که کره ۲-بعدی همبند ساده است، طبق قضیه ون کمپن<sup>۶۱</sup> گروه بنیادی  $M_1 \# M_2 \# \dots \# M_n$  با جمع آزاد گروه‌های بنیادی  $M_1, M_2, \dots, M_n$  برابر است. به عبارت دیگر داریم:

$$\pi_1(M_1 \# M_2 \# \dots \# M_n) \simeq \pi_1(M_1) * \pi_1(M_2) * \dots * \pi_1(M_n).$$

اثبات عکس این گزاره اولین بار در رساله دکتری جان استالینگز<sup>۶۲</sup> در سال ۱۹۵۹ ظاهر شد. [۵۰، ۴۹]:

**قضیه ۵.۵** (حدس کنیزر- قضیه استالینگز). فرض کنیم که  $M$  خمینه‌ای جهت‌پذیر، همبند، بسته و ۳-بعدی باشد و

$$\pi_1(M) \simeq G_1 * G_2 * \dots * G_n$$

که در آن  $G_1, G_2, \dots, G_n$  گروه‌هایی نابديهی هستند. در این صورت خمینه‌های ۳-بعدی و بسته  $M_1, M_2, \dots, M_n$  وجود دارند به طوری که  $\pi_1(M_i)$  با  $G_i$  یک ریخت است و  $M$  با  $M_1 \# M_2 \# \dots \# M_n$  همسان ریخت است.

معنای قضیه تجزیه اول خمینه‌های ۳-بعدی و حدس کنیزر که توسط استالینگز به اثبات رسید آن بود که هر گونه رهیافتی برای رده‌بندی خمینه‌های ۳-بعدی بر اساس گروه بنیادی آنها (و از جمله حدس پوانکاره) را می‌توان با تمرکز بر خمینه‌های ۳-بعدی اول به پیش برد. با کمی دقت بیشتر، می‌توان استدلال کرد که توجه به خمینه‌های تحویل‌ناپذیر برای به دست آوردن فهم جامعی از همه خمینه‌های ۳-بعدی کفایت می‌کند. بر این اساس می‌توان نتیجه موج اول مطالعه خمینه‌های ۳-بعدی را تحویل مسأله رده‌بندی همه خمینه‌های ۳-بعدی، به رده‌بندی خمینه‌های ۳-بعدی تحویل‌ناپذیر دانست.

## ۶. تاربندی‌های زایفرت و رویه‌های تراکم‌ناپذیر

مفهوم دیگری که اهمیت خودش را نشان داد، مفهوم تاربندی‌های زایفرت<sup>۶۳</sup> بود. هربرت زایفرت<sup>۶۴</sup> در سال ۱۹۳۲ در رساله دکتری خود، با عنوان توپولوژی فضاهاى تارى ۳-بعدی، دسته‌ای از خمینه‌های ۳-بعدی را مورد مطالعه قرار داد که امروز با نام خمینه‌های زایفرت شناخته می‌شوند و رفته‌رفته اهمیت خود را در توپولوژی ۳-بعدی نشان دادند [۴۸]. فرض کنیم  $a > 0$  و  $b$  اعدادی صحیح و نسبت به هم اول باشند. فرض کنیم که  $A: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  دورانی به اندازه زاویه  $\frac{2b\pi}{a}$  حول مبدا باشد که قرص واحد

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| \leq 1\} \subset \mathbb{C}$$

<sup>61</sup>van Kampen theorem <sup>62</sup>John Stallings <sup>63</sup>Seifert fibration <sup>64</sup>Herbert Seifert

را به خودش می‌نگارد. در این صورت فضای خارج قسمتی

$$T(a, b) = \frac{\mathbb{D} \times [0, 1]}{\sim_A} \quad (z, 1) \sim_A (A(z), 0) \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

یک خمینه ۳-بعدی مرزدار است که چنبرهٔ تاریندی شده<sup>۶۵</sup> استاندارد از نوع  $(a, b)$  خوانده می‌شود. مجموعه‌های

$$I_z = \{z\} \times [0, 1] \subset T(a, b), \quad z \in \mathbb{D}$$

افزای از  $T(a, b)$  به تارها را ارائه می‌کنند که در آن همهٔ تارها دایره هستند. غیر از تاری که از  $I$  حاصل می‌شود، سایر تارها از به هم چسبیدن  $a$  نسخه از پاره‌خط‌های به شکل

$$I_z \cup I_{A(z)} \cup I_{A^2(z)} \cup \dots \cup I_{A^{a-1}(z)}$$

ساخته شده‌اند. یعنی در مدل استاندارد، یک تار مرکزی با تارهایی احاطه شده است که هر کدام  $a$  بار در امتداد آن می‌چرخند. یک خمینهٔ زایفرت خمینه‌ای ۳-بعدی و بسته مانند  $M$  است به همراه افزای از آن به اجتماعی از تارهای همسان‌ریخت با دایره، به طوری که به ازای هر تار در  $M$  اعداد صحیح  $0 < a$  و  $b$  و یک همسایگی  $U$  از تار یادشده در  $M$  موجود باشد به طوری که  $U$  با  $T(a, b)$  همسان‌ریخت است و تجزیهٔ  $M$  به تارها در این همسایگی  $U$  با تجزیهٔ استاندارد  $T(a, b)$  به تارهای دایره‌ای شکل تحت همسان‌ریختی یادشده یکی است. افزای یادشده از خمینهٔ  $M$  به تارها را یک تاریندی زایفرت از خمینهٔ  $M$  می‌نامیم. توجه کنید که غیر از متناهی تار، برای سایر تارها مقدار  $0 < a$  لزوماً برابر با ۱ است. چنین تارهایی را تارهای عادی تاریندی زایفرت می‌نامیم. متناهی تاری که برای آنها مقدار  $a$  بیش از ۱ است را تارهای ویژه می‌نامیم. تاریندی چنبره‌های تاریندی شدهٔ استاندارد  $T(a, b)$  و  $T(a, b+a)$  با هم هموارریخت هستند، اما وقتی پرمایشی از رویهٔ  $B$  تثبیت شده باشد، تفاوت این دو تاریندی دیده می‌شود. در حالت کلی، می‌توان فرض کرد که برای همهٔ تارهای ویژه که در تناظر با دوتایی  $(a, b)$  هستند، داریم  $0 < b < a$ . بهای این فرض آن است که برای یک تار عادی، چنبرهٔ تاریندی شدهٔ استاندارد را از نوع  $T(1, b)$  بگیریم، که در آن عدد صحیح  $b$  همهٔ ابهام‌ها را در خود دارد.

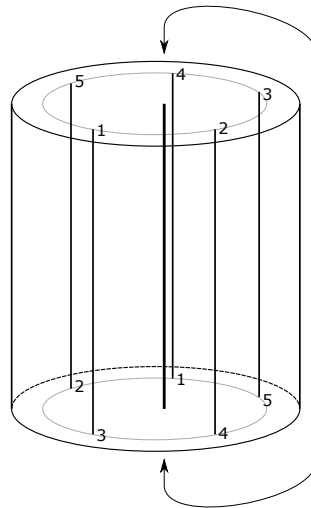
فرض کنیم  $M$  یک خمینهٔ جهت‌پذیر همبند و بسته باشد که دارای یک تاریندی زایفرت است. فرض کنید  $B$  فضای همهٔ تارها باشد. با استفاده از ساختار تاری زایفرت، می‌توان روی  $B$  ساختار یک خمینهٔ ۲-بعدی، یا به عبارت صحیح‌تر، ساختار یک مدار خمینه<sup>۶۶</sup> ۲-بعدی را قرار داد. معنای این ادعا آن است که در تعداد متناهی از نقاط  $B$  که در تناظر با تارهای ویژه هستند، علاوه بر ساختار یک خمینه، کسری گویا با مخرج مثبت داریم که نحوهٔ چرخش تارهای عادی مجاور حول تار ویژه را نشان می‌دهد. رویهٔ ۲-بعدی که ساختار مدار خمینهٔ  $B$  بر آن بنا شده است را با  $B$  نشان خواهیم داد. بنابراین  $B$  همان رویهٔ ۲-بعدی  $B$  است که ساختار یک مدار خمینه هم با توجه به تعداد و نوع تارهای ویژه به آن اضافه شده است. تاریندی زایفرت روی چنبرهٔ تاریندی شدهٔ استاندارد، یک تاریندی مرز این چنبره را، که همان  $S^1 \times S^1$  است، القاء می‌کند. بنابراین، برای هر جفت از دوتایی‌های  $(a, b), (a', b')$  از اعداد نسبت به هم اول، هموارریختی

$$f_{(a,b)}^{(a',b')} : \partial T(a, b) \rightarrow \partial T(a', b')$$

وجود دارد که تاریندی روی مرز را حفظ می‌کند. از جمله، می‌توان  $T(a, b)$  و  $T(1, 0)$  را با استفاده از هموارریختی که به آن اشاره شد به هم چسبانید. حاصل این چسباندن، فضای عدسی‌وار  $L(a, b)$  خواهد بود.

فرض کنیم که تعداد تارهای ویژه برابر با  $n$  باشد، و دوتایی‌های  $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$  نوع تارهای ویژه را مشخص کنند. عدد صحیح  $b$  را همان‌گونه که در بالا به آن اشاره شد انتخاب کنید. گونای رویهٔ  $B$  را که ممکن است جهت‌پذیر یا

<sup>65</sup>fibered torus <sup>66</sup>orbifold



شکل ۲. در چنبرهٔ تاریندی شدهٔ  $T(5, 2)$  نقاطی که شماره یکسانی دارند به هم می‌چسبند و پنج پاره‌خط به یک تار بسته تبدیل می‌شوند.

Figure 2: In the fibered torus  $T(5, 2)$ , the points labeled by the same number are glued together and the five vertical line segments form a closed fiber.

