ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۲۳۴۵-۶۴۹۳، شاپا(الکترونیکی): ۲۳۴۵-۶۵۰۷
جلد ۶، شماره ۲ (۱۴۰۰)، صص. ۱۶-۱

http://www.ui.ac.ir
http://math-sci.ui.ac.ir

معادله مسیر نور در فضاهای فرکتالی

علیرضا خلیلی گلمانخانه* و امیر پیشکو

چکیده. بعد فرکتال منحنی‌های کوخ و چزاره دارای مقادیر متفاوتی هستند. با حسابان معمولی مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از این دو منحنی امکان‌پذیر نیست. در این مقاله، نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان حسابان فرکتال را روی مسیر این دو منحنی اعمال کرد. بدین منظور باید تابع پلکانی صحیح منتسب به آنها را بدست آوریم. محاسبه انتگرال مسیر روی این دو منحنی فرکتالی نقطه آغازی برای فرمولبندی و استخراج معادلات لاگرانژ است. انتگرال‌گیری فرکتال و مشتق‌گیری فرکتال روی این دو مسیر فرکتالی بصورت تحلیلی انجام و نتایج در محیط متلب ترسیم می‌شوند. علاوه بر این نشان می‌دهیم که بکارگیری اصل فرما در حسابان فرکتال می‌تواند معادلات مسیر نور در این فضای فرکتالی را استخراج کند.

۱. مقدمه

در فیزیک الف ـ نوع ماده و ب ـ نوع هندسه، فرم و معادلات مربوط به قوانین فیزیک را مشخص می سازند. هندسه اقلیدسی در فیزیک کلاسیک و هندسه ریمانی در نسبیت نقش مهم مدل‌های ریاضی را "به‌عنوان چارچوب اصلی در فیزیک" نشان می‌دهند. در حوزه فیزیک کوانتمی فرکتال‌ها در روش انتگرال مسیر فاینمن مشاهده می‌شوند. تلاشی صورت گرفت تا حسابان معمولی برای آن‌ها استفاده شود، اما به‌دلیل آنکه فرکتال‌ها انتگرال پذیر و مشتق پذیر نیستند موفقیت آمیز نبود [۱، ۵] . فرکتال‌ها بر خلاف اشکال هندسی دیگر با "معادله" قابل نمایش نیستند، بلکه با "فرایند تکراری" یا "فرایند تصادفی" ایجاد می شوند. اخیرا گنگال و همکاران روشی شبه ریمانی، دارای الگوریتم محاسباتی، ارایه کردند. حسابانی که پارویت و گنگال روی زیر مجموعه‌های فرکتال از خط حقیقی معرفی کردند از نوع شبه ریمانی بوده و برای مفاهیمی مثل مشتق معمولی، انتگرال ریمان، معادله دیفرانسیل معمولی مزدوج هرکدام با عناوین F^α ـ مشتق، F^α ـ انتگرال و F^α ـ معادله دیفرانسیل معرفی شد. آنها حتی برای فضاهای سوبولف در حسابان معمولی نیز همتا و مزدوجی با عنوان فضاهای سوبولف توابع F^α ـ مشتق پذیر تعریف کردند. در این روش، حسابانی بر روی فرکتال‌ها از قبیل مجموعه کانتور و منحنی‌های فرکتالی تعریف می‌شود [۱۶، ۱۱، ۱۲، ۱۳]. خوانندگان علاقه‌مند به حوزه پژوهشی حسابان فرکتال می‌توانند منابع مربوط به دو سال اخیر، که بیشتر مربوط به کاربردهای حسابان فرکتال در فیزیک است، را مطالعه نمایند [۳، ۱۴، ۹، ۸، ۴]. به کمک حسابان فرکتال می‌توان مدل‌های فیزیکی برای فضاهای فرکتالی را پیشنهاد کرد که خوشبختانه در بیشتر مواقع به هندسه واقعی طبیعت نزدیکتر است. در این مقاله معادلات لاگرانژ بر روی منحنی‌های کوخ [۱] و چزاره [۲] بیان و همچنین معادلات مسیر نور

عبارات و کلمات کلیدی: حساب فراکتال؛ منحنی کوخ؛ اصل فرما؛ معادلات لاگرانژ؛ معادلات.
دبیرتخصصی رابط: سعید مقصودی
نوع مقاله: پژوهشی
تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۴/۴ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۹/۲۱
* نویسنده مسئول

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.129267.1439

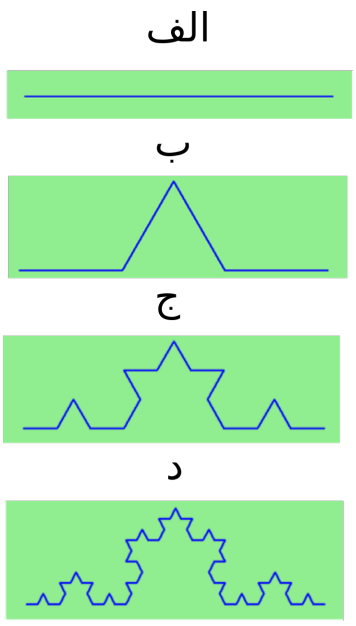
[1] helge von koch (1870 - 1924) [2] ernesto cesàro (1859-1906)

