



Computational Intelligence in Electrical Engineering
Vol. 13, No. 4, 2023
Research Paper

Design of fuzzy TS controller for simultaneous stabilization of nonlinear systems

Navid Behmanesh Fard ¹, Peyman Kohansedgh ², Alireza Khayatian ², Mohammad Hassan Asemani ²

¹ Faculty member, Department of Electrical Engineering, Technical and Vocational University (TVU), Tehran, Iran.

² Ph.D. graduate, School of Electrical and Computer Engineering, Shiraz University, Shiraz, Iran

Abstract:

In this paper, the problem of simultaneous stabilization of a collection of nonlinear systems is proposed by using the Takagi-Sugeno (TS) fuzzy modeling and synthesis approach. In practice, due to the uncertainty in the system model, failure modes, or different operating points, we often encounter the problem of simultaneous stabilization. The TS fuzzy model has been considered for the controller design of complex nonlinear systems as it provides a simple and effective concept. This problem refers to the stabilization of some nonlinear systems by utilizing a single nonlinear controller. Both state feedback and output feedback controllers are designed based on the PDC concept and by solving some linear matrix inequalities (LMIs). Moreover, to reduce the conservatisms related to using the common Lyapunov function and restrictive equality conditions in the design method, Finsler's lemma has been employed. Finally, three numerical examples are provided to show that the proposed controllers stabilize well-considered nonlinear systems.

Keywords: TS fuzzy system, Simultaneous stabilization, Output feedback, Finsler's Lemma, Nonlinear control.



This is an open access article under the CC BY-NC-ND/4.0/ License (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).



<https://doi.org/10.22108/isee.2021.126312.1435>

مقاله پژوهشی

طراحی کنترل کننده TS فازی برای پایداری همزمان سیستم‌های غیرخطی

نوید بهمنش فرد^۱، پیمان کهن صدق^۲، علیرضا خیاطیان^۳، محمد حسن آسمانی^۴

۱- مربی، گروه مهندسی برق، دانشگاه فنی و حرفه‌ای، تهران، ایران

nbehmanesh@tvu.ac.ir

۲- فارغ التحصیل دکتری، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران

kohansedgh.peyman@pidec.com

۳- استاد، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران

khayatian@shirazu.ac.ir

۴- دانشیار، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران

asemani@shirazu.ac.ir

چکیده در این مقاله، مسئله پایداری همزمان مجموعه‌ای از سیستم‌های غیرخطی با استفاده از روش مدل‌سازی و طراحی کنترل کننده فازی Takagi-Sugeno (TS) ارائه شده است. در عمل، به دلیل وجود عدم قطعیت در مدل سیستم و حالت‌های خرابی یا نقاط کاری مختلف، غالباً مسئله پایداری همزمان به وجود می‌آید. به دلیل ارائه مفهومی ساده و مؤثر، به مدل فازی TS برای طراحی کنترل کننده سیستم‌های غیرخطی پیچیده، توجه شده و پایداری سیستم‌های غیرخطی با استفاده از تنها یک کنترل کننده غیرخطی فازی TS بررسی شده است. دو نوع کنترل کننده بازخورد حالت و بازخورد خروجی براساس مفهوم PDC (جبران‌سازی توزیع شده موازی) و با حل تعدادی نامساوی‌های ماتریسی خطی (LMI) طراحی شده‌اند. علاوه بر این، برای کاهش محافظه‌کاری‌های مربوط به استفاده از تابع لیاپانوف مشترک از قضیه فینسلر استفاده شده است. در پایان، سه مثال عددی برای نشان دادن اینکه کنترل کننده‌های پیشنهادی به خوبی سیستم‌های غیرخطی در نظر گرفته شده را پایدار می‌کنند، ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: سیستم فازی TS، پایداری همزمان، بازخورد خروجی، قضیه فینسلر، کنترل غیرخطی.

۱- مقدمه

اگرچه رویکردهای دیگری مانند الگوریتم ژنتیک و شبکه‌های عصبی در بسیاری از موارد، مانند منطق فازی عمل می‌کنند، منطق فازی این مزیت را دارد که راه حل مسئله را می‌توان به گونه‌ای ارائه و پیاده‌سازی کرد که اپراتورهای انسانی آن را درک کرده‌اند. این خصوصیت باعث می‌شود مکانیزه کردن کارهایی که قبلاً انسان با موفقیت انجام داده است، آسان‌تر شود. در [1] با استفاده از منطق فازی از یک کنترل کننده فازی برای کنترل بار - فرکانس در یک سیستم قدرت تأخیردار - غیرخطی استفاده شده است. کنترل کننده طراحی شده دارای ساختاری غیرخطی بوده و از تابع لیاپانوف - کراسوسکی^۱ برای بررسی پایداری حلقه بسته استفاده شده است. در [2] از یک کنترل کننده فازی با بهینه‌سازی پارامترهای توابع

منطق فازی به‌طور گسترده در سامانه‌های کنترلی استفاده می‌شود. اصطلاح «فازی» یا مبهم به این واقعیت اشاره دارد که منطق حاکم بر سامانه می‌تواند با مفاهیمی برخورد کند که نمی‌توانند به‌عنوان «درست» یا «نادرست» بیان شوند؛ بلکه به‌عنوان «تا حدی درست» بیان می‌شوند.

^۱ تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۹/۰۹/۱۵

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۸/۱۷

نام نویسنده مسئول: نوید بهمنش فرد

نشانی نویسنده مسئول: ایران - تهران - دانشگاه فنی و حرفه‌ای

- گروه مهندسی برق

عضویت^۲ گوسی پایگاه قواعد در سیستم فازی، به‌منظور کنترل دو سیستم غیرخطی استفاده شده است.

پایدارسازی هم‌زمان، مسئله تعیین یک کنترل‌کننده واحد است که به‌طور هم‌زمان یک مجموعه محدود از سیستم‌ها را پایدار می‌کند. در عمل، به دلیل عدم قطعیت سیستم، تغییر در سیستم یا سیستم‌ها با حالت‌های عملکرد مختلف، غالباً با مسئله پایدارسازی هم‌زمان مواجه می‌شویم. این مسئله، زیرمجموعه‌ای از کنترل مقاوم است و یک مسئله مرتبط نزدیک با آن، پایدارسازی مقاوم سیستم با عدم قطعیت چندوجهی است. راه‌حل‌های پایدارسازی هم‌زمان به‌راحتی به عدم قطعیت‌های چندوجهی گسترش داده می‌شوند و برعکس.

از زمان آغاز ارائه مقاله [3]، پایدارسازی هم‌زمان مورد توجه زیادی قرار گرفته است. در [4]، پیچیدگی پایدارسازی هم‌زمان مورد بحث قرار گرفته و ثابت شده است مسئله پایدارسازی هم‌زمان سه سیستم خطی از نظر منطقی غیرقابل حل قطعی است؛ به این معنا که شرط لازم و کافی برای پایدارسازی هم‌زمان وجود ندارد؛ در نتیجه، یافتن پایدارساز هم‌زمان خطی، بیشتر در شرایط کافی است و یافتن روش‌هایی برای کاهش محافظه‌کاری اهمیت زیادی دارد. بررسی‌های مناسب درباره پایدارسازی هم‌زمان و افزایش محدوده امکان‌پذیری برای سیستم‌های خطی در [5]، [6] و منابع موجود در آن یافت می‌شوند.

برای سیستم‌های غیرخطی، مسئله پایدارسازی هم‌زمان پیچیده‌تر است و تنها معدودی مقالات، این مسئله را به دلیل وجود پیچیدگی در طراحی پایدارساز غیرخطی حل کرده‌اند. در [7] ثابت شده است برای هر مجموعه‌ای از سیستم‌های غیرخطی پایدارپذیر، یک کنترل‌کننده بازخورد حالت که هم‌زمان مجموعه را پایدار می‌کند (غیر مجانبی)، همیشه وجود دارد. علاوه بر این، یک شرط کافی برای یافتن کنترل‌کننده‌های پایدارساز هم‌زمان برای مجموعه‌ای از سیستم‌های غیرخطی فراهم شده است. در [8] روشی برای طراحی پایدارساز هم‌زمان مجموعه‌ای از سیستم‌های غیرخطی تک ورودی براساس تابع کنترل لیاپانوف^۳ (CLF) ارائه شده است؛ با این حال، هر دو روش ذکرشده در بالا دشوارند؛ زیرا آنها در مرحله اول وابسته به یافتن

یک کنترل‌کننده بازخورد حالت پایدارساز مجانبی یا یک تابع کنترل لیاپانوف برای هر سیستم‌اند و پس از آن نیز باید برخی شرایط را برقرار سازند. علاوه بر این، کنترل‌کننده‌های به‌دست‌آمده نیز به سادگی قابل پیاده‌سازی نیستند. در [9] مسئله یافتن یک کنترل‌کننده هم‌زمان برای سیستم‌های غیرخطی چند جمله‌ای براساس توابع لیاپانوف چندجمله‌ای، بررسی و روش‌هایی برای آن ارائه شده‌اند. از مزایای این روش‌ها استفاده از بهینه‌سازی محدب است؛ با این حال، به‌منظور محدب‌کردن مسئله، تابع لیاپانوف باید به متغیرهای حالتی محدود شود که دینامیک آنها به‌طور مستقیم تحت تأثیر ورودی‌های سیستم نباشند. این شرایط بسیار محدودکننده هستند و به دلیل افزایش بیش از حد محافظه‌کاری، معمولاً به یک مسئله حل‌نشده منجر خواهد شد. در [10] به پایدارسازی هم‌زمان مجموعه‌ای از سیستم‌های غیرخطی چندجمله‌ای با نظریه پایداری تقریبی^۴ می‌پردازد. این نظریه از دو معیار تابع چگالی یا لیاپانوف استفاده می‌کند که مزایای چشمگیری نسبت به پایدارسازی هم‌زمان مبتنی بر لیاپانوف دارد. در [11] به پایدارسازی هم‌زمان مجموعه‌ای از سیستم‌های غیرخطی می‌پردازد که شامل غیرخطی‌های نامعلوم همراه با تأخیرهای متغیر با زمان متعدّدند؛ بدین گونه که حد بالای تأخیرها را مشخص فرض می‌کند و یک کنترل‌کننده بازخورد حالت هم‌زمان بدون حافظه با پیشنهاد روش کنترل لیاپانوف - کراسوسکی ارائه می‌دهد.