جهت‌ناپذیر باشد، با  $g$  نشان دهید. فرض کنیم  $\epsilon$  عضوی در  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  است که برابر با  $\circ$  انتخاب می‌شود اگر رویه  $B_\circ$  جهت‌پذیر باشد، و برابر با  $\mathbf{1}$  انتخاب می‌شود اگر رویهٔ  $B_\circ$  جهت‌ناپذیر باشد. متناظر با هر نماد زایفرت  $\epsilon^{\mathbf{7}}$  که از مجموعهٔ اطلاعات

$$\{(\epsilon, g); b, (a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)\}$$

تشکیل شده است، می‌توان یک خمینهٔ زایفرت ساخت. به این ترتیب، می‌توان فرض کرد که  $b$  عددی صحیح و دلخواه است، در حالی‌که

$$\circ < b_i < a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

زایفرت نشان داد همهٔ خمینه‌های جهت‌پذیر زایفرت در واقع خمینهٔ زایفرت متناظر با چنین نمادی هستند، هر چند که یک خمینهٔ زایفرت، در شرایط نه چندان معمول، می‌تواند در تناظر با نمادهای زایفرت متفاوتی باشد. شاخص اویلر مدارخمینهٔ  $B$  با عبارت

$$\chi(B) = \chi(B_\circ) - \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{a_i}\right)$$

تعریف می‌شود. بیشتر تاریندی‌های زایفرت شاخص اویلر مدارخمینهٔ منفی دارند. در این حالت، خمینهٔ زایفرت به‌طور یکتا (با تقریب هموارریختی) با گروه بنیادی‌اش مشخص می‌شود. به‌علاوه، تاریندی‌های زایفرت که برای آنها شاخص اویلر مدارخمینهٔ مثبت یا صفر است، دستهٔ نسبتاً محدودی از خمینه‌ها را تشکیل می‌دهند که عموماً از نوع فضاهای عدسی‌وار، خمینه‌های منشوری  $\epsilon^{\mathbf{8}}$  و یا تاریندی‌های چنبره‌ای روی یک دایره هستند. در صورتی‌که  $M$  یک خمینهٔ زایفرت و متناظر با نماد

$$\{(\epsilon, g); b, (a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)\}$$

<sup>67</sup>Seifert symbol    <sup>68</sup>prism manifold

باشد، و  $B$  مدارخمینه‌ای باشد که فضای تارهای تاریندی زایفرت را نشان می‌دهد، دنباله دقیق گروه‌های بنیادی به صورت

$$\pi_1(S^1) \rightarrow \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(B) \rightarrow 1$$

به دست می‌آید. از روی این دنباله دقیق، می‌توان گروه بنیادی  $M$  را محاسبه کرد [۴۸، ۱۶]. به این معنی که، خمینه‌های زایفرت خیلی زود دسته‌بندی شدند. به گونه‌ای مشابه می‌توان خمینه‌های زایفرت جهت‌ناپذیر، و خمینه‌های زایفرت فشرده مرزدار را هم تعریف و رده‌بندی کرد. در نگاه اول، خمینه‌های زایفرت خمینه‌های خاصی هستند و واقعاً هم چنین است. اما به زودی ریاضیدان‌ها متوجه شدند که خارج از این دسته، اتفاقات جالبی را می‌توان انتظار داشت! برای بیان دقیق‌تر این موضوع باید چند مفهوم را معرفی کنیم. فرض کنیم  $S$  رویه‌ای هموار داخل خمینه ۳-بعدی هموار  $M$  باشد، یعنی زیرخمینه‌ای هموار، بسته و ۲-بعدی در  $M$ . نگاشت شمول از  $S$  به  $M$  نگاشت

$$\iota_* : \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$$

از گروه بنیادی  $S$  به گروه بنیادی  $M$  را القاء می‌کند. اگر گونای رویه ۲-طرفه  $S$  مثبت باشد، و نگاشت

$$\iota_* : \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$$

یک‌به‌یک باشد، رویه  $S \subset M$  را یک رویه تراکم‌ناپذیر<sup>۶۹</sup> در خمینه  $M$  می‌گوییم. بر اساس قضیه خم بسته، از رویه‌های تراکم‌پذیر<sup>۷۰</sup> می‌توان به رویه‌هایی ساده‌تر (با شاخص اوپلر بزرگتر) در خمینه  $M$  رسید. بنابراین، رویه‌های تراکم‌ناپذیر رویه‌هایی هستند که نمی‌توان آنها را ساده کرد و سهم آنها از گروه بنیادی خمینه ۳-بعدی باعث نوعی از پایداری برای آنها می‌شود. در سال ۱۹۶۷ و بر پایه ایده‌هایی از ولفگانگ هاکن<sup>۷۱</sup>، فریدهلم والدهاوزن<sup>۷۲</sup> برای اولین بار به اهمیت رویه‌های تراکم‌ناپذیر و نقشی که مطالعه آنها می‌تواند در فهم توپولوژی خمینه‌های ۳-بعدی ایفا کند پی برد. آن دسته از خمینه‌های ۳-بعدی که در دل خود رویه‌ای تراکم‌ناپذیر را نهفته دارند، خمینه‌های هاکن خوانده می‌شوند.

زیرخمینه هموار، بسته و  $n$ -بعدی  $X$  از خمینه فشرده (و احتمالاً مرزدار)  $(n+1)$ -بعدی  $Y$  را موازی مرز<sup>۷۳</sup> می‌نامیم اگر یک، یک‌نهمش از  $X$  به روی یکی از مؤلفه‌های مرزی  $Y$  وجود داشته باشد. در یک خمینه ۳-بعدی فشرده (و احتمالاً مرزدار) مانند  $M$  یک زیرخمینه هموار ۲-بعدی مانند  $T$  را یک چنبره اساسی<sup>۷۴</sup> می‌نامیم هرگاه هموارریخت با چنبره  $S^1 \times S^1$ ، تراکم‌ناپذیر و ناموازی مرز باشد. خمینه ۳-بعدی  $M$  را بی‌چنبره<sup>۷۵</sup> می‌گوییم هرگاه هیچ چنبره اساسی‌ای نداشته باشد. اگر  $T$  یک چنبره اساسی در  $M$  باشد، آنگاه زیرگروهی از  $\pi_1(M)$  به دست می‌آید که یک‌ریخت با  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  است و مزدوج با هیچ یک از زیرگروه‌هایی که با مؤلفه‌های مرزی  $M$  در تناظر هستند نیست. توجه کنید که اگر  $N$  یک مؤلفه مرزی  $M$  باشد، متناظر با آن زیرگروه

$$\iota_*^N(\pi_1(N)) < \pi_1(M)$$

از  $\pi_1(M)$ ، با استفاده از نگاشت شمول  $N \hookrightarrow M : \iota^N$  به دست می‌آید. از این روی، گاهی خمینه‌های ۳-بعدی بی‌چنبره را به عنوان خمینه‌هایی تعریف می‌کنند که هر زیرگروه یک‌ریخت با  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  از گروه بنیادی آنها مزدوج با زیرگروه‌های متناظر با مؤلفه‌های مرزی‌شان باشد. ما از تعریف اول استفاده خواهیم کرد. خمینه ۳-بعدی و احتمالاً مرزدار  $M$  را با تقریب هم‌نهمش بی‌چنبره<sup>۷۶</sup> می‌نامیم هرگاه هر نگاشت

$$f : S^1 \times S^1 \rightarrow M$$

<sup>69</sup>incompressible <sup>70</sup>compressible <sup>71</sup>Wolfgang Haken <sup>72</sup>Friedhelm Waldhausen <sup>73</sup>boundary parallel <sup>74</sup>essential torus <sup>75</sup>atoroidal <sup>76</sup>homotopically atoroidal

که گروه بنیادی چنبره را به صورت یک‌به‌یک در  $\pi_1(M)$  بنگارد، با نداشت شمول یکی از مؤلفه‌های مرزی  $M$  هم‌نهمش باشد. قضیه مهمی که در خصوص خمینه‌های زایفرت وجود دارد محصول کار مشترک ویلیام ژاکو<sup>۷۷</sup> و پیتر شالین<sup>۷۸</sup> [۱۵] و کار مستقل کلاوز یوهانس<sup>۷۹</sup> [۱۷] است، و به قضیه تجزیه JSJ و یا قضیه تجزیه چنبره‌ای<sup>۸۰</sup> معروف است. این قضیه در نیمه دوم دهه هفتاد میلادی به اثبات رسیده است.

**قضیه ۱.۶ (تجزیه JSJ).** فرض کنیم  $M$  خمینه‌ای بسته و تحویل‌ناپذیر باشد. آنگاه مجموعه‌ای کمین (متناهی) از چنبره‌های هموار تراکم‌ناپذیر در  $M$  وجود دارند به طوری که هر مؤلفه مکمل آنها در  $M$  یا زایفرت است و یا بی‌چنبره. به علاوه، چنین مجموعه کمینی از چنبره‌های تراکم‌ناپذیر با تقریب یک‌نهمش یکتاست.

## ۷. خمینه‌های هذلولوی و قضایای ترستن

مفهوم دیگری که رفته‌رفته اهمیت آن روشن شد، وجود ساختار هذلولوی بر روی برخی خمینه‌های ۳-بعدی و ماهیت صلب این ساختار (در صورت وجود) بود که بر خلاف بعد ۲، تنها ریشه در توپولوژی خمینه ۳-بعدی داشت. رویه‌های ۲-بعدی جهت‌پذیر با گونای  $g > 1$  را می‌توان به ساختاری هذلولوی مجهز کرد. ساختار توپولوژیک به‌طور یکتا (با تقریب بازپرمایش با یک خودریختی پیوسته) ساختاری هموار روی رویه ۲-بعدی مشخص می‌کند. با تثبیت این ساختار هموار، می‌توان از متریک‌های مختلف روی رویه ۲-بعدی و انحنای آنها، که همان انحنای اسکالر است، صحبت کرد. با فرض  $g > 1$  خانواده‌ای  $(6g - 6)$ -بعدی از متریک‌های هذلولوی، یعنی متریک‌های با انحنای ثابت  $-1$ ، که نایک‌نهاده<sup>۸۱</sup> با یکدیگر هستند، روی رویه ۲-بعدی وجود دارد که نقاط فضای تائیشمولر<sup>۸۲</sup> متناظر با رویه ۲-بعدی را تشکیل می‌دهند. به این معنا، متریک هذلولوی به هیچ وجه به طور یکتا با ساختار توپولوژیک، یا همان گونای رویه، مشخص نمی‌شود.