در فضای فرکتالی برای آنها محاسبه و رسم می‌شود. منحنی‌های فرکتالی کوخ و چزاره به دلیل شکسته بودن یا اعوجاج زیاد دیفرانسیل پذیر و انتگرال پذیر نیستند، لذا امکان استفاده از حسابان معمولی، که شامل انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری برای توابعی با دامنه که شامل این منحنی‌های فرکتالی می شود، برای آنها وجود ندارد. در این مقاله حسابان فرکتال، که نسخه جدیدی از نوع حسابان کسری [۱۷] و تعمیم یافته حسابان معمولی است، را روی این دو منحنی فرکتالی بکار می‌گیریم. بخش‌های مختلف مقاله به ترتیب زیر می باشند: در بخش ۲ به تشریح حسابان فرکتالی بر روی منحنی‌های فرکتالی می‌پردازیم. در بخش ۳ معادلات تعمیم یافته فرکتالی لاگرانژ برای این دو مسیر فرکتالی استخراج و ترسیم می شوند. بهینه‌سازی مسیر تنها برای مسیر ذرات نیست بلکه مسیر بهینه می‌تواند برای نور هم بدست آید. بخش ۴ نیز به معادله مسیر نور روی منحنی‌های کوخ و چزاره تخصیص یافته است.

۲. حسابان فرکتال برای منحنی فرکتالی کوخ یا چزاره

حسابان فرکتالی تنها روی مجموعه گسسته مثل مجموعه کانتور فرمول‌بندی نشده است، گنگال و همکاران در [۱۳] این حسابان را روی منحنی‌های فرکتالی مثل منحنی کوخ گسترش دادند. در این بخش مروری به کاربرد حسابان فرکتالی روی منحنی فرکتالی کوخ یا چزاره، بدون اثبات، داریم. خواننده برای جزئیات بیشتر به مقالات [۱۱، ۱۲، ۱۳، ۶] مراجعه کند. در این مقاله ما به‌صورت خاص به مطالعه روی منحنی‌های فرکتالی کوخ و چزاره می‌پردازیم که خود می‌توانند با معادلات پارامتری نشان داده شوند [۶].

زبان‌های برنامه نویسی به طور کلی عمل "تکرار" را پشتیبانی می‌کنند، به این معنی که برای حل یک مسئله، توابع می توانند خود را برای حل مسائل فرعی کوچکتر فراخوانی کنند. یک فرکتال [۱۶] منحنی است که دارای خاصیت خود تشابه است، بدین معنا که می‌توان آن را بر حسب خودش تعریف کرد. به عنوان مثال یک منحنی کوخ مرتبه صفر یک خط راست است. منحنی کوخ مرتبه ۱ به این صورت به دست می آید: به جای ترسیم فقط یک خط، چهار بخش کوچکتر را در الگوی نشان داده شده در زیر رسم کنیم. حالا اگر این الگوی کوخ را دوباره روی هر یک از بخش‌های منحنی کوخ مرتبه ۱ تکرار کنیم، چه اتفاقی می افتد؟ با تکرار مجدد الگوی ما منحنی کوخ مرتبه ۳ بدست می‌آید(شکل ۱). با کد ساده زیر میتوان این منحنی را در پایتون رسم کرد.



شکل ۱: منحنی کوخ

```
import turtle
def koch(t، order، size):
"""
Make turtle t draw a Koch fractal of 'order' and 'size'.
Leave the turtle facing the same direction.
"""

if order == ۰:  The base case is just a straight line
t.forward(size)
else:
koch(t، order-۱، size/۳)  Go ۱/۳ of the way
t.left(۶۰)
koch(t، order-۱، size/۳)
t.right(۱۲۰)
koch(t، order-۱، size/۳)
t.left(۶۰)
koch(t، order-۱، size/۳)
```

تعریف ۱.۲. یک فرکتال (منحنی) $F \subset \mathbb{R}^n$ به‌شکل پیوسته قابلیت پارامتری شدن دارد اگر تابعی پیوسته، یک به یک و پوشا روی Fباشد و به شکل زیر وجود داشته باشد چنان‌که [۱۳]

$$w(t) : [a_\circ, b_\circ] \subset [a, b] \to F \subset \mathbb{R}^n, \tag{۱}$$

به‌عنوان مثال مسیر حرکت براونی یک ذره را در نظر بگیرید، این مثالی از فرکتال (منحنی) است که یک تابع پیوسته است که در بسیاری از نقاط یا حتی مثل تابع وایراشتراس در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیست. مطابق با تعریف بالا تابع وایراشتراس هم یک منحنی فرکتالی است. فرض کنید که منحنی فرکتالی کوخ یا چزاره دارای رابطه پارامتری به‌صورت زیر باشند

$$w(t) : [a_\circ, b_\circ] \subset [a, b] \to F, \tag{۲}$$

$a\ ,\ b \in \mathbb{R}$. و در اینجا F فرکتال (منحنی) کوخ یا چزاره می باشد و فرض می‌شود تابع $w(t)$ پیوسته، پوشا و یک به یک است. تابع جرم برای منحنی فرکتالی کوخ یا چزاره به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۱۳]:

تعریف ۲.۲. برای هر منحنی فرکتالی کوخ یا چزاره با یک افراز $P_{[a,b]} = \{a = t_\circ, \ldots, t_n = b\}$ تابع γ^α به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۱۳]:

$$\gamma^\alpha(F, a, b) = \lim_{\delta \to \circ} \inf \sum_{i=\circ}^{n-۱} \frac{|w(t_{i+۱}) - w(t_i)|}{\Gamma(\alpha + ۱)}, \tag{۳}$$

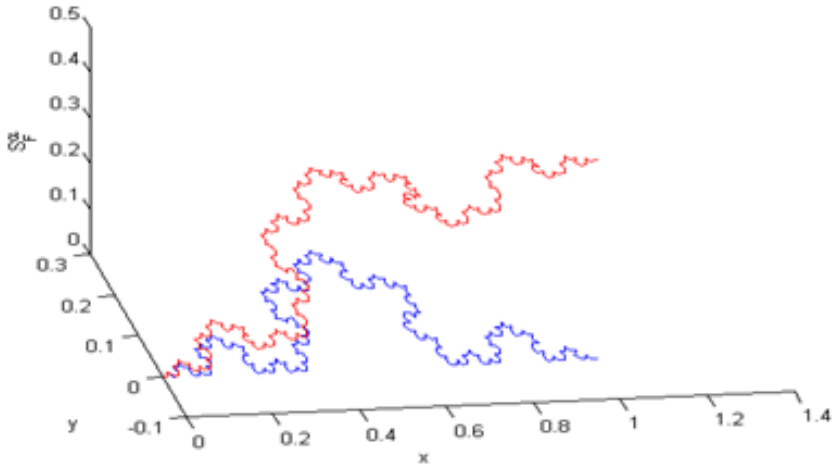
در اینجا inf به‌روی تمام افرازهایی است در آن $P \leq \delta$ و $\Gamma(\alpha + ۱)$ تابع گاما بوده و α بعد هاسدورف مجموعه F است. و $|\cdot|$ نرم اقلیدسی بر روی $\mathbb{R}^۳$ است. تابع پلکانی نسبت داده شده به هر دو منحنی فرکتالی پس از تعریف رسم می‌شود.

تعریف ۳.۲. تابع پلکانی متناظر با یک منحنی فرکتالی کوخ یا چزاره F به صورت زیر تعریف می شود [۱۳]:

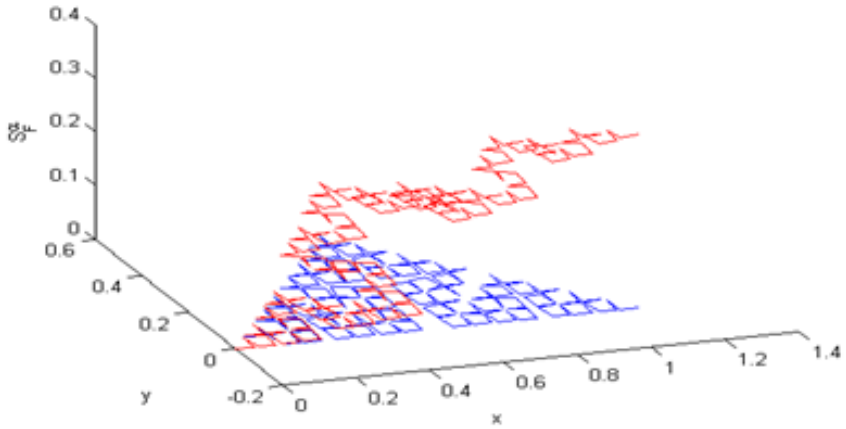
http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.129267.1439

$$S_F^{\alpha}(t) = \begin{cases} \gamma^{\alpha}(F, p_{\circ}, t), & t \geq p_{\circ} \\ -\gamma^{\alpha}(F, p_{\circ}, t), & t < p_{\circ} \end{cases} \quad (۴)$$

در اینجا $p_{\circ} \in [a_{\circ}, b_{\circ}]$ یک نقطه اختیاری است.