درخور ذکر است تئوری منطق فازی یک رویکرد قدرتمند برای مقابله با مسائل تجزیه و تحلیل و طراحی سیستم‌های غیرخطی پیچیده ارائه می‌دهد؛ به‌ویژه، مدل فازی TS به دلیل ارائه مفهومی ساده و مؤثر برای طراحی کنترل‌کننده بسیاری از سیستم‌های غیرخطی، توجه بسیاری از طراحان را به خود جلب کرده است [12-15]. ایده اصلی مدل‌های فازی TS استفاده از گروهی از قوانین فازی است که به همراه خانواده‌ای از مدل‌های خطی معالجه برای توصیف یک سیستم غیرخطی پیچیده را فراهم می‌آورد. روش طراحی فازی TS به کمک تحلیل پایداری لیاپانوف به تشکیل یک مسئله محدب براساس نامساوی‌های ماتریسی خطی منجر می‌شود که طراحی سیستم‌های

شده است. سرانجام، مقاله در بخش ۸ نتیجه گیری شده است.

۲- مدل های فازی TS

Takagi-Sugeno یک روش مؤثر برای مدل سازی سیستم های دینامیکی پیشنهاد می کند و دینامیک مدل سیستم را با مجموعه ای محذب از دینامیک های زیرسیستم های خطی مدل سازی می کند [16] بنابراین، تعداد r زیرسیستم خطی S_i در اینجا به دست می آیند.

در این رویکرد، هر زیرسیستم، مدل خطی سازی شده سیستم اطراف نقطه کار $M_i (i = 1, \dots, r)$ از فضای حالت است و زیرسیستم S_i نمایانگر کل سیستم است، هنگامی که بردار حالت $x(t) \in R^n$ نزدیک نقطه M_i باشد. در این حالت، از مدل TS برای تقریب زدن سیستم با عدم قطعیت استفاده می شود.

$w_i(z(t))$ تابع وزن سی S_i و $z(t) = [z_1(t), \dots, z_p(t)] \in R^p$ برداری است که به صورت خطی یا غیرخطی به بردار حالت وابسته است.

۲-۱- سیستم فازی TS زمان پیوسته

مدل فازی TS با r قانون سیستم نشان داده می شود. قانون i ام سیستم عبارت است از:

$$\text{IF } z_1(t) \text{ is } M_1^i \text{ and } \dots \text{ and } z_p(t) \text{ is } M_p^i \\ \text{THEN } \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \quad (1)$$

که $A_i \in R^{n \times n}$ ، $B_i \in R^{n \times m}$ و بردارهای سیگنال حالت و کنترل به ترتیب به صورت $x(t)$ و $u(t)$ نشان داده می شوند. در ضمن M_j^i ها توابع تعلق فازی اند. با استفاده از استنباط فازی استاندارد، حالت نهایی مدل فازی به صورت زیر استنتاج می شود:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z) (A_i x(t) + B_i u(t)). \quad (2)$$

که:

$$h_i(t) = h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{l=1}^r w_l(z(t))} \quad (3) \\ w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p F_j^i(z_j(t))$$

غیرخطی را آسان می کند. در طی سال های گذشته، مدل های فازی TS با موفقیت برای تقریب زدن و کنترل سیستم های غیرخطی استفاده شده اند و پایداری سیستم های حلقه بسته با یک کنترل کننده فازی برای چندین دوره مطالعه شده است [16]. مدل های طراحی فازی TS از قوانینی با استفاده از نمایش فضای حالت تشکیل شده اند؛ در نتیجه، آنها امکان استفاده از پتانسیل تئوری خطی را فراهم می کنند. نتایج پایداری معمولاً مبتنی بر قضیه لیاپانوف است و برای پایداری سازی از جبران سازی توزیع شده موازی^۵ (PDC) استفاده می شود [17-19]. طراحی PDC اغلب با استفاده از روش لیاپانوف، انجام و به تشکیل یک مسئله نامساوی های ماتریسی خطی منجر می شود که ابزارهای قدرتمندی برای حل آن در دسترس است.

در این مقاله، یک روش جدید برای طراحی یک کنترل کننده پایداری ساز هم زمان سیستم های غیرخطی با مدل های فازی TS ارائه شده است. با استفاده از این ویژگی، ساختارهای جدیدی برای کنترل کننده بازخورد حالت و بازخورد خروجی براساس مدل فازی TS ارائه و شرایط جدیدی درباره پایداری هم زمان مجموعه ای از سیستم های غیرخطی حاصل شده اند. سپس، برخی روش ها برای دستیابی به یک مسئله محذب و براساس نامساوی های ماتریسی خطی معرفی شده اند. سرانجام، شرایط طراحی پیشنهادی در سه مثال عددی اعتبارسنجی شده است.

این مقاله به شرح زیر ترتیب داده شده است. در بخش ۲ مطالب پیش نیاز درباره مدل های TS ارائه و عمده ترین شرایط پایداری به دست آمده بررسی شده اند. پایداری هم زمان با استفاده از مدل فازی TS در بخش ۳ و ۴ تدوین شده است. علاوه بر این، شرایط LMI^6 برای ساخت پایداری ساز هم زمان توسط بازخورد حالت و خروجی پیشنهاد شده است. بخش های ۵ و ۶ برای کاهش محافظه کاری در پایداری سازهای هم زمان اختصاص داده شده اند. منابع اصلی محافظه کاری، مطالعه و راه حل هایی برای کاهش آنها پیشنهاد شده اند. در بخش ۷ سه مثال عددی برای نشان دادن اثربخشی روش های پیشنهادی ارائه

$$\dot{x}(t) = \left(\sum_{i=1}^r h_i(z) (A_i - BK_i) \right) x(t). \quad (10)$$

۳- نتایج پایداری

در این قسمت، برخی از ابزارهای اصلی تجزیه و تحلیل پایداری سیستم‌های فازی TS بررسی می‌شوند. قضیه 1 [20]: سیستم (۴) را در نظر بگیرید. اگر ماتریس مثبت معین متقارن $P \in R^{n \times n}$ وجود داشته باشد که در رابطه زیر صدق کند:

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad i = 1, \dots, r. \quad (11)$$

بنابراین، مدل فازی TS پایدار مجانبی است.

قضیه ۲ [21]: سیستم ۸ را در نظر بگیرید. اگر دو ماتریس مثبت معین متقارن $P, Q \in R^{n \times n}$ وجود داشته باشند که در روابط زیر صدق کنند:

$$\begin{cases} G_{ii}^T P + P G_{ii} + (r-1)Q < 0, \quad i = 1, \dots, r \\ ((G_{ij} + G_{ji})/2)^T P + P((G_{ij} + G_{ji})/2) - Q < 0 \\ i, j = 1, \dots, r, j > i \end{cases} \quad (12)$$

که $G_{ij} = A_i - B_i K_j$ است؛ سپس مدل فازی TS پایدار مجانبی است.

توجه کنید برای $Q = 0$ ، شرایط ارائه شده توسط قضیه ۲ به شرایط کلاسیک پایداری مجانبی تبدیل می‌شود. نکته مهم این است که شرایط پایداری در قالب LMI در نظر گرفته شد و از ابزارهای قدرتمند بهینه‌سازی محدب بهره برد [3,5,6]. علاوه بر این، در صورت نیاز می‌توانند برخی از ویژگی‌های عملکردی مانند محدود کردن سیگنال کنترل و خروجی یا پایداری نمایی را نیز به مسئله اولیه اضافه کرد [22].

۴- پایدارسازی هم‌زمان براساس مدل‌های فازی TS

در این قسمت، شرایط جدیدی را برای پایداری هم‌زمان سیستم‌های غیرخطی با استفاده از نمایش مدل فازی TS آنها پیشنهاد می‌شود. S سیستم غیرخطی را در نظر بگیرید:

$$\text{تابع } h_i(z) \text{ ویژگی مجموع محدب}^v \sum_{i=1}^r h_i(z) = 1, \quad 0 \leq h_i(z) \leq 1$$

را برآورده می‌کند. سیستم حلقه باز به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\dot{x}(t) = \left(\sum_{i=1}^r h_i(t) A_i \right) x(t). \quad (13)$$

برای سیستم حلقه بسته، امکان بررسی استراتژی‌های مختلف کنترل وجود دارد. در ادامه فرض می‌شود بردار حالت، قابل دسترسی برای اندازه‌گیری است. با استفاده از بازخورد حالت خطی ساده:

$$u(t) = -K_0 x(t), \quad (14)$$

که $K_0 \in R^{m \times n}$ مدل فازی سیستم به صورت زیر می‌شود:

$$\dot{x}(t) = \left(\sum_{i=1}^r h_i(z) (A_i - B_i K_0) \right) x(t). \quad (15)$$

تجزیه و تحلیل پایداری (۱۵) به همان روش (۴) انجام داده می‌شود. همچنین، طراحی یک بردار کنترل براساس جبران‌سازی توزیع شده موازی امکان پذیر است:

$$u(t) = \left(\sum_{i=1}^r h_i(z) K_i \right) x(t), \quad (16)$$

که $K_i \in R^{m \times n}$ است.