اگر  $M$  خمینه‌ای جهت‌پذیر و ۳-بعدی باشد، ساختار توپولوژیک روی  $M$  همچنان ساختار همواری را، با تقریب بازپرمایش با یک خودریختی پیوسته، روی  $M$  تعیین می‌کند. با تثبیت این ساختار هموار می‌توان پرسید که آیا متریکی هذلولوی، یعنی متریکی که انحنای آن در همه نقاط  $x \in M$  و در راستای همه زیرفضاهای ۲-بعدی فضای مماس در نقطه  $x$ ، برابر با  $-1$  باشد، روی  $M$  وجود دارد یا خیر. در صورتی که چنین متریکی وجود داشته باشد، خمینه  $M$  را هذلولوی می‌نامیم. بر خلاف حالت ۲-بعدی که چنین متریک‌هایی، در صورت وجود، بسیار متنوع بودند، قضیه تکان‌دهنده‌ای در بعد ۳ و ابعاد بالاتر در این خصوص از جرج دانیل موستو<sup>۸۳</sup> (و تکمیل آن توسط گوپال پاراساد<sup>۸۴</sup>) وجود دارد [۲۸، ۲۹، ۴۶]. این قضیه، نشان می‌دهد که در ابعاد بالاتر از ۲ یک‌ریختی<sup>۸۵</sup>‌های گروه بنیادی خمینه‌های هذلولوی، از یک‌متری<sup>۸۶</sup>‌های این گونه از خمینه‌ها سرچشمه می‌گیرند. توجه کنید که متریک هذلولوی روی یک خمینه هذلولوی، یک عنصر حجم روی آن مشخص می‌کند. حتی وقتی خمینه هذلولوی فشرده نیست، ممکن است حجم آن نسبت به این عنصر حجم متناهی باشد. به این معنی، خمینه‌های هذلولوی تمام<sup>۸۷</sup> (که هر دنباله کوشی در آنها همگراست) با حجم متناهی، تعمیمی از خمینه‌های هذلولوی فشرده هستند.

**قضیه ۱.۷ (صلبیت موستو).** فرض کنیم  $M_1$  و  $M_2$  دو خمینه هذلولوی تمام از بعد  $n > 2$  باشند و  $g_1$  و  $g_2$  متریک‌های هذلولوی روی  $M_1$  و  $M_2$  باشند. اگر  $\pi_1(M_1) \rightarrow \pi_1(M_2)$  یک یک‌ریختی بین گروه‌های بنیادی باشد، آنگاه یک یک‌متری  $(M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$  وجود دارد به طوری که نگاشت القائی  $f_* : \pi_1(M_1) \rightarrow \pi_1(M_2)$  با یک‌ریختی  $\iota$  برابر است.

<sup>77</sup>William Jaco <sup>78</sup>Peter Shalen <sup>79</sup>Klaus Johannson <sup>80</sup>torus decomposition theorem <sup>81</sup>non-isotopic <sup>82</sup>Teichmüller space <sup>83</sup>George Daniel Mostow <sup>84</sup>Gopal Parasad <sup>85</sup>isomorphism <sup>86</sup>isometry <sup>87</sup>complete

از منظر این قضیه و قضیه مویز، بعد ۳ وضعیت بسیار ویژه‌ای دارد. این بعد، بالاترین بعدی است که در آن ساختار توپولوژیک، ساختار هموار را مشخص می‌کند و پایین‌ترین بعدی است که در آن قضیهٔ موسو برقرار است. به عبارت دیگر، این بعد تنها بعدی است که در آن ساختار هندلوی، در صورت وجود، کاملاً توسط توپولوژی خمینه تعیین می‌گردد. به عنوان نمونه‌ای از نتایج این مشاهده توجه کنید که اگر روی خمینهٔ  $M$  ساختار هندلوی وجود داشته باشد، حجم  $M$  نسبت به این ساختار هندلوی که آن را با  $\text{vol}(M)$  نشان می‌دهیم خوش‌تعریف است و یک ناوردای توپولوژیک است که با بازپیمایش ساختار هموار هم عوض نمی‌شود. در عین حال ساختن خمینه‌های هندلوی ۳-بعدی، با وجود فراوانی آنها، چندان ساده نیست.

اگر  $M$  یک خمینهٔ ۳-بعدی باشد که به ساختاری هندلوی مجهز است، این ساختار را می‌توان به فضای پوششی جامع  $M$  ترفیع داد. بنابراین، لازم است که فضای پوششی جامع  $M$  همان فضای هندلوی استاندارد ۳-بعدی باشد، که یک مدل برای آن نیم‌فضای بالا، یعنی

$$\mathbb{H} = \{(x, z) \mid x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}, x > 0\}$$

به همراه متریک

$$ds^2 = \frac{dx^2 + d\|z\|^2}{x^2}$$

روی آن است. در این صورت گروه بنیادی  $M$  روی  $\mathbb{H}$  به عنوان زیرگروهی از گروه یک‌متری‌های آن عمل می‌کند، و خمینهٔ ۳-بعدی  $M$  را می‌توان به عنوان خارج قسمت  $\mathbb{H}$  تحت عمل این زیرگروه تصور کرد. از سوی دیگر، گروه یک‌متری‌های  $\mathbb{H}$  همان گروه  $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$  است که از تقسیم

$$\text{SL}_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc = 1 \right\}$$

بر زیرگروه دو عضوی شامل ماتریس همانی  $I$ ، و وارون جمعی آن (یعنی  $-I$ ) به دست می‌آید. هر خمینهٔ ۳-بعدی هندلوی تمام با یک زیرگروه گسسته  $\Gamma < \text{PSL}_2(\mathbb{C})$  در تناظر است، به طوری که خارج قسمت  $\mathbb{H}/\Gamma$  دارای حجم هندلوی متناهی باشد. چنین زیرگروه‌هایی از  $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$  را گروه‌های کلاسیکی<sup>۸۸</sup> می‌نامند. به این ترتیب، مطالعهٔ خمینه‌های ۳-بعدی هندلوی تا حدود زیادی به مطالعهٔ گروه‌های کلاسیکی تحویل می‌شود.

در اواسط دههٔ ۷۰ میلادی، ترستن به بررسی توپولوژی و هندسهٔ خمینه‌های ۳-بعدی پرداخت. کارهای ترستن نشان داد که اهمیت هندسهٔ هندلوی در مطالعهٔ خمینه‌های ۳-بعدی به مراتب فراتر از آن چیزی است که پیش از او تصور می‌شد. تا قبل از ترستن، مثال‌های کمی از خمینه‌های ۳-بعدی هندلوی با حجم هندلوی متناهی شناخته شده بود. کارهای مستقل رابرت راییلی<sup>۸۹</sup> و ترویل یورگنسن<sup>۹۰</sup> در اواخر دههٔ ۷۰ میلادی نشان داد که خمینه‌های ۳-بعدی هندلوی با حجم متناهی آنچنان که تصور می‌شد هم کمیاب نیستند. از جمله، آنها توانستند نشان دهند که گره هشت-سیما<sup>۹۱</sup> هندلوی است (یعنی مکمل این گره ساختار هندلوی می‌پذیرد). با الهام گرفتن از کار راییلی و یورگنسن، ترستن مسیری متفاوت و صریح برای ساختن ساختار هندلوی روی مکمل گره هشت-سیما را در پیش گرفت، و این مکمل را به صورت اجتماع دو چهاروجهی هندلوی ایده‌آل که با دقت به هم چسبانده شده‌اند تصویر کرد و نشان داد که به جز برای  $10^\circ$  مقدار گویا، سایر جراحی‌ها<sup>۹۲</sup> روی گره هشت-سیما منجر به خمینه‌ای فشرده و هندلوی می‌شوند.

<sup>88</sup>Kleinian group <sup>89</sup>Robert Riley <sup>90</sup>Troels Jorgensen <sup>91</sup>figure-eight knot <sup>92</sup>surgery



مثال‌هایی که به این ترتیب توسط ترستن ساخته شد، اولین مثال‌های شناخته‌شده از خمینه‌های تحویل‌ناپذیر، ناهاکن<sup>۹۳</sup> و نازایفرت<sup>۹۴</sup> بودند. مهم‌تر آن‌که مشاهدات ترستن در مورد مکمل گره هشت-سیما، انگیزه اثبات قضیه جراحی هذلولوی ترستن شدند، که نسخه کلی‌تر آن در مورد خمینه‌های هذلولوی با حجم متناهی صورت‌بندی می‌شود.

فرض کنیم  $M$  خمینه‌ای هذلولوی با حجم متناهی باشد که در نتیجه تعدادی متناهی تکینگی مخروطی دارد، که مجموعه بازی حول هر یک از آنها با حاصلضرب یک رویه و یک نیم‌خط، که روی آن متریک هذلولوی قرار گرفته است، یک‌متر<sup>۹۵</sup> است. این گونه بازها پایانه‌های<sup>۹۶</sup> خمینه هذلولوی  $M$  را شکل می‌دهند. هر یک از این تکینگی‌های مخروطی را می‌توان با یک  $S^1 \times D^2$  جایگزین کرد، و با تثبیت یکی از این جایگزینی‌ها، سایر آنها در تناظر با مقادیر گویا هستند. به خمینه‌های فشرده و بدون مرزی که به این ترتیب به دست می‌آیند، آکنش‌های دن<sup>۹۷</sup> خمینه اولیه گفته می‌شود [۵۱].

**قضیه ۲.۷** (جراحی هذلولوی ترستن). فرض کنیم  $M$  خمینه‌ای مرزدار و هذلولوی با حجم متناهی باشد. در این صورت تنها متناهی آکنش دن از خمینه  $M$  ناهذلولوی خواهد بود (و سایر آنها هذلولوی هستند).