شکل ۲: منحنی کوخ (آبی) و تابع پلکانی منتسب به آن (قرمز)



شکل ۳: منحنی چزاره (آبی) و تابع پلکانی منتسب به آن (قرمز)

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.129267.1439

در شکلهای ۲ و ۳ منحنی کوخ[3] و چزاره[4] و تابع پلکانی صحیح متناظر با آنها رسم شده‌اند.اشکال برای کمیت $S_F^{\alpha}(t)$ به ازای $\alpha = ۱/۲۶$ برای منحنی کوخ و $\alpha = ۱/۷۸$ برای منحنی چزاره رسم شده اند. در حسابان فرکتال به‌جای بعد هاسدورف و بعد شمارش جعبه‌ای بعدی به‌نام "بعد گاما" تعریف می‌شود. اگر مجموعه F فشرده باشد بعد هاسدورف آن با بعد گاما با هم برابرند.

تعریف ۴.۲. بعدγ برای هر منحنی فرکتالی F به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۳]:

$$dim_{\gamma}(F) = \inf\{\alpha : \gamma^{\alpha}(F,a,b) = ۰\} = \sup\{\alpha : \gamma^{\alpha}(F,a,b) = \infty\}\ . \tag{۵}$$

وقتی تابع پلکانی و بعد گاما تعریف شدند می‌توان در مرحله بعدی مشتق فرکتالی را در هر نقطه روی منحنی فرکتالی کوخ یا چزاره تعریف نمود.

تعریف ۵.۲. فرض کنیم $F \subset \mathbb{R}$ فرکتال باشد و $f : F \to \mathbb{R}$ مشتق فرکتالی آن به صورت

$$D_F^{\alpha} f(\theta) = F - \lim_{\theta' \to \theta} \frac{f(\theta') - f(\theta)}{J(\theta') - J(\theta)}, \tag{۶}$$

تعریف می‌شود [۱۳]، در اینجا $J(\theta) = S_F^{\alpha}\left(w^{-۱}(\theta)\right)$, $\theta \in F$ به شرط اینکه این حد وجود داشته باشد.

تعریف ۶.۲. فرض کنید $F \subset \mathbb{R}$ فرکتال باشد، عدد حقیقی l حد فرکتالی تابع $f : F \to \mathbb{R}$ است اگر

$$(\forall \theta' \in F) \qquad (|\theta' - \theta| < \delta \Rightarrow |f(\theta') - l| < \epsilon) \tag{۷}$$

در اینجا $|.|$ نماد قدرمطلق است و هرگاه عدد l وجود داشته باشد [۱۳]. می‌توان نتیجه را به صورت زیر نوشت

$$l = F - \lim_{\theta' \to \theta} f(\theta') \tag{۸}$$

برای تعریف انتگرال فرکتال روی منحنی فرکتالی کوخ یا چزاره F لازم است ابتدا کران بالا و پایین را تعریف نمود [۱۳].

تعریف ۷.۲. قسمتی از منحنی فرکتالی کوخ یا چزاره F به صورت زیر

$$C(t_۱ - t_۲) = \{w(t') : t \in [t_۱, t_۲]\}, \tag{۹}$$

و همچنین

$$M[f, C(t_۱, t_۲)] = \sup_{\theta \in C(t_۱, t_۲)} f(\theta), \tag{۱۰}$$

$$m[f, C(t_۱, t_۲)] = \inf_{\theta \in C(t_۱, t_۲)} f(\theta). \tag{۱۱}$$

تعریف می‌شود [۱۳].

تعریف ۸.۲. کران بالا و پایین به ترتیب برای تابع $f : F \to \mathbb{R}$ بروی افراز $P_{[a,b]}$ به صورت زیر

$$U^{\alpha}[f, F, P] = \sum_{i=۰}^{n-۱} M[f, C(t_i,\ t_{i+۱})]\left[S_F^{\alpha}(t_{i+۱}) - S_F^{\alpha}(t_i)\right], \tag{۱۲}$$

$$L^{\alpha}[f, F, P] = \sum_{i=۰}^{n-۱} m[f, C(t_i,\ t_{i+۱})]\left[S_F^{\alpha}(t_{i+۱}) - S_F^{\alpha}(t_i)\right], \tag{۱۳}$$

[3]koch curve [4]cesàro curve

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.129267.1439

تعریف ۹.۲. انتگرال فرکتالی برای تابع $f : F \to \mathbb{R}$ بر روی منحنی فرکتالی کوخ یا چزاره به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۳]:

$$\int_{C(a,b)} f(\theta) d_F^\alpha \theta \tag{۱۴}$$

$$= \underline{\int_{C(a,b)} f(\theta) d_F^\alpha \theta} = \sup \lim_{P[a,b]} L^\alpha[f,F,P] = \overline{\int_{C(a,b)} f(\theta) d_F^\alpha \theta} = \inf \lim_{P[a,b]} L^\alpha[f,F,P]. \tag{۱۵}$$