در اینجا با هدف پایدارسازی کل سیستم، هر زیرسیستم S_i با بازخورد حالت خطی K_i پایدارسازی می‌شود. نیاز اصلی کنترل کننده PDC این است که جفت های (A_i, B_i) پایدارپذیر باشند. دینامیک این سیستم به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\dot{x}(t) = \left(\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z) h_j(z) (A_i - B_i K_j) \right) x(t) \quad (17)$$

در صورتی که $\exists B \in R^{m \times n}$ و $B_i = k_i B, k_i > 0$ باشد، قانون کنترل زیر استفاده می‌شود [7]:

$$u(t) = \frac{\sum_{i=1}^r h_i(z) K_i}{\sum_{i=1}^r h_i(z) k_i} x(t). \quad (18)$$

در نتیجه، مدل حلقه بسته عبارت است از:

$$\begin{aligned} \dot{x}^l(t) &= \sum_{i=1}^r h_i^l(x) \times \\ &\left(A_i^l x^l(t) - B_i^l \left(\frac{1}{s} \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^r h_j^k(x) K_j \right) x^l(t) \right) \\ &= \sum_{i=1}^r h_i^l(x) A_i^l x^l(t) - \\ &\frac{1}{s} \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i^l(x) h_j^k(x) B_i^l K_j x^l(t) \end{aligned} \quad (۱۶)$$

مشخص است $\sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^r h_j^k(x) = s$ ؛
بنابراین، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r h_i^l(x) A_i^l x^l(t) &= \\ \sum_{i=1}^r h_i^l(x) A_i^l x^l(t) \left(\frac{1}{s} \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^r h_j^k(x) \right) \\ &= \frac{1}{s} \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i^l(x) h_j^k(x) A_i^l x^l(t) \end{aligned} \quad (۱۷)$$

با جایگزینی ۱۷ در ۱۶، دینامیک حلقه بسته به شرح زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \dot{x}^l(t) &= \\ \frac{1}{s} \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i^l(x) h_j^k(x) (A_i^l - B_i^l K_j) x^l(t) \end{aligned} \quad (۱۸)$$

$l = 1, \dots, s$

توابع لیاپانوف زیر برای مطالعه پایداری مدل‌های فازی تعریف شده‌اند:

$$V^l(x^l(t)) = x^{lT}(t) P^l x^l(t), \quad l = 1, \dots, s \quad (۱۹)$$

با ماتریس‌های مثبت معین متقارن $P^l, l = \{1, \dots, s\}$ از $R^{n \times n}$ که با استفاده از روش LMI محاسبه می‌شوند، مشتق V^l در امتداد مسیرهای سیستم^۸ محاسبه می‌شود:

$$\dot{V}^l(x^l(t)) = \dot{x}^{lT} P^l x^l + x^{lT} P^l \dot{x}^l, \quad l = 1, \dots, s \quad (۲۰)$$

با جایگزینی رابطه ۱۸ در رابطه بالا رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} \dot{x}^l(t) = f^l(x^l(t), u^l(t)) \\ y^l(t) = g^l(x^l(t), u^l(t)) \end{cases}, \quad l = 1, \dots, s. \quad (۱۳)$$

که $x^l(t) \in R^n$ بردار حالت، $u^l(t) \in R^m$ ورودی و $y^l(t) \in R^m$ خروجی مربوط به l امین سیستم غیرخطی است. فرض کنید مدل TS این سیستم‌ها به صورت

$$\begin{cases} \dot{x}^l(t) = \sum_{i=1}^r h_i^l(x) (A_i^l x^l(t) + B_i^l u^l(t)) \\ y^l(t) = \sum_{k=1}^{r'} h_k^l(x) C_k^l x^l(t) \end{cases} \quad l = 1, \dots, s \quad (۱۴)$$

A_i^l ماتریس حالت مربوط به زیرسیستم i ام سیستم فازی TS برای l امین سیستم غیرخطی است. توابع $h_i^l(x)$ و $h_k^l(x)$ ویژگی مجموع محدب $\sum_{i=1}^r h_i^l(x) = 1$ و $\sum_{k=1}^{r'} h_k^l(x) = 1$ را برآورده می‌کنند.

هدف اصلی این تحقیق، پایدارسازی هم‌زمان مجموعه‌ای از سیستم‌های غیرخطی با پایدارساز بازخورد حالت و خروجی است.

۴-۱- پایدارسازی هم‌زمان با بازخورد حالت

در این قسمت، کنترل‌کننده بازخورد حالت زیر پیشنهاد می‌شود:

$$u^l(t) = -\frac{1}{s} \left(\sum_{l=1}^s \sum_{i=1}^r h_i^l(x) K_i \right) x^l(t), \quad K_i \in R^{m \times n} \quad (۱۵)$$

به منظور پایدارسازی هم‌زمان s سیستم غیرخطی، با توجه به ۱۴ با جایگزینی ۱۵ در ۱۴ سیستم‌های حلقه بسته به صورت زیر به دست می‌آیند:

شرایط با توجه به متغیرهای نا مشخص $M_i, X > 0$ محذب هستند و بنابراین، قضیه زیر استنتاج می‌شود.
قضیه ۳: سیستم غیرخطی ۱۴ را در نظر بگیرید. در صورت وجود ماتریس‌های مثبت معین $X > 0$ و $M_j, j \in \{1, \dots, r\}$ برای برآورد شرایط LMI رابطه ۲۶، سیستم‌ها با بازخورد حالت ۱۵ قابل پایداری همزمان‌اند.
اگر شرایط ۱۵ برآورده شوند، پایداری همزمان از معادله زیر و ۲۶ ایجاد می‌شود:

$$K_i = M_i X^{-1}. \quad (27)$$

۲-۴- پایداری همزمان با بازخورد خروجی

هدف اصلی، طراحی یک کنترل کننده بازخورد خروجی به شکل زیر است:

$$u^l(t) = -\frac{1}{s} \left(\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^r h_i^l(x) K_j \right) y^l(t) \quad (28)$$

$$K_i \in R^{m \times m} \quad l = 1, \dots, s$$

به منظور پایداری همزمان مجموعه‌ای از سیستم غیرخطی شرح داده شده در مدل فازی TS در ۱۴، با جایگزینی $y(t)$ از ۱۴ در ۲۸، روابط زیر به دست می‌آیند:

$$u^l(t) = -\frac{1}{s} \left(\sum_{t=1}^s \sum_{j=1}^r h_j^t(x) K_j \right) \sum_{k=1}^{r'} h_k^l(x) C_k^l$$

$$= -\frac{1}{s} \sum_{t=1}^s \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{r'} h_j^t(x) h_k^l(x) K_j C_k^l$$

$$l = 0, \dots, s \quad (29)$$

با جایگزینی ۲۹ در ۱۴، سیستم حلقه بسته به صورت زیر خواهد بود:

$$\dot{x}^l(t) = \sum_{i=1}^r h_i^l(x) \left(A_i^l x^l(t) - B_i^l \frac{1}{s} \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{r'} h_j^t(x) h_k^l(x) K_j C_k^l x^l(t) \right)$$

$$l = 1, \dots, s \quad (30)$$

$$\dot{V}^l(x^l(t)) = \left(\frac{1}{s} \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i^l(x) h_j^k(x) (A_i^l - B_i^l K_j) x^l(t) \right)^T P^l x^l(t) + x^{lT} P^l \left(\frac{1}{s} \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i^l(x) h_j^k(x) (A_i^l - B_i^l K_j) x^l(t) \right)$$

$$l = 1, \dots, s$$

که برابر است با:

$$\dot{V}^l(x^l(t)) = \frac{1}{s} x^{lT} \left[\sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i^l(x) h_j^k(x) \left((A_i^l - B_i^l K_j)^T P^l + P^l (A_i^l - B_i^l K_j) \right) \right] x^l$$

$$l = 1, \dots, s \quad (22)$$

با در نظر گرفتن ویژگی مجموع محذب، $h_i^l(x)$ ، $l = \{1, \dots, s\}$ سیستم‌های ۱۴ با بازخورد حالت ۱۵ به صورت مجانبی پایداری دارند، اگر:

$$(A_i^l - B_i^l K_j)^T P^l + P^l (A_i^l - B_i^l K_j) < 0$$

$$i, j = 1, \dots, r$$

$$l = 1, \dots, s \quad (23)$$

معادله ۲۳ محذب نیست؛ زیرا حاوی ضرب متغیرهای نامعلوم است. برای رسیدن به تحدب، ماتریس لیاپانوف مشترک در نظر گرفته می‌شود:

$$P = P^1 = \dots = P^s \quad (24)$$

با در نظر گرفتن تابع لیاپانوف مشترک با تبدیل همبستگی با $P^{-1} = X > 0$ در ۲۳ روابط زیر به دست می‌آیند:

$$X A_i^{lT} + A_i^l X - (X K_j B_i^{lT} + B_i^l K_j X) < 0$$

$$i, j = 1, \dots, r$$

$$l = 1, \dots, s \quad (25)$$

با تعریف $M_j = K_j X$ عبارت زیر به دست می‌آید:

$$X A_i^{lT} + A_i^l X - (M_j^T B_i^{lT} + B_i^l M_j) < 0$$

$$i, j = 1, \dots, r \quad l = 1, \dots, s \quad (26)$$

$$XA_i^{lT} + A_i^l X - (XC_k^{lT} K_j^T B_i^{lT} + B_i^l K_j C_k^l X) < 0 \quad (36)$$

$$i, j = 1, \dots, r \quad k = 1, \dots, r' \quad l = 1, \dots, s$$

با تعریف $MC_k^l = C_k^l X$ خواهیم داشت:

$$XA_i^{lT} + A_i^l X - (C_k^{lT} M^T K_j B_i^{lT} + B_i^l K_j M C_k^l) < 0 \quad (37)$$

$$i, j = 1, \dots, r, \quad k = 1, \dots, r', \quad l = 1, \dots, s$$

با تعریف $N_j = K_j M$ یک مسئله محدب با شرط کافی به دست می‌آید. قضیه زیر از روابط بالا استنتاج می‌شود.