مقایسه وضعیت شناخت ما از خمینه‌های ۳-بعدی هذلولوی قبل و بعد از این کار ترستن شاید نشان دهد که نتایج او تا چه حد نگاه توپولوژیست‌ها را تغییر داد. این اما تنها ابتدای راهی بود که ترستن گشود. در تکمیل این کار، ترستن قضیه معروف هندسی‌سازی خود را برای خمینه‌های هاکن ثابت کرد، که در زیر آن را توضیح خواهیم داد. این قضیه به قضیه هیولای ترستن<sup>۹۸</sup> معروف است، شاید از آنجا که اثبات آن بسیار طولانی و سرشار از ایده‌های جدیدی است که شهود منحصر به فردی را می‌طلبد. به‌علاوه این اثبات زیرشاخه‌هایی از توپولوژی بعد پایین را به هم پیوند می‌دهد که تا پیش از آن حوزه‌های مجزا و بی‌ارتباطی تلقی می‌شدند. نگارش نسخه کامل و قابل خواندن (برای یک توپولوژیست عادی) از هیولای ترستن بیش از ۲۰ سال به طول انجامید. به این ترتیب، ناگهان توپولوژیست‌ها دریافتند که خمینه‌های هذلولوی که تا دیروز نایاب به نظر می‌رسیدند، در واقع به شدت در اکثریت هستند! اگر  $M$  یک خمینه هذلولوی تمام با حجم متناهی باشد می‌توان نتیجه گرفت که تحویل‌ناپذیر و بی‌چنبره است. در سال ۱۹۸۲، ترستن در مورد خمینه‌های هاکن عکس این موضوع را ثابت کرد:

**قضیه ۳.۷** (هندسی‌سازی ترستن). فرض کنیم  $M$  خمینه‌ای ۳-بعدی، فشرده، تحویل‌ناپذیر، هاکن و بی‌چنبره باشد، به طوری که شاخص اوایلر مرز  $M$  برابر با صفر باشد. در این صورت درون  $M$  را می‌توان به یک متریک هذلولوی تمام مجهز کرد، به طوری که حجم  $M$  نسبت به آن متناهی باشد.

این اما انتهای بازی ترستن نبود. در واقع، شاید آنچه مهم‌تر از قضیه بسیار اساسی و بنیادی هندسی‌سازی ترستن است، تصویری غنی از توپولوژی خمینه‌های ۳-بعدی است که در قالب حدس هندسی‌سازی ترستن به جامعه ریاضی ارائه شد. برای ساده‌تر شدن توضیحات، به جای بیان صورت اصلی حدس هندسی‌سازی ترستن، به بیان دو نتیجه مهم آن بسنده می‌کنیم. اولین نتیجه، کمابیش معادل با حدس اصلی است، و دومین نتیجه، تعمیمی بسیار عمیق و جدی از حدس پوانکاره را به دست می‌دهد:

**قضیه ۴.۷** (نتیجه اول حدس هندسی‌سازی ترستن). فرض کنیم  $M$  خمینه‌ای ۳-بعدی، بسته و تحویل‌ناپذیر باشد و  $M_1, \dots, M_n$  مؤلفه‌های تجزیه JSJ از خمینه  $M$  باشند. در این صورت هر یک از خمینه‌های  $M_i$  یا زایفرت است و یا هذلولوی (با حجم متناهی).

**قضیه ۵.۷** (نتیجه دوم حدس هندسی‌سازی ترستن). فرض کنیم که  $M_1$  و  $M_2$  خمینه‌های ۳-بعدی، بسته و تحویل‌ناپذیر باشند به طوری که  $\pi_1(M_1)$  و  $\pi_1(M_2)$  با هم یک‌ریخت‌اند. در این صورت یا  $M_1$  و  $M_2$  با هم همسان‌ریخت‌اند، و یا  $M_1$  و  $M_2$  هر دو فضاهای عدسی‌وار هستند.

<sup>93</sup>non-Haken <sup>94</sup>non-Seifert <sup>95</sup>isometric <sup>96</sup>end <sup>97</sup>Dehn filling <sup>98</sup>Thurston's monster theorem

تصویری که ترستن از خمینه‌های ۳-بعدی ارائه داد، با آنچه پیش از او در مورد آنها تصور می‌شد تفاوت‌های چشمگیری دارد. شاید بدون تصحیح تصور ریاضیدان‌ها از آنچه در دنیای ۳-بعدی می‌گذرد، برداشتن گام‌های بعدی ممکن نبود.

### ۸. شماره ریچی و اثبات حدس ترستن

اثبات حدس ترستن از مسیری متفاوت از ریاضیاتی عبور کرد که تا زمان ترستن استفاده از آن در توپولوژی متداول بود. چنان‌که گفتیم، خمینه‌های ۳-بعدی را می‌توان هموار فرض کرد، بدون آن‌که چیزی از کلیت مسأله کاسته شود. روی خمینه‌های هموار همیشه می‌توان متریکی را انتخاب و تثبیت کرد. فضای همه متریک‌هایی که روی یک خمینه ۳-بعدی می‌توان قرار داد، که آن را با  $\mathcal{M}_M$  نشان می‌دهیم، یک فضای بسیار بزرگ، و در واقع خمینه‌ای تراکم‌پذیر از بعد نامتناهی است. در سال ۱۹۸۱ ریچارد هامیلتون<sup>۹۹</sup> یک شماره هندسی<sup>۱۰۰</sup> در  $\mathcal{M}_M$  تعریف کرد که با شروع از هر متریک، راهی برای تغییر پیوسته متریک به سمت نقاط احتمالاً بهتری از  $\mathcal{M}_M$  را به ما نشان می‌دهد. با استفاده از یک دستگاه مختصات می‌توان هر متریک  $g$  روی  $M$  را موضعاً با استفاده از یک ماتریس با درایه‌های  $g_{ij}$  که در آن  $i$  و  $j$  مقادیر ۱، ۲ و ۳ را می‌گیرند، نمایش داد. در چنین دستگاه مختصاتی، انحنا ریچی متریک هم به صورت ماتریسی با درایه‌های  $R_{ij}$  داده می‌شود. اگر  $t$  پارامتر زمان باشد و

$$g = [g_{ij}] : (a, b) \rightarrow \mathcal{M}_M$$

یک خم در  $\mathcal{M}_M$  باشد که با پارامتر زمان پرمایش شده است، آنگاه

$$g_{ij}(t), R_{ij}(t) = R_{ij}(g(t)), \quad i, j = 1, 2, 3$$

توابعی از  $t$  خواهند بود. هامیلتون نشان داد که برای هر نقطه شروع  $[g_{ij}(\circ)] = g(\circ)$  بازه‌ای مانند  $[\circ, a)$  و خم یکتای

$$g = [g_{ij}] : [\circ, a) \rightarrow \mathcal{M}_M$$

وجود دارد به طوری که رابطه

$$\frac{d}{dt}g_{ij}(t) = -2R_{ij}(t) \quad \forall t \in [\circ, a)$$

برقرار است. به این ترتیب، یک شماره هندسی روی  $\mathcal{M}_M$  به دست می‌آید که به شماره ریچی<sup>۱۰۱</sup>، یا شماره ریچی-هامیلتون معروف است. معادله شماره ریچی را می‌توان به صورت بهنجار<sup>۱۰۲</sup> هم نوشت:

$$\frac{d}{dt}g_{ij}(t) = -2R_{ij}(t) + \frac{2}{3}\bar{R}g_{ij}(t).$$

در این معادله  $\bar{R}$  میانگین انحنا اسکالر روی کل خمینه  $M$  است. در این صورت وجود و یکتایی جواب همچنان برقرار خواهد بود و حجم  $M$  (نسبت به عنصر حجم متناظر با متریک) در طول شاره ثابت خواهد ماند. طبق قضیه هامیلتون مقدار بیشینه برای  $a$  در  $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$  وجود دارد.

معادله شماره ریچی شباهت زیادی به معادله حرارت<sup>۱۰۳</sup> دارد. ایده هامیلتون این بود که، همان‌گونه که حرارت در طول زمان توزیع می‌شود تا به تعادل و هم‌دمایی برسیم، چنین معادله‌ای قاعداً باید ناهمگونی‌های انحنا متریک اولیه را در طول زمان اصلاح کند و در نهایت به متریکی خوش‌رفتار و در وضعیتی نسبتاً ایده‌آل همگرا شود. امیدواری او این بود که این وضعیت نسبتاً ایده‌آل همان وضعیتی باشد که توسط هندسه‌های مدل ترستن، که همگی همگن هستند، توصیف می‌شود. در نگاه هامیلتون، متریک طبیعی متناظر با هر یک از این هندسه‌ها (در صورت وجود) باید مانند نقطه ثابت برای شماره ریچی

<sup>99</sup>Richard Hamilton <sup>100</sup>geometric flow <sup>101</sup>Ricci flow <sup>102</sup>normalized <sup>103</sup>heat equation

رفتار کند، و اگر برای یک خمینه ۳-بعدی  $M$  تنها یکی از انواع هندسه‌های ترستن را بتوان روی  $M$  قرار داد، ممکن است این نقطه ثابت حتی یک نقطه جاذب باشد.

هامیلتون موفق شد نشان دهد که اگر روی خمینه بسته و ۳-بعدی  $M$  یک متریک با انحنا ریچی مثبت (و نه لزوماً ثابت) وجود داشته باشد، در این صورت روی  $M$  می‌توان هندسه کروی قرار داد، و هیچ یک از هندسه‌های دیگر ترستن را نمی‌توان روی  $M$  قرار داد [۱۴]. در واقع هامیلتون نشان داد که این متریک ویژه یک نقطه ثابت جاذب برای شاره ریچی بهنجار است. هر چند این گام تا اثبات حدس هندسی‌سازی فاصله زیادی داشت و بررسی حالتی که انحنا ریچی منفی باشد به مراتب دشوارتر است، اما گواهی قوی برای کارآمد بودن ایده هامیلتون بود.