قضیه ۱۰.۲. [۱۳، قضیه اساسی حساب و دیفرانسیل] *قسمت اول: اگر تابع $f : F \to \mathbb{R}$ دیفرانسیل پذیر نسبت به مشتق فرکتالی باشد و $f : F \to \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته فرکتالی باشد به طوری که داشته باشیم:*

$$g(\theta) = D_F^\alpha f(\theta) \tag{۱۶}$$

آن‌گاه

$$\int_{C(a,b)} g(\theta) d_F^\alpha \theta = f(w(b)) - f(w(a)). \tag{۱۷}$$

قسمت دوم:اگر تابع $f : F \to \mathbb{R}$ محدود و پیوسته فرکتالی بر روی $C(a,b)$ و

$$h(w(t)) = \int_{C(a,b)} f(\theta) d_F^\alpha \theta, t \in [a,b], \tag{۱۸}$$

در اینجا

$$D_F^\alpha h(\theta) = f(\theta). \tag{۱۹}$$

برای اثبات به مقاله مراجعه کنید [۱۳]

فرمولهای مهم در حساب فرکتال ها:

۱ـ اگر $f(\theta) = k \in \mathbb{R}$ باشد در این‌صورت داریم:

$$D_F^\alpha f(\theta) = 0. \tag{۲۰}$$

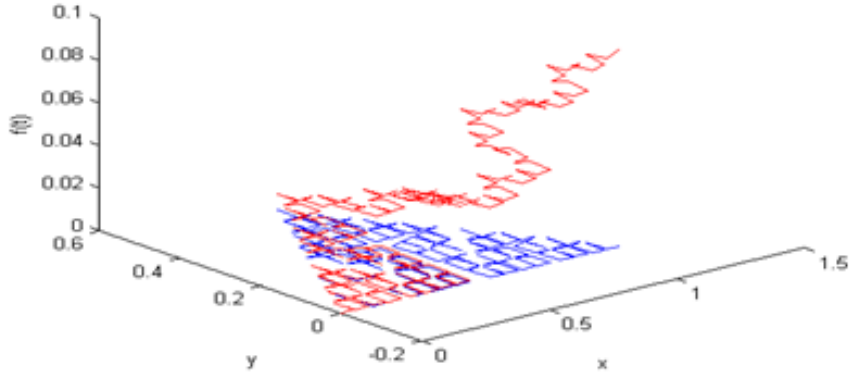
۲ـ اگر $f(\theta) = 1$ داریم

$$\int_{C(a,b)} 1 d_F^\alpha \theta = S_F^\alpha(b) - S_F^\alpha(a) = J(w(b)) - J(w(a)). \tag{۲۱}$$

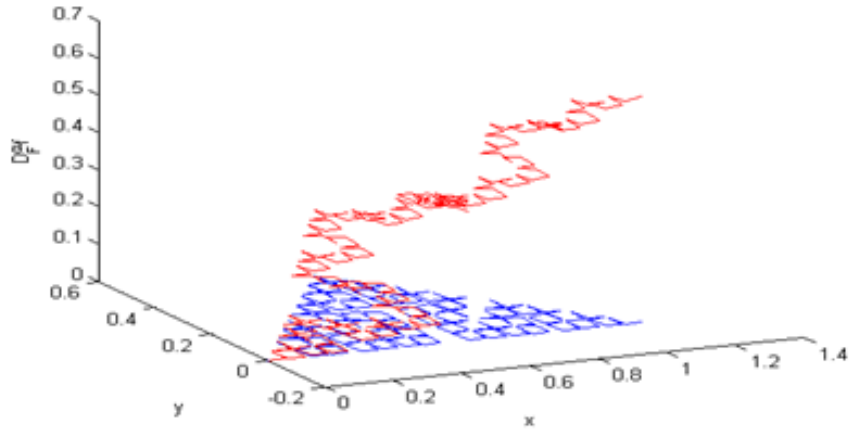
مثال ۱۱.۲. اگر تابع $f(t) = (S_F^\alpha(t))^2$ بر روی منحنی چزاره باشد، مشتق و انتگرال این تابع به صورت زیر است:

$$D_F^\alpha f(t) = 2 S_F^\alpha(t) \chi_F(t), \qquad \int f(t) d_F^\alpha t = \frac{(S_F^\alpha(t))^3}{3} + k. \tag{۲۲}$$

نمودار های تابع f و مشتق و انتگرال فرکتالی آن روی دامنه منحنی چزاره را در شکل های ۴ ، ۵ و ۶ رسم کردیم.