قضیه ۴: S سیستم غیرخطی ۱۴ را در نظر بگیرید. اگر ماتریس‌های معلوم $M, X > 0$ و $N_j, j = \{1, \dots, r\}$ وجود داشته باشند که شرایط LMI زیر را برآورده کنند، بازخورد خروجی ۲۸، پایدارساز هم‌زمان ۱۴ خواهد بود:

$$\begin{cases} C_k^l X = M C_k^l \\ XA_i^{lT} + A_i^l X - (C_k^{lT} N_j^T B_i^{lT} + B_i^l N_j C_k^l) < 0 \end{cases} \quad (38)$$

$$i, j = 1, \dots, r, \quad k = 1, \dots, r', \quad l = 1, \dots, s$$

اگر شرایط فوق برآورده شود، خواهیم داشت:

$$K_j = N_j M^{-1}, \quad j = 1, \dots, r \quad (39)$$

شرایط بالا محدب‌اند و با الگوریتم بهینه‌سازی محدب به‌طور مؤثر حل می‌شوند.

۵- کاهش محافظه‌کاری در مسائل طراحی

قضیه ۳ و قضیه ۴ بر اساس شرایط کافی هستند. اگر شرایط این قضیه برآورده شوند، می‌توانیم پایدارساز هم‌زمان را طراحی کنیم. اما سوال این است که این قضایا تا چه حد محافظه‌کارانه هستند؟ برای پاسخ به این سوال، ابتدا باید منابع این محافظه‌کاری را بیابیم. با بررسی روش دستیابی به پایدارساز هم‌زمان در قضیه ۳ و قضیه ۴، منابع محافظه‌کاری زیر مشخص هستند:

۱. محافظه‌کاری ذاتی مدل فازی TS با تابع درجه دوم لیاپانوف، یعنی رسیدن به رابطه پایداری ۲۳ از ۲۴ در طراحی بازخورد حالت یا رسیدن به رابطه پایداری ۳۴ از ۳۳ در طراحی بازخورد خروجی.
۲. در نظر گرفتن تابع مشترک لیاپانوف برای همه

با در نظر گرفتن

$$\sum_{t=1}^s \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{r'} h_j^t(x) h_k^l(x) = s$$

رابطه بالا به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(31)$$

$$\dot{x}^l(t) = \sum_{i=1}^r h_i^l(x) \left(A_i^l x^l(t) - B_i^l \frac{1}{s} \sum_{t=1}^s \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{r'} h_j^t(x) h_k^l(x) K_j C_k^l x^l(t) \right)$$

$$l = 1, \dots, s$$

با P^l ماتریس مثبت معین متقارن در $R^{n \times n}$ مشتق $V^l = x^{lT} P^l x^l$ در مسیرهای سیستم محاسبه می‌شود:

$$\dot{V}^l(x^l(t)) = \dot{x}^{lT} P^l x^l + x^{lT} P^l \dot{x}^l \quad (32)$$

$$l = 1, \dots, s$$

طبق همان روش استفاده‌شده برای پایدارساز بازخورد حالت، روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\dot{V}^l(x^l(t)) = \frac{1}{s} x^{lT} \left[\sum_{t=1}^s \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{r'} h_i^t(x) h_j^t(x) h_k^l(x) \left((A_i^l - B_i^l K_j C_k^l)^T P^l + P^l (A_i^l - B_i^l K_j C_k^l) \right) \right] x^l$$

$$l = 1, \dots, s \quad (33)$$

با در نظر گرفتن ویژگی مجموع

محدب $h_i^l(x), h_k^l(x)$ سیستم‌های ۱۴ با کنترل‌کننده بازخورد خروجی ۲۸ به‌صورت مجانبی پایدارند، اگر:

$$(A_i^l - B_i^l K_j C_k^l)^T P^l + P^l (A_i^l - B_i^l K_j C_k^l) < 0 \quad (34)$$

$$i, j = 1, \dots, r \quad k = 1, \dots, r' \quad l = 1, \dots, s$$

معادله ۳۴ محدب نیست؛ زیرا شامل ضرب متغیرهای نامعلوم است. برای رسیدن به تحدب، ماتریس لیاپانوف مشترک در نظر گرفته می‌شود:

$$P = P^1 = \dots = P^s \quad (35)$$

با در نظر گرفتن تابع لیاپانوف مشترک با تبدیل همنهشتی $P^{-1} = X > 0$ در ۳۴، روابط زیر به دست می‌آیند:

سیستم‌ها.

۳. محدودیت‌های معادله (۳۷) در قضیه ۴.

در ادامه، سعی خواهیم کرد با حذف یا حداقل بهبود این شرایط، محافظه‌کاری قضیه طراحی را کاهش دهیم.

۵-۱- پایداری با بازخورد حالت

همانطور که در بالا بحث شد، نتیجه قضیه ۳ بسیار محافظه کارانه است. محافظه‌کاری، نتیجه استفاده از قضیه ۱ و همچنین استفاده از تابع لیاپانوف مشترک است. در این قسمت سعی خواهیم کرد اولین منبع محافظه‌کاری که در بالا توضیح داده شد را با استفاده از قضیه ۲ به جای قضیه ۱ کاهش دهیم که در نتیجه، منجر به قضیه زیر می‌شود:

قضیه ۵: سیستم غیرخطی ۱۴ را در نظر بگیرید. در صورت وجود ماتریس‌های مثبت معین $X, Y > 0$ و M_i که شرایط LMI رابطه زیر را برآورده کنند، سیستم‌ها با بازخورد حالت ۱۵ به‌طور هم‌زمان قابل پایداری‌سازی‌اند.

(۴۰)

$$\begin{cases} XA_i^{iT} + A_i^i X - (B_i^i M_i + M_i^T B_i^{iT}) + (r-1)Y < 0 \\ XA_i^{iT} + A_i^i X + XA_j^{iT} + A_j^i X - \\ (M_j^T B_i^{iT} + M_i^T B_j^{iT} + B_i^i M_j + B_j^i M_i) - 2Y < 0 \\ l = 1, \dots, s \quad i = 1, \dots, r \quad i, j = 1, \dots, r \quad j > i \end{cases}$$

در صورت تحقق شرایط فوق، بازخورد حالت ۱۵ با به دست آمدن ضرایب زیر طراحی می‌شود:

$$K_i = M_i X^{-1}. \quad (41)$$

اثبات:

با مقایسه قضیه ۳ و قضیه ۲ می‌توان نتیجه گرفت که، اگر دو ماتریس مثبت معین متقارن $P, Q \in R^{n \times n}$ وجود داشته باشند که شرایط زیر را برآورده کنند، سیستم ۱۴ به‌صورت مجانبی با بازخورد حالت ۱۵ پایدار می‌شود.

$$\begin{cases} G_{ii}^{iT} P + P G_{ii}^i + (r-1)Q < 0 \\ \left(((G_{ij}^i + G_{ji}^i)/2)^T P + P((G_{ij}^i + G_{ji}^i)/2) - Q < 0 \right. \\ l = 1, \dots, s \quad i = 1, \dots, r \quad i, j = 1, \dots, r \quad j > i \end{cases} \quad (42)$$

که $G_{ij}^i = A_i^i - B_i^i K_j$ ؛ بنابراین، مدل فازی TS به‌طور مجانبی پایدار است.

توجه داشته باشید ما از تابع لیاپانوف مشترک استفاده کرده ایم. برای محاسبه کردن ۴۲، روش زیر را در نظر بگیرید:

(۴۳)

$$\begin{aligned} (A_i^i - B_i^i K_i)^T P + P(A_i^i - B_i^i K_i) + (r-1)Q &< 0, \\ ((A_i^i + A_j^i - (B_i^i K_j + B_j^i K_i))/2)^T P + \\ P((A_i^i + A_j^i - (B_i^i K_j + B_j^i K_i))/2) - Q &< 0, \\ l = 1, \dots, s \quad i = 1, \dots, r \quad i, j = 1, \dots, r \quad j > i \end{aligned}$$

با تعریف $M_i = K_i X$ ، $P^{-1} = X > 0$ و شرایط LMI زیر به دست می‌آیند:

(۴۴)

$$\begin{aligned} XA_i^{iT} + A_i^i X - (B_i^i M_i + M_i^T B_i^{iT}) + (r-1)Y &< 0 \\ XA_i^{iT} + A_i^i X + XA_j^{iT} + A_j^i X - \\ (M_j^T B_i^{iT} + M_i^T B_j^{iT} + B_i^i M_j + B_j^i M_i) - 2Y &< 0 \\ l = 1, \dots, s \quad i = 1, \dots, r \quad i, j = 1, \dots, r \quad j > i \end{aligned}$$

در صورت تحقق شرایط فوق، بازخورد حالت ۱۵ با به دست آمدن ضرایب زیر طراحی می‌شود:

$$K_i = M_i X^{-1}. \quad (45)$$

در نتیجه، قضیه ۵ اثبات شد.

نکته: با توجه به استفاده از روش کاهش محافظه‌کاری که در رابطه (۴۴) استفاده شد، واضح است که شرایط ارائه شده در قضیه ۵ در مقایسه با قضیه ۳ (همتای خود) محافظه‌کاری کمتری دارند. در واقع در این روش، شرایط پایداری بجای اینکه توسط رابطه (۲۶) و به ازای $i, j = 1, \dots, r$ بررسی شوند، توسط رابطه (۴۴) و به ازای $i, j = 1, \dots, r, i < j$ بررسی می‌شوند که کاهش تعداد LMI ها را در پی خواهد داشت.

۶- کاهش محافظه‌کاری براساس لم فینسلر

در این قسمت، از لم فینسلر^۹ برای طراحی پایداری هم‌زمان با بازخورد خروجی با محافظه‌کاری نسبتاً کمتر استفاده خواهد شد. لم فینسلر برای راحتی تکرار می‌شود: (لم فینسلر) [23]. اگر فرض کنید $x \in \mathbb{R}^n$ ، $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ به طوری که $rank(B) < n$ جملات زیر معادل‌اند.