هامیلتون بر اساس مطالعاتش روی شاره ریچی برنامه‌ای برای حمله به حدس هندسی‌سازی ترستن طراحی کرد، که می‌توان آن را استفاده از شاره همراه با جراحی ریچی<sup>۱۰۴</sup> نامید. ایده هامیلتون در این برنامه را می‌توان به این شکل توضیح داد. هنگامی که تحول یک متریک اولیه توسط شاره ریچی بهنجار را دنبال می‌کنیم، معمولاً در زمان متناهی به تکینگی‌هایی می‌رسیم، که با نزدیک شدن (زمانی و مکانی) به آنها، انحنا به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. با این وجود ممکن است با تغییر توپولوژی خمینه ۳-بعدی، درست پیش از زمان رسیدن به تکینگی، بتوان شاره ریچی را ادامه داد. تصور اولیه ما اینچنین القاء می‌کند که شاره ریچی قسمت‌هایی که انحنا مثبت دارند را منقبض می‌کند و قسمت‌هایی که انحنا منفی دارند را منبسط می‌کند، بنابراین در امتداد شاره ریچی قطعاتی که هندسه کروی یا  $S^2 \times \mathbb{R}$  دارند، از بین می‌روند، در حالی که آنچه باقی می‌ماند یک تجزیه چاق -لاغر، آن گونه که در بخش قبل توضیح دادیم، خواهد داشت.

در سال ۲۰۰۳ گریگوری پرلمان طرحی از یک اثبات برای حدس هندسی‌سازی ترستن را ارائه کرد [۳۶-۳۸]. او نشان داد که شاره ریچی را می‌توان ورای نقاط تکینگی هم ادامه داد. دشواری بررسی صحت اثبات پرلمان برای حدس هندسی‌سازی در جایی بود که او از یکی از قضایایی که در مقاله [۳۸] اثبات کرده بود، به‌طور اساسی استفاده می‌کرد. این قضیه مهم، که در مقاله پرلمان با شماره ۷-۴ ظاهر می‌شود، بدون ارائه اثبات توسط پرلمان صورت‌بندی شده است. در حال حاضر اثبات‌های متعددی از این قضیه مهم و کلیدی ارائه شده است، که از جمله می‌توان به اثبات جان مورگان<sup>۱۰۵</sup> و گنگ تیان<sup>۱۰۶</sup> اشاره کرد. با گذشت چند سال، جزئیات اثبات پرلمان تکمیل گردید. اثبات کاملی از قضیه هندسی‌سازی ترستن، بر اساس طرح هامیلتون و اثبات پرلمان در کتاب مورگان و تیان ارائه شده است، که همه جزئیات لازم برای تکمیل اثبات را در خود دارد [۲۶].

## ۹. نظریه توپولوژیک میدان‌های کوانتومی

گروه بنیادی خمینه‌های ۳-بعدی، چنان‌که پیشتر اشاره کردیم، ابزار قدرتمندی برای تشخیص این خمینه‌ها از یکدیگر است. شاید تنها ضعف این ابزار، نآبلی بودن آن است. گروه‌های نآبلی معمولاً توسط نمایش<sup>۱۰۷</sup> آنها عرضه می‌شوند. برای گروه‌های نآبلی، تشخیص این‌که آیا دو نمایش، گروه یکسانی را معین می‌کنند یا خیر دشوار است. بنابراین در عمل، ساختن ناورداهای آبلی و قدرتمند در تشخیص خمینه‌ها از یکدیگر، همچنان سؤال مهمی در توپولوژی خمینه‌های ابعاد پایین محسوب می‌شود. در سال ۱۹۸۸، آندریاس فلور<sup>۱۰۸</sup> ناورداهایی را برای خمینه‌های ۳-بعدی ساخت [۷]. نظریه فلور<sup>۱۰۹</sup> به نوعی تعمیمی از نظریه مورس برای فضاها بی‌نهایت-بعدی محسوب می‌شدند که در همان سال در چند مورد توسط خود فلور به کار گرفته شده بودند [۸-۱۲]. فضایی که فلور برای ساختن مانستگی خود، موسوم به مانستگی شبه ذره (اینستانتون) فلور، با آن کار می‌کرد، فضای همه هم‌مستارها<sup>۱۱۰</sup> روی یک  $SU(2)$ -کلاف اصلی<sup>۱۱۱</sup> بر روی خمینه بسته داده شده  $M$  بود. روی این فضای هم‌مستارها، یک تابع قابل تعریف است که به تابع چرن-سایمونز موسوم است. نقاط بحرانی تابع چرن-سایمونز روی

<sup>104</sup>Ricci flow with surgery <sup>105</sup>John Morgan <sup>106</sup>Gang Tian <sup>107</sup>presentation <sup>108</sup>Andreas Floer <sup>109</sup>Floer theory

<sup>110</sup>connection <sup>111</sup>principal bundle

فضای همه هموستارها، دقیقاً هموستارهای تخت<sup>۱۱۲</sup> هستند، و خطوط شاره این تابعک شبه ذره‌ها (اینستانتون‌ها) هستند، یا همان هموستارهای پاد-خوددوگان که در خط حقیقی ضرب شده‌اند. با انجام نظریه مورس در این وضعیت، یک گروه مانستگی وابسته به خمینه ۳-بعدی  $M$  قابل تعریف است، که به آن مانستگی شبه ذره (اینستانتون) فلور گفته می‌شود. این مانستگی، تعمیمی از ناوردای کسون<sup>۱۱۳</sup> برای خمینه‌های ۳-بعدی محسوب می‌شود، چرا که شاخص اویلر متناظر با این نظریه مانستگی، همان ناوردای کسون است. مدت کوتاهی پس از آن که فلور مانستگی شبه ذره (اینستانتون) خود را معرفی کرد، سائیمون دونالدسون<sup>۱۱۴</sup> متوجه شد که یک هم‌لبگی ۴-بعدی بین دو خمینه ۳-بعدی بسته، به‌طور طبیعی یک هم‌ریختی بین مانستگی‌های شبه ذره (اینستانتون) وابسته به خمینه‌های ۳-بعدی القاء می‌کند. این اولین مثال از ساختاری بود که مدت کوتاهی بعد به نام نظریه توپولوژیک میدان‌های کوانتومی و یا به اختصار TQFT شناخته شد.

چند سال بعد از معرفی ناوردهای زایبرگ-ویتن<sup>۱۱۵</sup> توسط ادوارد ویتن<sup>۱۱۶</sup> روشن شد که به این ناوردها هم باید به‌عنوان ناوردهایی از جنس یک نظریه توپولوژیک میدان‌های کوانتومی از بعد  $3+1$  نگریت. در این راستا، مانستگی تک‌قطبی<sup>۱۱۷</sup> توسط پیتر کرونهایمر<sup>۱۱۸</sup> و توماس مژوکا<sup>۱۱۹</sup> معرفی شد. برای یک خمینه بسته  $M$  و یک ساختار چرخشی مختلط<sup>۱۲۰</sup>  $\mathfrak{g} \in \text{Spin}^c(M)$  به مانستگی فلور تک‌قطبی می‌توان به چشم مانستگی مورس وابسته به تابعک<sup>۱۲۱</sup> چرن-سائیمونز-دیراک<sup>۱۲۲</sup> روی فضای همه هموستارهایی که بر روی یک  $U(1)$ -کلاف اصلی (وابسته به ساختار چرخش مختلط  $\mathfrak{g}$ ) روی خمینه  $M$  قرار می‌گیرند، نگریت. به این ترتیب، مولدهای مجتمع زنجیری<sup>۱۲۳</sup> در این حالت، جواب‌های ناوردا تحت انتقال برای معادلات زایبرگ-ویتن (تک‌قطبی‌ها) روی خمینه ۴-بعدی  $M \times \mathbb{R}$  هستند. نگاشت دیفرانسیل<sup>۱۲۴</sup> مجتمع زنجیری هم جواب‌هایی از معادلات زایبرگ-ویتن روی  $M \times \mathbb{R}$  را می‌شمارند که در  $M \times \{+\infty\}$  و  $M \times \{-\infty\}$  به‌طور مجانبی به جواب‌هایی که تحت انتقال ناوردا هستند میل می‌کنند. در نظریه تک‌قطبی هم، وقتی که یک هم‌لبگی هموار بین دو خمینه بسته ۳-بعدی  $M$  و  $M'$  داشته باشیم، یک هم‌ریختی از مانستگی تک‌قطبی وابسته به  $M$  به مانستگی تک‌قطبی وابسته به  $M'$  به‌دست می‌آید.

دسته سوم از ناوردهای خمینه‌های بسته ۴-بعدی، یعنی ناوردهای اژوات-سابو<sup>۱۲۵</sup>، در سال ۲۰۰۱ در قالب یک نظریه مانستگی فلور برای خمینه‌های بسته ۳-بعدی توسط پیتر اژوات<sup>۱۲۶</sup> و زلتان سابو<sup>۱۲۷</sup> معرفی شدند [۳۱-۳۳]. در مورد مانستگی اژوات-سابو برای خمینه‌های ۳-بعدی در ادامه با تفصیل بیشتری صحبت خواهیم کرد. با توجه به قضیه‌ای که توسط کاتلایان<sup>۱۲۸</sup>، یی‌جین لی<sup>۱۲۹</sup> و کلیفورد هنری تابس<sup>۱۳۰</sup> در سال ۲۰۱۱ به اثبات رسید، مانستگی اژوات-سابو و مانستگی تک‌قطبی فلور، که نحوه ساخت آن‌ها تفاوت‌های زیادی با هم دارد، با هم معادل هستند. این قضیه بسیار عمیق است و اثبات آن در ۵ مقاله طولانی، برپایه کارهای قبلی مهمی از تابس بنا شده است [۲۰-۲۴].

قضیه ۱.۹ (کاتلایان-لی-تابس). نظریات مانستگی تک‌قطبی فلور و اژوات-سابو با هم معادل هستند.

معادل بودن این دو نظریه با مانستگی شبه ذره (اینستانتون) فلور هنوز اثبات نشده است. با این وجود، تلقی قالب آن است که همه چنین نظریه‌هایی از یک سرچشمه می‌جوشند و به نوعی با هم معادل هستند. در این بخش نظریه اژوات-سابو، یا همان مانستگی هیگارد-فلور را با تفصیل بیشتری معرفی خواهیم کرد.