شکل ۴: نمودار تابع $f(t)=(S_F^{\alpha}(t))^{۲}$ (قرمز) با دامنه منحنی چزاره (آبی)

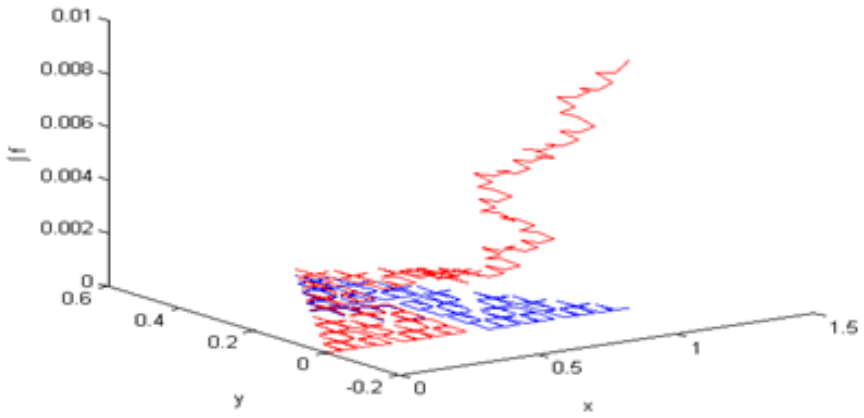


شکل ۵: نمودار مشتق تابع $f(t)=(S_F^{\alpha}(t))^{۲}$ (قرمز)با دامنه منحنی چزاره (آبی)

۳. مکانیک لاگرانژی بر روی منحنی فرکتالی

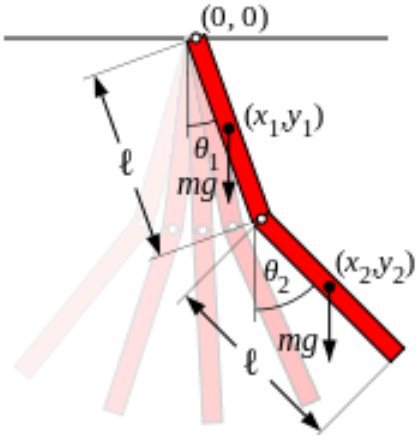
با استفاده از قوانین اول تا سوم نیوتون و قانون جاذبه می‌توان علت حرکت اجسام را بیان (دینامیک) و معادلات حرکت سیستم مکانیکی را بدست آورده و توصیف (سینماتیک) نمود. اما اگر مسائل مطرح شده در مکانیک پیچیده‌تر باشند آیا می‌توان با استفاده از روش‌های دیگر، ساده‌تر به معادلات حرکت اجسام دست پیدا کرد؟ بعنوان مثال اگر بخواهید حرکت آونگ را بررسی کنید مشکل خاصی در سینماتیک و دینامیک آونگ ساده با مکانیک نیوتونی ندارید، اما اگر بخواهید مسئله آونگ دوگانه (شکل ۷) یا آونگ سه‌گانه را حل کنید نیاز به ابزار ریاضی مناسب‌تری غیر از کار با بردارها و اسکالرها دارید. باید با مکانیک لاگرانژی یا مکانیک

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.129267.1439



شکل ۶: نمودار انتگرال تابع $f(t) = (S_F^{\alpha}(t))^2$ (قرمز)با دامنه منحنی چزاره (آبی)

هامیلتونی و مفاهیم کنش، اصل کمترین کنش و شاخه ریاضی حساب تغییرات [5] آشنا شوید.
ساده ترین سیستم مکانیکی یک‌بعدی که تحت تاثیر نیروی $F = F(x)$ حرکت می‌کند با قانون دوم نیوتن توصیف می‌شود



شکل ۷: استفاده از حساب تغییرات در بدست آوردن معادلات حرکت آونگ دوگانه

$$F = m\frac{dv}{dt} = \frac{dp}{dt}, \qquad (۲۳)$$

F نیروی وارد بر ذره، m جرم ذره، $v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$ سرعت ذره ، و $p = mv$ اندازه حرکت ذره می‌باشند. می‌توان با استفاده از تعاریف انرژی جنبشی $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \cdot \dot{x}^2$ و انرژی پتانسیل $F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$ رابطه قانون دوم نیوتن (معادله ۲۳) را

[5] calculus of variations

بصورت دیگری نوشت که آماده تعمیم به مسائل چند بعدی نیز خواهد بود.

$$\frac{\partial T}{\partial v} = mv = \frac{\partial T}{\partial \cdot x} = m \cdot x. \tag{۲۴}$$

همچنین برای $F = F(x)$ میتوان نوشت $F(x) = -\frac{\partial U}{\partial x}$ با تعریف تفاضل انرژی جنبشی و پتانسیل بعنوان تابع لاگرانژ $L = T - U$ قانون دوم نیوتن بصورت معادله لاگرانژ نوشته می‌شود

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \cdot x}) - \frac{\partial L}{\partial x} = ۰, \tag{۲۵}$$

در معادله بالا $\frac{\partial T}{\partial \cdot x} = \frac{\partial L}{\partial \cdot x}$ و $\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$. دلیل آن هم آناست که $\frac{\partial T}{\partial x} = ۰$ و $\frac{\partial U}{\partial \cdot x} = ۰$.