دومین نامعادله به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\begin{pmatrix} x^l \\ \xi_{j,k}^l \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A_i^{lT} P^l + P^l A_i^l & -P^l B_i^l \\ -B_i^{lT} P^l & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^l \\ \xi_{j,k}^l \end{pmatrix} < 0 \quad (50)$$

$$(K_j C_k^l - I) \begin{pmatrix} x^l \\ \xi_{j,k}^l \end{pmatrix} = 0$$

$$i, j = 1, \dots, r \quad k = 1, \dots, r' \quad l = 1, \dots, s$$

هم اکنون با اعمال لم فینسلر خواهیم داشت:

$$\begin{pmatrix} A_i^{lT} P^l + P^l A_i^l & -P^l B_i^l \\ -B_i^{lT} P^l & 0 \end{pmatrix} + X_j (K_j C_k^l - I) + \begin{pmatrix} C_k^{lT} K_j^T \\ -I \end{pmatrix} X_j^T < 0 \quad (51)$$

$$i, j = 1, \dots, r \quad k = 1, \dots, r' \quad l = 1, \dots, s$$

یا معادل آن:

$$\begin{pmatrix} A_i^{lT} P^l + P^l A_i^l & -P^l B_i^l \\ -B_i^{lT} P^l & 0 \end{pmatrix} + He\{X_j (K_j C_k^l - I)\} < 0 \quad (52)$$

$$i, j = 1, \dots, r \quad k = 1, \dots, r' \quad l = 1, \dots, s$$

بنابراین، خواهیم داشت:

$$\begin{pmatrix} A_i^{lT} P^l + P^l A_i^l & -P^l B_i^l \\ -B_i^{lT} P^l & 0 \end{pmatrix} + He\{X_j (K_j C_k^l - I)\} < 0 \quad (53)$$

$$i, j = 1, \dots, r \quad k = 1, \dots, r' \quad l = 1, \dots, s$$

برای رسیدن به یک مسئله محدب فقط تغییر متغیر زیر

لازم است.

$$A_j = X_j K_j \quad (54)$$

در نتیجه:

$$K_j = (X_j^T X_j)^{-1} X_j^T A_j, \quad j = 1, \dots, r. \quad (55)$$

در نتیجه، قضیه ۶ اثبات شد.

۷- نتایج عددی

در این بخش، سه مثال عددی برای نشان دادن اثربخشی روش های پیشنهادی آورده می شوند. این پیاده سازی ها در MATLAB 7.10.0.499 (R2010a) روی رایانه با پردازنده Intel® Core i3 و ۴ گیگابایت RAM انجام شده است. همچنین، از YALMIP (R14SP3) [24] به عنوان پارسر^{۱۱} و از حل کننده SDPT3 LMI

1. $x^T Q x < 0$, for all $Bx = 0$, $x \neq 0$
2. $x^T Q x < 0$, for all $Bx = 0$, $x \neq 0$
3. $\exists \mu \in \mathbb{R}$: $Q - \mu B^T B < 0$
4. $\exists X \in \mathbb{R}^{n \times m}$: $Q + XB + B^T X^T < 0$

که در آن پایه ای برای فضای پوچی B است.

با استفاده از لم فینسلر، ما نسبتاً منابع محافظه کاری ۲ و ۳ پایداری هم زمان، یعنی توابع لیاپانوف مشترک و محدودیت های معادله را کاهش خواهیم داد. اثبات خواهیم کرد استفاده از لم فینسلر، به قضیه زیر منجر می شود:

قضیه ۶: سیستم غیر خطی ۱۴ را در نظر بگیرید. در صورت وجود ماتریس های مثبت معین $P^l > 0$, $l = 1, \dots, s$ و $\{1, \dots, s\}$ که شرایط LMI رابطه زیر را برآورده کنند، سیستم ها با بازخورد خروجی ۲۸ به طور هم زمان قابل پایداری سازی اند.

$$\begin{pmatrix} A_i^{lT} P^l + P^l A_i^l & -P^l B_i^l \\ -B_i^{lT} P^l & 0 \end{pmatrix} + He\{(A_j C_k^l - X_j)\} < 0 \quad (46)$$

$$i, j = 1, \dots, r \quad k = 1, \dots, r' \quad l = 1, \dots, s$$

در صورت تحقق شرایط فوق، کنترل کننده بازخورد خروجی ۲۸ به دست آمدن ضرایب زیر طراحی می شود:

$$K_j = (X_j^T X_j)^{-1} X_j^T A_j, \quad j = 1, \dots, r \quad (47)$$

اثبات:

۳۳ را دوباره در نظر بگیرید. با در نظر گرفتن ویژگی مجموع محدب $h_i^l(x)$, $h_i^l(x)$ ، سیستم های ۱۴ با کنترل کننده بازخورد خروجی ۲۸ به صورت مجانبی پایداری اند، اگر:

(۴۸)

$$\begin{cases} x^{lT} P^l x^l > 0 \\ x^{lT} [(A_i^l - B_i^l K_j C_k^l)^T P^l + P^l (A_i^l - B_i^l K_j C_k^l)] x^l < 0 \end{cases}$$

$$i, j = 1, \dots, r, \quad k = 1, \dots, r', \quad l = 1, \dots, s$$

با تعریف $K_j C_k^l x^l = \xi_{j,k}^l$ داریم:

$$\begin{aligned} & x^{lT} P^l x^l > 0 \\ & x^{lT} (A_i^{lT} P^l + P^l A_i^l) x^l - \\ & (\xi_{j,k}^{lT} B_i^{lT} P^l x^l + x^{lT} P^l B_i^l \xi_{j,k}^l) < 0 \end{aligned} \quad (49)$$

$$i, j = 1, \dots, r \quad k = 1, \dots, r' \quad l = 1, \dots, s$$

استفاده شده است.

مثال ۱: مدل‌های غیرخطی زیر را در نظر بگیرید که می‌خواهیم از طریق بازخورد حالت، پایدارسازی هم‌زمان شوند:

$$P_1: \begin{cases} \dot{x}_1 = 0.1x_2^3x_1^2 - 0.2x_2^2x_1 + 0.4e^{x_1}x_2 + 0.3x_1^2x_2 \\ \dot{x}_2 = 0.25x_1e^{x_2}\sin(x_1) - 2x_1x_2 + 4u \end{cases} \quad (56)$$

$$P_2: \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1x_2\cos(x_2) + 0.5x_1^2x_2^3 + 8x_2e^{x_1^2} \\ \dot{x}_2 = -2x_1^2x_2 + 0.7x_2^3x_1 + x_2\sin(x_1) + 2u \end{cases} \quad (57)$$

سیستم P_1 به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1x_2^3x_1^2 - 0.2x_2^2x_1 & 0.4e^{x_1} + 0.3x_1^2 \\ 0.25e^{x_2}\sin(x_1) & -2x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} u \quad (58)$$

که در آن عبارات غیرخطی به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\begin{aligned} Z_1 &\equiv 0.1x_2^3x_1^2 - 0.2x_2^2x_1 & Z_2 &\equiv 0.4e^{x_1} + 0.3x_1^2 \\ Z_3 &\equiv 0.25e^{x_2}\sin(x_1) & Z_4 &\equiv -2x_1 \end{aligned} \quad (59)$$

برای سادگی، فرض می‌شود $x_1, x_2 \in [-0.5, 0.5]$ ؛ البته، می‌توان هر محدوده‌ای را برای x_1, x_2 برای ساخت یک مدل فازی فرض کرد. حداقل و حداکثر مقادیر عبارات غیرخطی تحت $x_1, x_2 \in [-0.5, 0.5]$ به شرح زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \max(Z_1) &= 0, \min(Z_1) = -0.0563 \\ \max(Z_3) &= 0.1976, \min(Z_3) = -0.1976 \\ \max(Z_2) &= 0.7345, \min(Z_2) = 0.3157 \\ \max(Z_4) &= 1, \min(Z_4) = -1 \end{aligned} \quad (60)$$

این مدل غیرخطی با مدل TS با ماتریس‌های زیرسیستم‌ها به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\begin{aligned} A_1^1 &= \begin{pmatrix} -0.0563 & 0.3157 \\ -0.1976 & -1 \end{pmatrix}, A_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0.3157 \\ -0.1976 & -1 \end{pmatrix} \\ A_3^1 &= \begin{pmatrix} -0.0563 & 0.7345 \\ -0.1976 & -1 \end{pmatrix}, A_4^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0.7345 \\ -0.1976 & -1 \end{pmatrix} \\ A_5^1 &= \begin{pmatrix} -0.0563 & 0.3157 \\ 0.1976 & -1 \end{pmatrix}, A_6^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0.3157 \\ 0.1976 & -1 \end{pmatrix} \\ A_7^1 &= \begin{pmatrix} -0.0563 & 0.7345 \\ 0.1976 & -1 \end{pmatrix}, A_8^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0.7345 \\ 0.1976 & -1 \end{pmatrix} \\ A_9^1 &= \begin{pmatrix} -0.0563 & 0.3157 \\ -0.1976 & 1 \end{pmatrix}, A_{10}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0.3157 \\ -0.1976 & 1 \end{pmatrix} \\ A_{11}^1 &= \begin{pmatrix} -0.0563 & 0.7345 \\ -0.1976 & 1 \end{pmatrix}, A_{12}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0.7345 \\ -0.1976 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{13}^1 &= \begin{pmatrix} -0.0563 & 0.3157 \\ 0.1976 & 1 \end{pmatrix}, A_{14}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0.3157 \\ 0.1976 & 1 \end{pmatrix} \\ A_{15}^1 &= \begin{pmatrix} -0.0563 & 0.7345 \\ 0.1976 & 1 \end{pmatrix}, A_{16}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0.7345 \\ 0.1976 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (61)$$

توابع عضویت با فرمول‌های زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} m &= \frac{\max(Z) - Z}{\max(Z) - \min(Z)} \\ M &= \frac{Z - \min(Z)}{\max(Z) - \min(Z)} \end{aligned} \quad (62)$$