<sup>112</sup>flat connection <sup>113</sup>Casson invariant <sup>114</sup>Simon Donaldson <sup>115</sup>Seiberg-Witten invariant <sup>116</sup>Edward Witten  
<sup>117</sup>monopole homology <sup>118</sup>Peter Kronheimer <sup>119</sup>Tomasz Mrowka <sup>120</sup>complex spin structure <sup>121</sup>functional  
<sup>122</sup>Chern-Simons-Dirac <sup>123</sup>chain complex <sup>124</sup>differential map <sup>125</sup>Ozsváth-Szabó invariant <sup>126</sup>Peter Ozsváth <sup>127</sup>Zoltán Szabó <sup>128</sup>Galatay Kutluhan <sup>129</sup>Yi-Jen Lee <sup>130</sup>Clifford Henry Taubes

فرض کنیم  $M$  یک خمینه بسته و ۳-بعدی باشد. میدان‌های برداری  $\zeta_1$  و  $\zeta_2$  روی  $M$  را که همه‌جا ناصفر هستند، مانسته<sup>۱۳۱</sup> گوئیم، هر گاه خارج از یک گوی ۳-بعدی در  $M$  با هم یک‌نهاد باشند. به این ترتیب، میدان‌های برداری همه‌جا ناصفر روی  $M$  به رده‌های مانستگی تقسیم می‌شوند. به هر چنین رده‌ای یک ساختار  $\text{Spin}^c$  (یا ساختار چرخش مختلط) روی  $M$  گفته می‌شود. فضای همه ساختارهای  $\text{Spin}^c$  روی خمینه  $M$  که آن را با  $\text{Spin}^c(M)$  نشان می‌دهیم، یک فضای آفین روی گروه دوّم همانستگی<sup>۱۳۲</sup> خمینه  $M$  یعنی  $H^1(M, \mathbb{Z})$  است. در نظریهٔ اثرات-سابو، به هر خمینه بسته ۳-بعدی مانند  $M$  و هر ساختار چرخش مختلط  $\mathfrak{s} \in \text{Spin}^c(M)$  روی  $M$  چهار گروه

$$\widehat{\text{HF}}(M, \mathfrak{s}), \text{HF}^+(M, \mathfrak{s}), \text{HF}^-(M, \mathfrak{s}), \text{HF}^\infty(M, \mathfrak{s})$$

نسبت داده می‌شود [۳۲]. این چهار گروه مدول‌هایی روی حلقه  $\mathbb{Z}[u]$  هستند. عمل  $u$  روی  $\widehat{\text{HF}}(M, \mathfrak{s})$  بدیهی است، و روی  $\text{HF}^+(M, \mathfrak{s})$  پوچ<sup>۱۳۳</sup> توان است، یعنی برای هر عضو  $x \in \text{HF}^+(M, \mathfrak{s})$  توان به اندازهٔ کافی بزرگ  $n_x \in \mathbb{Z}^+$  وجود دارد به طوری که  $u^{n_x} \cdot x = 0$ . در ضمن، به جز برای متناهی ساختار  $\mathfrak{s} \in \text{Spin}^c(M)$  گروه‌های

$$\widehat{\text{HF}}(M, \mathfrak{s}), \text{HF}^+(M, \mathfrak{s}), \text{HF}^-(M, \mathfrak{s}), \text{HF}^\infty(M, \mathfrak{s})$$

همگی بدیهی هستند. دنباله‌های دقیق و بلند زیر این گروه‌ها را به هم مرتبط می‌کند:

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow \text{HF}^-(M, \mathfrak{s}) \xrightarrow{z_{\mathfrak{s}}} \text{HF}^\infty(M, \mathfrak{s}) \xrightarrow{\pi_{\mathfrak{s}}} \text{HF}^+(M, \mathfrak{s}) \rightarrow \text{HF}^-(M, \mathfrak{s}) \rightarrow \dots \\ \dots &\rightarrow \widehat{\text{HF}}(M, \mathfrak{s}) \rightarrow \text{HF}^+(M, \mathfrak{s}) \xrightarrow{u} \text{HF}^+(M, \mathfrak{s}) \rightarrow \widehat{\text{HF}}(M, \mathfrak{s}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

وقتی خصوصیتی را در مورد هر چهار گروه

$$\widehat{\text{HF}}(M, \mathfrak{s}), \text{HF}^+(M, \mathfrak{s}), \text{HF}^-(M, \mathfrak{s}), \text{HF}^\infty(M, \mathfrak{s})$$

بخوایم بیان کنیم، از نماد  $\text{HF}^\bullet(M, \mathfrak{s})$  استفاده خواهیم کرد. اگر  $W$  یک هم‌لبگی هموار و جهت‌دار<sup>۱۳۴</sup> بین خمینه‌های بسته ۳-بعدی  $M$  و  $M'$  باشد، یعنی

$$\partial W = -M \amalg M',$$

آنگاه وابسته به هر ساختار  $\mathfrak{s} \in \text{Spin}^c(W)$  نگاشت‌های

$$\Phi_{W, \mathfrak{s}}^\bullet : \text{HF}^\bullet(M, \mathfrak{s}|_M) \longrightarrow \text{HF}^\bullet(M', \mathfrak{s}|_{M'})$$

به دست می‌آید [۳۳]. این نگاشت‌ها به گونه‌ای تعریف می‌شوند که تمام مربع‌ها در نمودار نردبانی زیر جابه‌جایی هستند:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & \text{HF}^-(M, \mathfrak{s}|_M) & \xrightarrow{z_{\mathfrak{s}}(M)} & \text{HF}^\infty(M, \mathfrak{s}|_M) & \xrightarrow{\pi_{\mathfrak{s}}(M)} & \text{HF}^+(M, \mathfrak{s}|_M) \rightarrow \dots \\ & & \downarrow \Phi_{W, \mathfrak{s}}^- & & \downarrow \Phi_{W, \mathfrak{s}}^\infty & & \downarrow \Phi_{W, \mathfrak{s}}^+ \\ \dots & \rightarrow & \text{HF}^-(M', \mathfrak{s}|_{M'}) & \xrightarrow{z_{\mathfrak{s}}(M')} & \text{HF}^\infty(M', \mathfrak{s}|_{M'}) & \xrightarrow{\pi_{\mathfrak{s}}(M')} & \text{HF}^+(M', \mathfrak{s}|_{M'}) \rightarrow \dots \end{array}$$

به این ترتیب، ناوردهای اثرات-سابو به هر خمینه بسته ۳-بعدی  $M$  گروه‌های

$$\text{HF}^\bullet(M) = \bigoplus_{\mathfrak{s} \in \text{Spin}^c(M)} \text{HF}^\bullet(M, \mathfrak{s})$$

<sup>131</sup>homologous    <sup>132</sup>cohomology    <sup>133</sup>nilpotent    <sup>134</sup>oriented

را نسبت می‌دهند و به یک هم‌لبگی بین دو خمینه ۳-بعدی هم یک هم‌ریختی بین گروه‌های وابسته به دو خمینه را نظیر می‌کنند. هم‌ریختی وابسته به ترکیب دو هم‌لبگی، از ترکیب هم‌ریختی‌های وابسته به آنها حاصل می‌شود. با برآورده شدن برخی از خصوصیات که از ذکر آنها صرف نظر می‌کنیم، چنین بسته‌ای از ناورداها را یک نظریهٔ توپولوژیک میدان‌های کوانتومی می‌نامند. در یک نظریهٔ توپولوژیک میدان‌های کوانتومی، در یک سو رسته ۱۳۵ خمینه‌های هموار از بعد  $n$  قرار دارند که ریخت‌های بین آنها هم‌لبگی‌های  $(n+1)$ -بعدی هستند، و در سوی دیگر رسته مدول‌ها (روی یک حلقه که در اینجا  $\mathbb{Z}[u]$  است) قرار دارند که ریخت‌های بین آنها هم‌ریختی‌های مدول‌هاست. در چنین وضعیتی نظریهٔ توپولوژیک میدان‌های کوانتومی از بعد  $n+1$  یک تابع‌گون ۱۳۶ از رستهٔ خمینه‌ها به رستهٔ مدول‌هاست. بنابراین ناورداهای اژوات-سابو در واقع ۴ تابع‌گون از رستهٔ خمینه‌های ۳-بعدی و هم‌لبگی‌های بین آنها به رستهٔ  $\mathbb{Z}[u]$ -مدول‌ها هستند.

تکنولوژی نسبتاً مناسبی برای محاسبهٔ بسیاری از گروه‌های مانستگی اژوات-سابو به وجود آمده است. بالاخص، برای یک خمینهٔ بسته و ۳-بعدی  $M$  محاسبهٔ  $\widehat{HF}(M, \mathfrak{s})$  ساده‌تر از محاسبهٔ سایر گروه‌هاست. از جمله سوچاریت سارکار ۱۳۷ و جیاجون ونگ ۱۳۸ نشان دادند که محاسبهٔ  $\widehat{HF}(M, \mathfrak{s})$  را می‌توان با یک الگوریتم ترکیبیاتی انجام داد [۴۷]. در واقع، برنامه‌های رایانه‌ای وجود دارند که با دریافت یک نمودار هیگارد برای خمینهٔ  $M$ ، گروه  $\widehat{HF}(M, \mathfrak{s})$  را محاسبه می‌کنند. البته باید توجه داشت که این الگوریتم‌ها معمولاً بسیار کند هستند و استفادهٔ عملی از آنها، جز برای محاسبهٔ گروه‌های اژوات-سابوی خمینه‌های ساده، چندان عملی نیست. با این وجود، قضیهٔ سارکار-ونگ، به‌عنوان یکی از چند ابزار محاسبه، اهمیت نظری زیادی دارد. دلیل این اهمیت آن است که این قضیه نشان می‌دهد محاسبات مربوط به ناورداها را می‌توان به صورت روشمندی انجام داد.