از نظر تاریخی، مکانیک اولین شاخه‌ای از فیزیک است که به‌صورت علمی دقیق توسعه یافت. مکانیک علم حرکات اجسام مادی است و می‌توان آن‌را به سه شاخه سینماتیک، دینامیک و استاتیک تقسیم کرد. بسیاری از کاربردهای مکانیک کلاسیک را می‌توان بطور مستقیم براساس قوانین حرکت نیوتن استوار دانست. اما راه‌های دیگری نیز برای بیان اصول مکانیک کلاسیک وجود دارد. برای مثال می‌توان معادلات لاگرانژ و هامیلتون را نام برد. البته این‌ها نظریه‌های جدید فیزیکی نیستند، زیرا می‌توان آن‌ها را از قوانین نیوتن بدست آورد، بلکه روش‌های دیگری برای بیان آن نظریه فیزیکی‌اند. در آن‌ها مفاهیم پیشرفته‌تر ریاضی به‌کار رفته است. آن‌ها راه حل‌هایی برای پاره‌ای مسائل ارائه می‌دهند که حلشان مستقیما بر پایه قوانین نیوتن بسیار دشوار می‌بود. از طرف دیگر بیان ریاضی پیشرفته‌تر مکانیک کلاسیک به منزله نقطه شروع کار برای نظریه‌های نسبیت و کوانتوم هم هستند.

نتیجه حاصل از کاربرد مستقیم قوانین نیوتن در مورد دستگاهی مکانیکی عبارت است از مجموعه‌ای از معادلات حرکت بر حسب مختصات دکارتی هر یک از ذراتی که دستگاه از آن‌ها ساخته شده است. در بسیاری از حالات این مختصات مناسب‌ترین مختصات برای حل مسئله یا توصیف حرکت دستگاه نیست. برای مثال در مسئله حرکت یک تک ذره تحت تاثیر نیروی مرکزی وارد کردن مختصات قطبی در صفحه حرکت ذره مناسب است. بطور کلی کلیه دستگاه‌های مختصات مختلف همراه با دستگاه مختصات دکارتی را جزو مختصات تعمیم یافته به‌حساب می‌آوریم. علاقه داریم روشی یک شکلی برای نوشتن و حل معادلات حرکت در هر دستگاه مختصات دلخواه داشته باشیم. چنین روشی توسط لاگرانژ ابداع شد. وقتی بخواهیم راجع به دستگاهی فیزیکی صحبت کنیم که به وسیله مختصات تعمیم یافته توصیف شده باشد و موقتا از مشخص کردن مختصات آن چشم‌پوشی کنیم، رسم چنین است که هر مختصه را با حرف q و یک اندیس عددی نشان دهیم. مجموعه‌ای از n مختصات تعمیم یافته به‌صورت $q_۱, q_۲, \ldots, q_n$ نوشته می‌شود. مکان ذره‌ای که در فضا حرکت می‌کند به وسیله سه مختصه معین می‌شود که ممکن است مختصات دکارتی x, y, z یا مختصات کروی r, θ, φ یا مختصات استوانه‌ای ρ, z, φ یا بطور کلی $q_۱, q_۲, q_۳$ باشد.

انرژی جنبشی یک ذره در مختصات دکارتی و قطبی به ترتیب برابر است با

$$T = \frac{۱}{۲}m(\cdot x^۲ + \cdot y^۲); T = \frac{۱}{۲}m(\cdot r^۲ + r^۲ \cdot \theta^۲). \tag{۲۶}$$

برای مولفه‌های اندازه‌حرکت داریم

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \cdot x} = m \cdot x, p_y = \frac{\partial T}{\partial \cdot y} = m \cdot y; p_r = \frac{\partial T}{\partial \cdot r} = m \cdot r, p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \cdot \theta} = m \cdot \theta. \tag{۲۷}$$

اندازه حرکت تعمیم یافته p_k مربوط به مختصه تعمیم یافته q_k به صورت $p_k = \frac{\partial T}{\partial \cdot q_k}$ است .

معادلات لاگرانژ را از راه دیگری هم می‌توان بدست آورد [۲]. ابتدا با بهینه‌سازی توابع تک متغیره آغاز می‌کنیم. در حساب تک متغیره می‌توان مینیمم یا ماکزیمم توابع را بدست آورد. مینیمم یا ماکزیمم موضعی می‌تواند در هر نقطه‌ای که مشتق تابع صفر شود

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.129267.1439

وجود داشته باشد. در حساب تغییرات هدف ما پیدا کردن نقاط معینی از تابعکی[۶] است.