بنابراین، توابع عضویت P_1 به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{-Z_1}{0.0563}, M_1 = \frac{Z_1 + 0.0563}{0.0563} \\ m_2 &= \frac{0.7345 - Z_2}{0.4188}, M_2 = \frac{Z_2 - 0.3157}{0.4188} \\ m_3 &= \frac{0.1976 - Z_3}{0.3952}, M_3 = \frac{Z_3 + 0.1976}{0.3952} \\ m_4 &= \frac{1 - Z_4}{2}, M_4 = \frac{Z_4 + 1}{2} \end{aligned} \quad (63)$$

به طور مشابه، ماتریس‌های زیرسیستم‌ها و توابع عضویت برای سیستم P_2 به دست می‌آیند. با استفاده از LMI‌های پیشنهادی در قضیه، یک کنترل کننده هم‌زمان بازخورد حالت TS به صورت ۱۵ با ضریب بهره‌های زیر برای سیستم‌های P_1 و P_2 به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} K_1 &= [10.7889 \quad 58.4767], K_2 = [10.8336 \quad 58.7654] \\ K_3 &= [10.8237 \quad 58.6426], K_4 = [10.86 \quad 58.8909] \\ K_5 &= [10.6546 \quad 57.0781], K_6 = [10.9246 \quad 58.5651] \\ K_7 &= [10.7044 \quad 57.2917], K_8 = [10.9752 \quad 58.7704] \end{aligned}$$

$$P_4: \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^3 \sqrt{x_2 x_1^2} - 2x_1^2 \cos(x_2) + x_2^2 + x_1 x_2 + 5u \\ \dot{x}_2 = x_1^3 + x_1 x_2^2 - 3x_2 e^{x_2 \sin(x_1)} - x_2 x_1^2 \end{cases} \quad (66)$$

با استفاده از LMI های پیشنهادی در قضیه ۱، یک کنترل کننده هم زمان بازخورد حالت TS به صورت ۱۵ با ضریب بهره های زیر برای سیستم های P3 و P4 به دست می آید:

$$\begin{aligned} K_1 &= [0.6408 \quad -0.1760], K_2 = [1.1267 \quad -0.1719] \\ K_3 &= [0.6443 \quad 0.1376], K_4 = [1.1281 \quad 0.1684] \\ K_5 &= [0.6490 \quad 0.1038], K_6 = [1.1330 \quad 0.0689] \\ K_7 &= [0.6468 \quad 0.4180], K_8 = [1.1313 \quad 0.4094] \\ K_9 &= [0.5287 \quad -0.1874], K_{10} = [1.0384 \quad -0.1813] \\ K_{11} &= [0.5338 \quad 0.1310], K_{12} = [1.0403 \quad 0.1692] \\ K_{13} &= [0.5381 \quad 0.0852], K_{14} = [1.0450 \quad 0.0439] \\ K_{15} &= [0.5347 \quad 0.4042], K_{16} = [1.0428 \quad 0.3946] \end{aligned} \quad (67)$$

با استفاده از کنترل کننده یاد شده، سیستم حلقه بسته شبیه سازی می شود. سپس، منحنی فاز سیستم های حلقه بسته P_3 و P_4 ، به ترتیب در شکل (۳) و شکل (۴) ارائه شده اند.

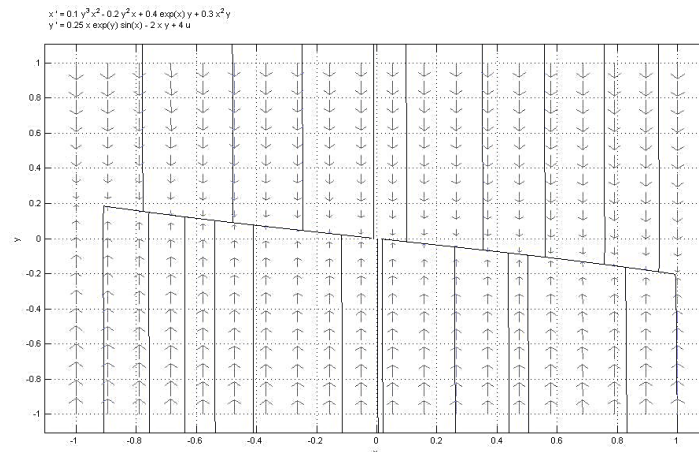
$$\begin{aligned} K_9 &= [10.7729 \quad 58.8889], K_{10} = [10.8170 \quad 59.1739] \\ K_{11} &= [10.8081 \quad 59.0563], K_{12} = [10.8440 \quad 59.3022] \\ K_{13} &= [10.6523 \quad 57.5642], K_{14} = [10.9306 \quad 59.0961] \\ K_{15} &= [10.7020 \quad 57.7775], K_{16} = [10.9810 \quad 59.3002] \end{aligned} \quad (68)$$

با استفاده از کنترل کننده یاد شده، سیستم حلقه بسته شبیه سازی می شود. سپس، منحنی فاز سیستم های حلقه بسته P_1 و P_2 ، به ترتیب در شکل (۱) و شکل (۲) ارائه شده اند.

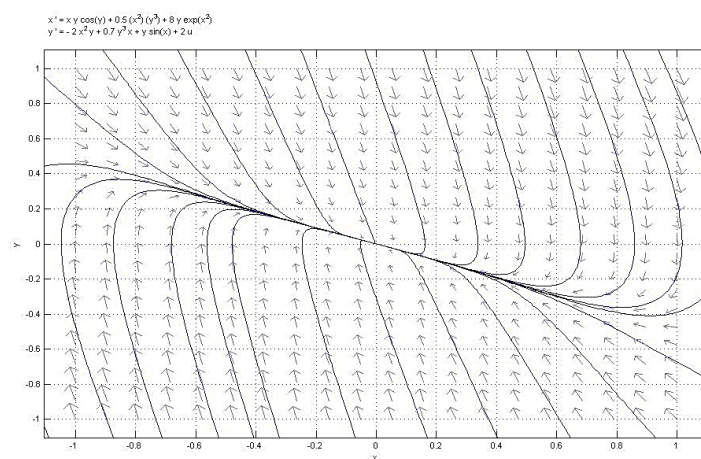
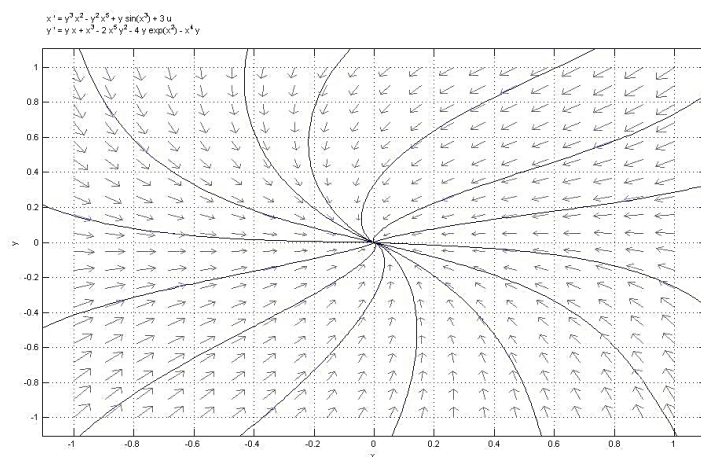
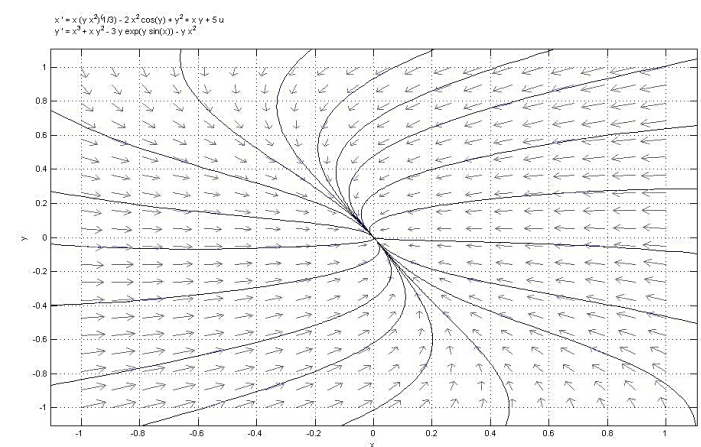
با توجه به شکل های ۱ و ۲، مشاهده می شود کنترل کننده بازخورد حالت فازی TS پیشنهادی با موفقیت هر دو سیستم غیرخطی، P_1 و P_2 را برای شرایط اولیه مختلف پایدار می سازد.

مثال ۲: مدل های غیرخطی زیر را در نظر بگیرید که می خواهیم از طریق بازخورد حالت به طور هم زمان پایدار شوند:

$$P_3: \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 x_1^2 - x_2^2 x_1^5 + x_2 \sin(x_1^3) + 3u \\ \dot{x}_2 = x_2 x_1 + x_1^3 - 2x_1^5 x_2^2 - 4x_2 e^{x_1^2} - x_1^4 x_2 \end{cases} \quad (69)$$



شکل (۱): منحنی فاز سیستم حلقه بسته P_1 در مثال ۱.