برای هر فضای عدسی‌وار  $L(p, q)$  و هر ساختار  $\mathfrak{s} \in \text{Spin}^c(L(p, q)) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  گروه مانستگی  $\widehat{HF}(L(p, q), \mathfrak{s})$  یک‌ریخت با  $\mathbb{Z}$  است. و از جمله برای  $S^3$  که تنها یک ساختار چرخشی مختلط دارد، گروه  $\widehat{HF}(S^3)$  همان  $\mathbb{Z}$  است. در واقع، در این حالت همهٔ گروه‌های هیگارد فلور بدیهی هستند:

$$\begin{aligned} \widehat{HF}(L(p, q), \mathfrak{s}) &= \mathbb{Z}, & HF^+(L(p, q), \mathfrak{s}) &= \mathbb{Z}[u^{-1}], \\ HF^-(L(p, q), \mathfrak{s}) &= \mathbb{Z}[u], & HF^\infty(L(p, q), \mathfrak{s}) &= \mathbb{Z}[u, u^{-1}], \quad \forall \mathfrak{s} \in \text{Spin}^c(L(p, q)). \end{aligned}$$

گروه‌های مانستگی اژوات-سابو برای کرهٔ پوانکاره، به جز اختلاف در نحوهٔ مدرج شدن، با گروه‌های مانستگی اژوات-سابو برای کرهٔ استاندارد یکی هستند. از خمینه‌های دیگری که محاسبهٔ گروه‌های مانستگی اژوات-سابو برای آنها سراسر است، خمینهٔ  $S = S^1 \times S^2$  است. به‌جز یک ساختار چرخشی مختلط  $\mathfrak{s}$  برای سایر ساختارهای  $\{\mathfrak{s}_\bullet\} \in \text{Spin}^c(S) \setminus \{\mathfrak{s}_\bullet\}$  داریم  $HF^\bullet(S, \mathfrak{s}) = 0$  در حالی که

$$\begin{aligned} \widehat{HF}(S, \mathfrak{s}_\bullet) &= \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & HF^+(S, \mathfrak{s}_\bullet) &= \mathbb{Z}[u^{-1}] \oplus \mathbb{Z}[u^{-1}], \\ HF^-(L(p, q), \mathfrak{s}) &= \mathbb{Z}[u] \oplus \mathbb{Z}[u], & HF^\infty(L(p, q), \mathfrak{s}) &= \mathbb{Z}[u, u^{-1}] \oplus \mathbb{Z}[u, u^{-1}]. \end{aligned}$$

برای خمینه‌هایی که پیچیدگی بیشتری دارند، محاسبهٔ این گروه‌ها معمولاً به ابزارهایی نیاز دارد که پرداختن به آنها از حوصلهٔ این نوشتار خارج است. اما در هر صورت، قضیهٔ سارکار و ونگ به ما این امکان را می‌دهد که برای هر خمینهٔ بستهٔ ۳-بعدی مانند  $M$  ناوردای  $\widehat{HF}(M)$  با استفاده از رایانه محاسبه کنیم. در این شرایط، مقایسهٔ  $\widehat{HF}(M_1)$  و  $\widehat{HF}(M_2)$  برای دو خمینهٔ  $M_1$  و  $M_2$  هم توسط رایانه قابل انجام است. این محاسبه‌پذیری و مقایسه‌پذیری، فوراً این سؤال را مطرح می‌سازد که ناوردای  $\widehat{HF}$  تا چه اندازه در تشخیص خمینه‌های بستهٔ ۳-بعدی از یکدیگر کارا است؟ بالاخص، می‌توان سؤالی که پوانکاره در مورد



گروه بنیادی پرسید را، در مورد مانستگی  $\widehat{HF}$  هم مطرح کرد: آیا این ناوردا توانایی تشخیص  $S^3$  از خمینه‌های بسته ۳-بعدی دیگر را دارد؟ پاسخ به این سؤال منفی است، چرا که برای کره پوانکاره، که آن را با  $P$  نشان می‌دهیم هم، داریم

$$\widehat{HF}(P) = \widehat{HF}(S^3) = \mathbb{Z}.$$

با این وجود، این تنها مثال شناخته‌شده از یک خمینه اول نابدیهی است که ناوردای اژوات-سابوی آن با ناوردای اژوات-سابوی کره استاندارد یکسان است. در واقع، حدس زیر از روزهای آغازین نظریه اژوات-سابو مطرح بوده است، و اثبات آن فعلاً دور از دسترس به نظر می‌رسد:

حدس ۲.۹ (اژوات-سابو). فرض کنیم که  $M$  یک خمینه بسته و اول ۳-بعدی باشد و فرض کنیم

$$\widehat{HF}(M) = \widehat{HF}(S^3).$$

در این صورت،  $M$  با یکی از  $S^3$  و یا  $P$  همسان‌ریخت است.

در حدس اژوات-سابو کافی است به حالتی که خمینه  $M$  یک کره-مانسته صحیح است توجه کنیم، چرا که مانستگی صحیح خمینه  $M$  به عنوان درجه‌بندی (نسبی) در مانستگی اژوات-سابو گنجانده شده است. بهترین نتیجه‌ای که در راستای حدس اژوات-سابو می‌دانیم، قضیه زیر از نویسنده است [۶].

قضیه ۳.۹. فرض کنیم که  $M$  یک خمینه بسته و اول ۳-بعدی باشد و فرض کنیم

$$\widehat{HF}(M) = \widehat{HF}(S^3).$$

در این صورت، یا  $M$  با یکی از  $S^3$  و  $P$  همسان‌ریخت است، و یا ساختاری هذلولوی روی  $M$  وجود دارد.

اثبات قضیه یاد شده، علاوه بر استفاده از ابزارهای نظریه اژوات-سابو، و به ویژه دو مقاله پیشتر [۵] و [۴] از نویسنده، استفاده‌ای بسیار جدی از قضیه هندسی‌سازی می‌کند. در این اثبات، با استفاده از قضیه اصلی [۵] نشان داده می‌شود که وجود چنبره‌های تراکم ناپذیر، باعث می‌شود که مانستگی اژوات-سابو نابدیهی باشد. بنابراین کره مانسته‌های اول با مانستگی اژوات-سابوی بدیهی، یا زایفرت هستند و یا هذلولوی. از محاسبه مقاله [۴] هم نتیجه می‌شود که کره پوانکاره تنها کره مانسته اول زایفرت است که مانستگی اژوات-سابوی آن بدیهی است.

پیش از پایان این مقاله، به یکی از کاربردهای جالب ناوردهایی که از نظریه‌های توپولوژیک میدان‌های کوانتومی حاصل شدند، اشاره می‌کنیم. با استفاده از ناوردهای جدید، و به ویژه ناوردهای زایبرگ-ویتن، می‌توان در مورد رده‌های مانستگی  $s \in H_2(M, \mathbb{Z})$  به این سؤال جواب داد که کمترین گونای ممکن برای یک زیرخمینه ۲-بعدی و جهت‌پذیر  $S$  که رده مانستگی  $s$  را نمایندگی کند چند است؟ حالت خاصی از این سؤال را می‌توان در مورد خمینه  $\mathbb{C}P^2$  پرسید. در این حالت می‌دانیم  $H_2(\mathbb{C}P^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$  و به رده مانستگی که توسط رویه  $S$  نمایندگی می‌شود، درجه  $S$  گفته می‌شود. بنابراین، برای هر عدد صحیح  $d \in \mathbb{Z}^+$ ، این سؤال مطرح می‌شود که حداقل گونای رویه‌ای از درجه  $d$  چند است؟ اگر  $P \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$  یک چندجمله‌ای همگن از درجه  $d$  باشد، مجموعه صفرهای این چندجمله‌ای که آن را با

$$Z(P) = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{C}P^2 \mid P(x_0, x_1, x_2) = 0\} \subset \mathbb{C}P^2$$



نشان می‌دهیم معمولاً زیرخمینه‌ای هموار از  $\mathbb{C}P^2$  است. چنانچه برای چندجمله‌ای  $P$  زیرفضای  $Z(P)$  زیرخمینه‌ای هموار از  $\mathbb{C}P^2$  باشد، گونای آن را با استفاده از روش‌های ساده‌ای در هندسهٔ جبری می‌توان محاسبه کرد و در این صورت داریم:

$$g(Z(P)) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

قضیه‌ای که کرونهایمر و مروکا در سال ۱۹۹۴ و مستقلاً مورگان، سابو و تابس در سال ۱۹۹۶ به اثبات رساندند، بیان می‌کند که این کمترین گونایی است که می‌توان به‌دست آورد [۱۹، ۲۷]. این قضیه، در واقع حدس رنهٔ توم<sup>۱۳۹</sup> را به اثبات می‌رساند.

**قضیه ۴.۹** (حدس توم). گونای یک زیرخمینه هموار جهت‌پذیر  $S \subset \mathbb{C}P^2$  که نمایندهٔ ردهٔ مانستگی  $d \in \mathbb{Z} = H_2(\mathbb{C}P^2, \mathbb{Z})$  باشد، حداقل  $(d-1)(d-2)/2$  است.

حدس توم را می‌توان به میزان قابل توجهی تعمیم داد. خمینهٔ  $\mathbb{C}P^2$  یک خمینهٔ همتافته، و در واقع از اولین مثال‌های استاندارد برای خمینه‌های بستهٔ همتافته است. زیرخمینه‌های مختلط از خمینه‌های همتافته مختلط، خود همتافته هستند، یعنی تحدید صورت همتافتهٔ  $\mathbb{C}P^2$  به آنها هم یک‌صورت همتافته است. بنابراین رویه‌های به شکل  $Z(P)$  که در بالا به آنها اشاره کردیم، زیرخمینه‌هایی همتافته از  $\mathbb{C}P^2$  هستند. حدس همتافتهٔ توم، که نهایتاً با استفاده از صورت تعمیم‌یافتهٔ نابرابری الحاق توسط اژوات و سابو به اثبات رسید را می‌توان به این شکل صورت‌بندی کرد [۳۰]:

**قضیه ۵.۹** (حدس همتافتهٔ توم- اژوات- سابو). فرض کنیم که  $(M, \omega)$  یک خمینهٔ بسته، هموار و همتافتهٔ ۴-بعدی باشد و فرض کنیم  $S \subset M$  زیرخمینه‌ای بسته، هموار، همبند و همتافته از  $M$  باشد. اگر ردهٔ مانستگی زیرخمینه بسته، هموار، همبند و جهت‌پذیر  $S'$  همان ردهٔ مانستگی وابسته به  $S$  باشد، آنگاه نابرابری  $g(S') \geq g(S)$  بین گونا‌های  $S$  و  $S'$  برقرار است.