شکل (۲): منحنی فاز سیستم حلقه بسته P_2 در مثال ۱شکل (۳): منحنی فاز سیستم حلقه بسته P_3 در مثال ۲شکل (۴): منحنی فاز سیستم حلقه بسته P_4 در مثال ۲

مثال ۳: مدل‌های غیرخطی زیر را در نظر بگیرید که می‌خواهیم از طریق بازخورد خروجی به‌طور هم‌زمان پایدار شوند:

با توجه به شکل‌های ۳ و ۴ مشاهده می‌شود کنترل‌کننده TS فازی حالت فازی TS پیشنهادی با موفقیت هر دو سیستم غیرخطی، P_3 و P_4 را برای شرایط اولیه مختلف پایدار می‌سازد.

$$\begin{aligned}
 A_1^1 &= \begin{pmatrix} -2.6487 & 1 \\ -0.3548 & 1.5625 \end{pmatrix}, A_2^1 = \begin{pmatrix} -1.6065 & 1 \\ -0.3548 & 1.5625 \end{pmatrix} \\
 A_3^1 &= \begin{pmatrix} -2.6487 & 1.1276 \\ -0.3548 & 1.5625 \end{pmatrix}, A_4^1 = \begin{pmatrix} -1.6065 & 1.1276 \\ -0.3548 & 1.5625 \end{pmatrix} \\
 A_5^1 &= \begin{pmatrix} -2.6487 & 1 \\ 0 & 1.5625 \end{pmatrix}, A_6^1 = \begin{pmatrix} -1.6065 & 1 \\ 0 & 1.5625 \end{pmatrix} \\
 A_7^1 &= \begin{pmatrix} -2.6487 & 1.1276 \\ 0 & 1.5625 \end{pmatrix}, A_8^1 = \begin{pmatrix} -1.6065 & 1.1276 \\ 0 & 1.5625 \end{pmatrix} \\
 A_9^1 &= \begin{pmatrix} -2.6487 & 1 \\ -0.3548 & 2.5625 \end{pmatrix}, A_{10}^1 = \begin{pmatrix} -1.6065 & 1 \\ -0.3548 & 2.5625 \end{pmatrix} \quad (۷۳) \\
 A_{11}^1 &= \begin{pmatrix} -2.6487 & 1.1276 \\ -0.3548 & 2.5625 \end{pmatrix}, A_{12}^1 = \begin{pmatrix} -1.6065 & 1.1276 \\ -0.3548 & 2.5625 \end{pmatrix} \\
 A_{13}^1 &= \begin{pmatrix} -2.6487 & 1 \\ 0 & 2.5625 \end{pmatrix}, A_{14}^1 = \begin{pmatrix} -1.6065 & 1 \\ 0 & 2.5625 \end{pmatrix} \\
 A_{15}^1 &= \begin{pmatrix} -2.6487 & 1.1276 \\ 0 & 2.5625 \end{pmatrix}, A_{16}^1 = \begin{pmatrix} -1.6065 & 1.1276 \\ 0 & 2.5625 \end{pmatrix} \\
 C_1^1 &= (98.4032 \quad 2), C_2^1 = (102.2039 \quad 2)
 \end{aligned}$$

توابع عضویت با فرمول‌های زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{\text{Max}(Z) - Z}{\text{Max}(Z) - \min(Z)} \\
 M &= \frac{Z - \min(Z)}{\text{Max}(Z) - \min(Z)} \quad (۷۴)
 \end{aligned}$$

بنابراین، توابع عضویت P_5 به صورت زیر محاسبه

می‌شوند:

$$\begin{aligned}
 m_1 &= \frac{-1.6065 - Z_1}{1.0422}, M_1 = \frac{Z_1 + 2.6487}{1.0422} \\
 m_2 &= \frac{1.1276 - Z_2}{0.1276}, M_2 = \frac{Z_2 - 1}{0.1276} \\
 m_3 &= \frac{-Z_3}{0.3548}, M_3 = \frac{Z_3 + 0.3548}{0.3548} \quad (۷۵) \\
 m_4 &= \frac{2.5625 - Z_4}{1}, M_4 = \frac{Z_4 - 1.5625}{1} \\
 m_1' &= \frac{102.2039 - Z_1'}{3.8007}, M_1' = \frac{Z_1' - 98.4032}{3.8007}
 \end{aligned}$$

به طور مشابه، ماتریس‌های زیرسیستم‌ها و توابع

عضویت برای سیستم P_6 به دست می‌آیند. با استفاده از

LMIهای پیشنهادی در قضیه ۶، یک کنترل‌کننده هم‌زمان

بازخورد خروجی TS به صورت ۲۸ با ضریب بهره‌های زیر

$$P_5: \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1^2 x_2 - x_1 e^{x_1} + x_2 \cos(x_1) \\ \dot{x}_2 = x_1^4 + x_1 x_2 - x_1 \sin^2(x_1) + x_2 x_1^4 + 2x_2 + u \\ y = x_1^2 + 2x_2 + x_1 e^{0.5x_1} \cos(x_1^2) \end{cases} \quad (۷۸)$$

$$P_6: \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^3 - 3x_1 \cos(x_2) + x_1^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \sin(x_2) - x_1 x_2 + x_2 e^{x_2} + x_2 + 3u \\ y = -x_1 x_2 + 2x_2 + x_2^5 \end{cases} \quad (۷۹)$$

سیستم P_5 به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 - e^{x_1} & x_1^2 + \cos(x_1) \\ x_1^3 - \sin^2(x_1) & x_1^4 + 2 + x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\
 y &= \begin{bmatrix} x_1 + e^{0.5x_1} \cos(x_1^2) & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (۷۰)
 \end{aligned}$$

که در آن عبارات غیرخطی به صورت زیر تعریف

شده‌اند:

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= -1 - e^{x_1} & Z_2 &= x_1^2 + \cos(x_1) \\
 Z_3 &= x_1^3 - \sin^2(x_1) & Z_4 &= x_1^4 + 2 + x_1 \quad (۷۱) \\
 Z_1' &= x_1 + e^{0.5x_1} \cos(x_1^2)
 \end{aligned}$$

فرض بر این است که در سیستم P_5 متغیر حالت x_2

دسترس ناپذیر یا غیر قابل اندازه‌گیری است و در سیستم P_6

متغیر حالت x_1 دسترس ناپذیر یا غیر قابل اندازه‌گیری است.

برای سادگی، فرض می‌شود $x_1, x_2 \in [-0.5 \quad 0.5]$

البته می‌تواند هر محدوده‌ای برای x_1, x_2 برای ساخت یک

مدل فازی فرض شود. حداقل و حداکثر مقادیر عبارات

غیرخطی تحت $x_1, x_2 \in [-0.5 \quad 0.5]$ به شرح زیر به

دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
 \text{Max}(Z_1) &= -1.6065, \text{min}(Z_1) = -2.6487 \\
 \text{Max}(Z_2) &= 1.1276, \text{min}(Z_2) = 1 \\
 \text{Max}(Z_3) &= 0, \text{min}(Z_3) = -0.3548 \quad (۷۲) \\
 \text{Max}(Z_4) &= 2.5625, \text{min}(Z_4) = 1.5625 \\
 \text{Max}(Z_1') &= 102.2039, \text{min}(Z_1') = 98.4032
 \end{aligned}$$

این مدل غیرخطی با مدل TS با ماتریس‌های

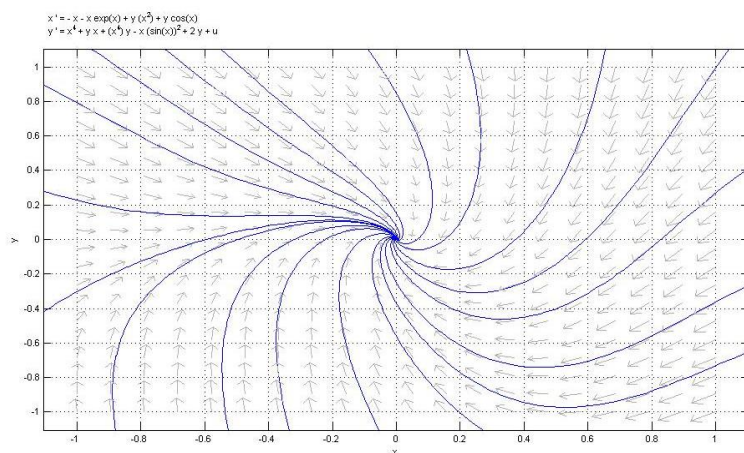
زیرسیستم‌ها به صورت زیر نشان داده می‌شود:

برای سیستم‌های P5 و P6 به دست می‌آید:

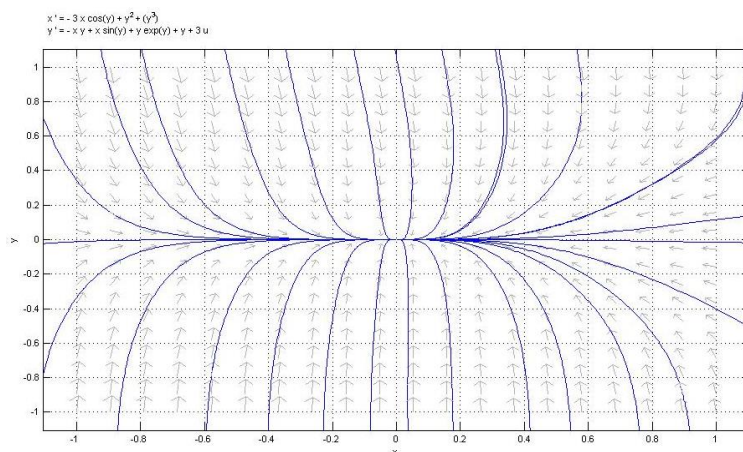
$$K_i = 2.60 \quad (۷۶)$$

با استفاده از کنترل‌کننده یادشده، سیستم حلقه بسته، شبیه‌سازی می‌شود. سپس منحنی فاز سیستم‌های حلقه بسته P_5 و P_6 به ترتیب در شکل‌های ۵ و ۶ ارائه شده‌اند. همچنین، مقدار متغیرهای حالت و خروجی برای سیستم

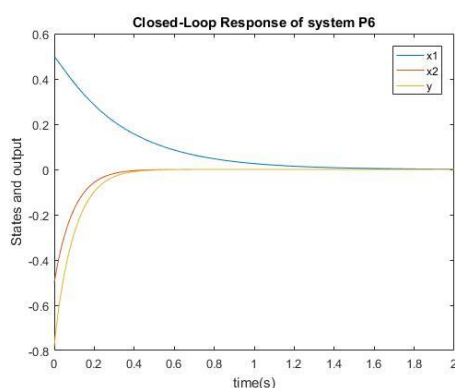
حلقه باز و حلقه بسته P_5 با شرایط اولیه $x_1(0) = 0.5, x_2(0) = -0.5$ به ترتیب در شکل‌های ۷ و ۸ و مقدار متغیرهای حالت و خروجی برای سیستم حلقه باز و حلقه بسته P_6 با شرایط اولیه $x_1(0) = 0.5, x_2(0) = -0.5$ به ترتیب در شکل‌های ۹ و ۱۰ ترسیم شده‌اند.



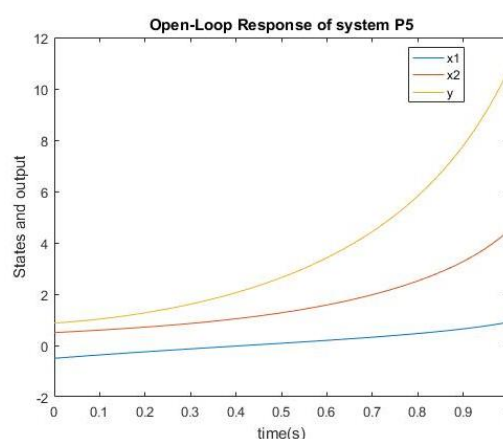
شکل (۵): منحنی فاز سیستم حلقه بسته P_5 در مثال ۳.



شکل (۶): منحنی فاز سیستم حلقه بسته P_6 در مثال ۳.



شکل (۱۰): پاسخ زمانی سیستم حلقه بسته P_6 در مثال ۳.



شکل (۷): پاسخ زمانی سیستم حلقه باز P_5 در مثال ۳.

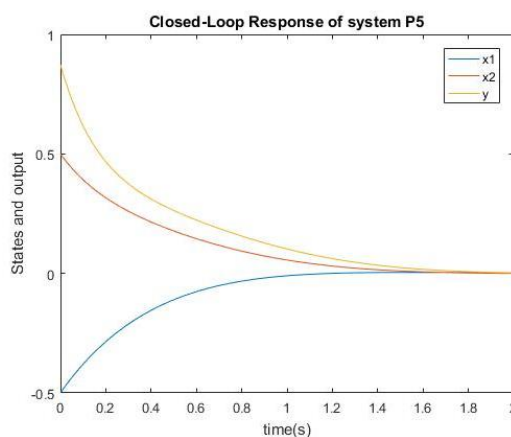
با توجه به شکل‌های ۵ تا ۱۰ مشاهده می‌شود کنترل‌کننده بازخورد خروجی فازی TS پیشنهادی با موفقیت، سیستم‌های غیرخطی P_5 و P_6 را برای شرایط اولیه مختلف پایدار می‌سازد.

۸- نتیجه‌گیری

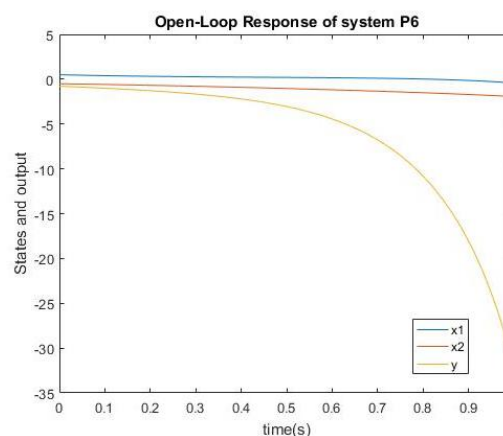
ساختار جدیدی از کنترل‌کننده بازخورد حالت و خروجی براساس مدل فازی TS معرفی و شرایط پایداری هم‌زمان برای مجموعه‌ای از سیستم‌های غیرخطی بررسی شدند. روابط پایدارسازهای هم‌زمان به صورت مسائل محدب و نامساوی‌های ماتریسی خطی استخراج شدند. منابع اصلی محافظه‌کاری در پایدارساز هم‌زمان از جمله محافظه‌کاری ذاتی مدل فازی TS، استفاده از تابع لیاپانوف مشترک و معادلات محدودکننده بررسی شد. با استفاده از لم فینسلر برخی محافظه‌کاری‌های موجود در مسئله، ساده‌سازی شدند و سعی شد شرایط کافی با قیدهای محدودکننده کمتری ارائه شوند. سرانجام، سه مثال عددی برای تأیید قابلیت پیاده‌سازی روش پیشنهادی ارائه شدند.

مراجع

- [1] K. Sabahi, M. Tavan and A. Hajizadeh, "Adaptive T2FPID Controller for Load Frequency Control in a Nonlinear Time-delay Power System," *Computational Intelligence in Electrical Engineering*, Vol. 11, No. 4, pp. 81-92, 2021.
- [2] H. hamidi, "Utilizing metaheuristic algorithms to optimize the rule base in fuzzy systems," *Computational Intelligence in Electrical Engineering*, Vol. 7, No. 3, pp. 47-68, 2016.
- [3] M. Vidyasagar and N. Viswanadham, "Algebraic design techniques for reliable stabilization," *IEEE*



شکل (۸): پاسخ زمانی سیستم حلقه بسته P_5 در مثال ۳.



شکل (۹): پاسخ زمانی سیستم حلقه باز P_6 در مثال ۳.

- Systems, and Signal Processing*, Vol. 38, No. 1, pp. 41-62, 2019.
- [14] X. Wang, J. H. Park, H. Z. X. Yang and S. Zhong, "Delay-dependent fuzzy sampled-data synchronization of TS fuzzy complex networks with multiple couplings," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2019.
- [15] Y. Wang, H. Shen, H. R. Karimi and D. Duan, "Dissipativity-based fuzzy integral sliding mode control of continuous-time TS fuzzy systems," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 26, No. 3, pp. 1164-1176, 2018.
- [16] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.*, Vols. SMC-15, No. 1, pp. 116-132, 1985.
- [17] L. Qiao, L. Li and Y. Lu, "Parallel and Nonparallel Distributed Compensation Controller Design for T-S Fuzzy Discrete Singular Systems With Distinct Difference Item Matrices," *IEEE Access*, Vol. 9, pp. 87475-87483, 2021.
- [18] J. Zhang, W. Chen and X. Lu, "Robust fuzzy stabilization of nonlinear time-delay systems subject to impulsive perturbations," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 80, 2020.
- [19] H. Li, Y. Gao, P. Shi and X. Zhao, "Output-feedback control for TS fuzzy delta operator systems with time-varying delays via an input-output approach," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 23, No. 4, pp. 1100-1112, 2015.
- [20] K. Tanaka and M. Sugeno, "Stability analysis and design of fuzzy control systems," *Fuzzy sets and systems*, Vol. 45, pp. 135-156, 1992.
- [21] K. Tanaka, K. Ikeda and O. Wang, "Fuzzy Regulators and Fuzzy Observers: Relaxed Stability Conditions and LMI-Based Designs," *IEEE TRANSACTIONS ON FUZZY SYSTEMS*, Vol. 6, No. 2, pp. 250-266, 1998.
- [22] G. Feng, "Analysis and Synthesis of Fuzzy Control Systems - A Model Based Approach," in *CRC*, Boca Raton, FL, 2010.
- [23] G. Dullerud and F. Paganini, *A course in robust control theory: a convex approach*, Springer Science and Business Media, 2013.
- [24] J. Lofberg, "Automatic robust convex programming," *Optimization methods and software*, Vol. 27, No. 1, pp. 115-129, 2012.
- Trans. Automat. Contr.*, Vol. 27, pp. 1085-1095, 1982.
- [4] V. Blondel and M. Gevers, "Simultaneous stabilizability of three linear systems is rationally undecidable," *Math. Contr. Sig. Syst.*, Vol. 6, pp. 135-145, 1993.
- [5] J. Dong and G. Yang, "Robust static output feedback control synthesis for linear continuous systems with polytopic uncertainties," *Automatica*, Vol. 49, pp. 1821-1829, 2013.
- [6] P. Kohan-sedgh, A. Khayatian and M. Asemani, "Conservatism reduction in simultaneous output feedback stabilisation of linear systems," *IET Control Theory Appl.*, Vol. 10, No. 17, pp. 2243-2250, 2016.
- [7] B. Ho-Mock-Qai and W. P. Dayawansa, "Simultaneous stabilization of linear and nonlinear systems by means of nonlinear state feedback," *SIAM J. Control Optim.*, Vol. 37, pp. 1701-1725, 1999.
- [8] J. L. Wu, "Simultaneous stabilization for a collection of single-input nonlinear systems," *IEEE transactions on automatic control*, Vol. 50, No. 3, pp. 328-337, 2005.
- [9] J. Xu, L. Xie and Y. Wang, "Simultaneous Stabilization and Robust Control of polynomial non-linear system Using SOS techniques," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 54, No. 8, pp. 1892-1897, 2009.
- [10] P. Kohan-sedgh, A. Khayatian and N. Behmanesh-Fard, "Simultaneous stabilization of polynomial nonlinear systems via density functions," *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 357, N. 3, pp. 1690-1706, 2020.
- [11] A. Dastaviz, T. Binazadeh and Y. Cui, "A novel control Lyapunov-Krasovskii functional methodology for simultaneous stabilization of a set of multiple time-delays nonlinear systems," *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 358, No. 12, pp. 6101-6120, 2021 (doi: 10.1016/j.jfranklin.2021.05.036).
- [12] I. Bessa, P. Puig and R. Palhares, "TS fuzzy reconfiguration blocks for fault tolerant control of nonlinear systems," *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 357, No. 8, pp. 4592-4623, 2020.
- [13] A. Naseri and M. H. Asemani, "Non-Fragile Robust Strictly Dissipative Control of Disturbed T-S Fuzzy Systems with Input Saturation,"

¹ Lyapunov-Krasovskii

² membership functions

³ Control Lyapunov Function

⁴ Almost stability

⁵ Parallel Distributed Compensation

⁶ Linear Matrix Inequality

⁷ convex sum property

⁸ trajectories of the system

⁹ Finsler Lemma

¹⁰ Parser