## مراجع

- [1] M. Dehn, über die Topologie des dreidimensionalen Raumes. *Math. Ann.*, **69** no. 1 (1910) 137–168.
- [2] E. Eftekhary, Knot theory and modern mathematical tools (in farsi), preprint, available at <https://www.researchgate.net/profile/Eaman-Eftekhary/research>.
- [3] E. Eftekhary, Knot theory, from past to present (in farsi), preprint, available at <https://www.researchgate.net/profile/Eaman-Eftekhary/research>.
- [4] E. Eftekhary, Seifert fibered homology spheres with trivial Heegaard Floer homology, preprint, available at *arXiv:0909.3975 [math.GT]*.
- [5] E. Eftekhary, Floer homology and splicing knot complements, *Algebr. Geom. Topol.*, **15** no. 6 (2015) 3155–3213.
- [6] E. Eftekhary, Bordered Floer homology and existence of incompressible tori in homology spheres, *Compos. Math.*, **154** no. 6 (2018) 1222–1268.
- [7] A. Floer, An instanton-invariant for 3-manifolds, *Comm. Math. Phys.*, **118** no. 2 (1988) 215–240.
- [8] A. Floer, Morse theory for Lagrangian intersections, *J. Differential Geom.*, **28** no. 3 (1988) 513–547.

<sup>139</sup>René Thom

- [9] A. Floer, A relative Morse index for the symplectic action, *Comm. Pure Appl. Math.*, **41** no. 4 (1988) 393–407.
- [10] A. Floer, The unregularized gradient flow of the symplectic action, *Comm. Pure Appl. Math.*, **41** no. 6 (1988) 775–813.
- [11] A. Floer, Symplectic fixed points and holomorphic spheres, *Comm. Math. Phys.*, **120** no. 4 (1989) 575–611.
- [12] A. Floer, Witten’s complex and infinite-dimensional Morse theory, *J. Differential Geom.*, **30** no. 1 (1989) 207–221.
- [13] A. Haefliger and M. W. Hirsch, On the existence and classification of differentiable embeddings, *Topology*, **2** (1963) 129–135.
- [14] R. S. Hamilton, Three-manifolds with positive Ricci curvature, *J. Differential Geom.*, **17** no. 2 (1982) 255–306.
- [15] W. Jaco, and P. B. Shalen, A new decomposition theorem for irreducible sufficiently-large 3-manifolds, *Algebraic and geometric topology (Proc. Sympos. Pure Math., Stanford Univ., Stanford, Calif., 1976)*, Part 2, 71–84, Proc. Sympos. Pure Math., XXXII, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1978.
- [16] W. H. Jaco and P. B. Shalen, Seifert fibered spaces in 3-manifolds, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **21** no. 220 (1979) 192 pp.
- [17] K. Johannson, *Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries*, Lecture Notes in Mathematics, **761**, Springer, Berlin, 1979.
- [18] H. Kneser, Geschlossene fl achen in dreidimensionalen mannigfaltigkeiten, *Jber. Deutsch. Math. Verein.*, **38** (1929) 248–260.
- [19] P. Kronheimer and T. Mrowka, The genus of embedded surfaces in the projective plane, *Math. Res. Lett.*, **1** no. 6 (1994) 797–808.
- [20] C. Kutluhan, Y.-J. Lee and C. H. Taubes,  $HF = HM$ , I: Heegaard Floer homology and Seiberg-Witten Floer homology, *Geom. Topol.*, **24** no. 6 (2020) 2829–2854.
- [21] C. Kutluhan, Y.-J. Lee and C. H. Taubes,  $HF = HM$ , II: Reeb orbits and holomorphic curves for the ech/Heegaard Floer correspondence, *Geom. Topol.*, **24** no. 6 (2020) 2855–3012.
- [22] C. Kutluhan, Y.-J. Lee and C. H. Taubes,  $HF = HM$ , III: holomorphic curves and the differential for the ech/Heegaard Floer correspondence, *Geom. Topol.*, **24** no. 6 (2020) 3013–3218.
- [23] C. Kutluhan, Y.-J. Lee and C. H. Taubes,  $HF=HM$ , IV: The Sieberg-Witten Floer homology and ech correspondence, *Geom. Topol.*, **24** no. 7 (2020) 3219–3469.
- [24] C. Kutluhan, Y.-J. Lee and C. H. Taubes,  $HF=HM$ , V: Seiberg-Witten Floer homology and handle additions, *Geom. Topol.*, **24** no. 7 (2020) 3471–3748.
- [25] E. E. Moise, Affine structures in 3-manifolds. V. The triangulation theorem and Hauptvermutung, *Ann. of Math. (2)*, **56** (1952) 96–114.
- [26] J. Morgan and G. Tian, *Ricci flow and the Poincaré conjecture*, Clay Mathematics Monographs, **3**, American Mathematical Society, Providence, RI; Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA, 2007

- [27] J. W. Morgan, Z. Szabó and C. H. Taubes, A product formula for the Seiberg-Witten invariants and the generalized Thom conjecture, *J. Differential Geom.*, **44** no. 4 (1996) 706–788.
- [28] G. D. Mostow, Quasi-conformal mappings in  $n$ -space and the rigidity of hyperbolic space forms, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, no. 34 (1968) 53–104.
- [29] G. D. Mostow, *Strong rigidity of locally symmetric spaces. Annals of Mathematics Studies*, no. 78, Princeton University Press, Princeton, NJ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1973.
- [30] P. Ozsváth and Z. Szabó, The symplectic Thom conjecture, *Ann. of Math. (2)*, **151** no. 1 (2000) 93–124.
- [31] P. Ozsváth and Z. Szabó, Holomorphic disks and three-manifold invariants: properties and applications, *Ann. of Math. (2)*, **159** no. 3 (2004) 1159–1245.
- [32] P. Ozsváth and Z. Szabó, Holomorphic disks and topological invariants for closed three-manifolds, *Ann. of Math. (2)*, **159** no. 3 (2004) 1027–1158.
- [33] P. Ozsváth and Z. Szabó, Holomorphic triangles and invariants for smooth four-manifolds, *Adv. Math.*, **202** no. 2 (2006) 326–400.
- [34] C. D. Papakyriakopoulos, On Dehn’s lemma and the asphericity of knots, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **43** (1957) 169–172.
- [35] C. D. Papakyriakopoulos, On Dehn’s lemma and the asphericity of knots, *Ann. of Math. (2)*, **66** (1957) 1–26.
- [36] G. Perelman, The entropy formula for the ricci flow and its geometric applications, (2002), *arXiv:math.DG/0211159*.
- [37] G. Perelman, Finite extinction time for the solutions to the ricci flow on certain three-manifolds, (2003), *arXiv:math.DG/0307245*.
- [38] G. Perelman, Ricci flow with surgery on three-manifolds, (2003), *arXiv:math.DG/0303109*.
- [39] H. Poincaré, Analysis situs, *J. École Polytech.*, **2** (1895) 1–123.
- [40] H. Poincaré, Complément à l’analysis situs, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **13** (1899) 285–343.
- [41] H. Poincaré, Second complément à l’analysis situs, *Proc. London Math. Soc.*, **32** (1900) 277–308.
- [42] H. Poincaré, Sur certaines surfaces algébriques: troisième complément à l’analysis situs, *Bull. Soc. Math. France*, **30** (1902) 49–70.
- [43] H. Poincaré, Sur les cycles des surfaces algébriques: quatrième complément à l’analysis situs, *J. Math. Pur. Appl.*, **8** (1902) 169–214.
- [44] H. Poincaré, Cinquième complément à l’analysis situs, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **18** (1904) 45–110.
- [45] H. Poincaré, *Papers on topology*, **37** of *History of Mathematics*, American Mathematical Society, Providence, RI; London Mathematical Society, London, 2010, it Analysis situs and its five supplements, Translated and with an introduction by John Stillwell.
- [46] G. Prasad, Strong rigidity of  $\mathbb{Q}$ -rank 1 lattices, *Invent. Math.*, **21** (1973) 255–286.
- [47] S. Sarkar and J. Wang, An algorithm for computing some Heegaard Floer homologies, *Ann. of Math. (2)*, **171** no. 2 (2010) 1213–1236.
- [48] H. Seifert, Topologie Dreidimensionaler Gefaserner Räume, *Acta Math.*, **60** no. 1 (1933) 147–238.
- [49] J. R. Stallings, J. grushko’s theorem ii, kneser’s conjecture, *Notices Amer. Math. Soc.*, **6** (1959) 531–532.

- [50] J. R. Stallings, *Some topological proofs and extensions of Grusko's theorem*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1959.
- [51] W. P. Thurston, *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*, **35** of *Princeton Mathematical Series*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997.
- [52] C. T. C. Wall, All 3-manifolds imbed in 5-space, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **71** (1965) 564-567.
- [53] H. Whitney, Differentiable manifolds, *Ann. of Math. (2)*, **37** no. 3 (1936) 645-680.

### ایمان افتخاری

پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، میدان شهید باهنر، پژوهشکده ریاضیات، تهران، ایران  
 eaman@ipm.ir

ایمان افتخاری متولد مهرماه ۱۳۵۸ در شهر گلپایگان است. وی در سال ۱۳۷۹ از دوره کارشناسی ریاضی دانشگاه صنعتی شریف فارغ‌التحصیل شد و در سال ۱۳۸۳ دکتری خود را در توپولوژی ابعاد پایین از دانشگاه پرینستون آمریکا دریافت کرد. از سال ۱۳۸۶ تاکنون، او عضو هیئت علمی پژوهشکده ریاضیات پژوهشگاه دانش‌های بنیادی است.