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, \frac{dy}{dx})dx. \quad (۲۸)$$

اما در مکانیک کلاسیک انتگرال معادله ۲۸ از نوع زمانی است و به آن کنش S [۷] گفته می‌شود و با انتگرال در بازه زمانی $[t_0, t_1]$ با رابطه زیر بیان می‌شود

$$S[q(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q, \frac{dq}{dt})dt. \quad (۲۹)$$

به معادلات بدست آمده در ریاضی معادلات اولر–لاگرانژ گفته می‌شود در حالیکه در فیزیک به این معادلات با جایگزینی متغیر زمان t بجای x معادلات لاگرانژ یک بعدی گفته می‌شود.

به طور خلاصه، تفاوتهای اصلی بین مکانیک لاگرانژی و نیوتنی استفاده از انرژیها و مختصات تعمیم یافته در مکانیک لاگرانژی به جای نیروها و قیدها در مکانیک نیوتنی است. مزیت مکانیک لاگرانژی نسبت به مکانیک نیوتنی این است که قابلیت توسعه آن به سایر نظریه‌های فیزیکی مثل شاخه نورشناسی [۸] را دارد که در بخش بعدی به آن می‌پردازیم.

برای مطالعه حرکت آونگ دوگانه در مکانیک لاگرانژی $L = T - U$ (تفاضل انرژی جنبشی T و انرژی پتانسیل سیستم U)با مختصات تعمیم یافته (θ_1, θ_2)و سرعت‌های تعمیم یافته (v_1, v_2)سروکار داریم، در حالیکه در مکانیک هامیلتونی $H = T+U$(مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم)، به‌عنوان رهیافت دیگر در کنار مکانیک لاگرانژی، با مختصات تعمیم یافته(θ_1, θ_2) و اندازه حرکت‌های تعمیم یافته (p_1, p_2)سروکار داریم. رابطه بین هامیلتونی و لاگرانژی یک سیستم فیزیکی برابر است با:

$$H = \sum_{i=1}^{2} p_i q_i - L = p_1 q_1 + p_2 q_2 - L = p_1\theta_1 + p_2\theta_2 - L \quad (۳۰)$$

حساب تغییرات ابزار ریاضی مناسبی برای مسائلی از این قبیل می‌باشد و معادلات اولر–لاگرانژ از آن استخراج می‌شوند.

کنشS ،انتگرال مسیر زمانی از نوع معین تفاضل انرژی جنبشی T و انرژی پتانسیل U است یعنی:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} Ldt = \int_{t_1}^{t_2} (T - U)dt.$$

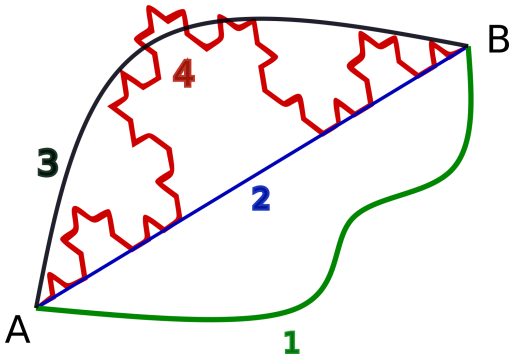
این انتگرال می‌تواند برای مسیرهای مختلفی محاسبه شود و مقادیر متفاوتی داشته باشد (شکل ۸)، اما مسیری که برای آن این انتگرال کمینه باشد اهمیت ویژه ای دارد و در واقع خصلت و رفتار سیستم‌های فیزیکی را در طبیعت نشان می‌دهد. سیستم فیزیکی هم می‌تواند از نوع مکانیکی، الکتریکی، و نوری باشد و باید تابع لاگرانژی مربوط به هر سیستم را در داخل انتگرالده قرار داد. واقعیت این است که بسیاری از قوانین فیزیک از طریق اصل کمترین کنش بدست می‌آیند [۱۵]. حالا کنش A یک سیستم مکانیکی یک بعدی با مختصه تعمیم یافته q را در نظر می گیریم و کنش آن را کمینه می‌کنیم، یعنی

$$S = \int_a^b L(t, q(t), q'(t))dt \quad (۳۲)$$

که برای کمینه‌سازی این کنش، مشتق آن را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\delta S = 0 \quad (۳۳)$$

[6] functional [7] action [8] optics



شکل ۸: محاسبه کنش برای مسیرهای مختلف .

و یا

$$\delta\int_a^b L(t,q(t),q'(t))dt = \int_a^b (\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial q'}\frac{d}{dt}\delta q(t))dt$$
$$= \int_a^b (\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q'})\delta q dx + \frac{\partial L}{\partial q'}(b)\delta q(b) - \frac{\partial L}{\partial q'}(a)\delta q(a) = 0$$

با در نظر گرفتن شرایط مرزی زیر

$$q(b) = q(a) = 0. \quad (۳۶)$$

معادلات حرکت آن سیستم را به صورت زیر بدست می آوریم [۱۵].

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (۳۷)$$

در این بخش می‌خواهیم معادلات تعمیم یافته لاگرانژ بر روی منحنی فرکتالی را بیان کنیم تا در ادامه و به کمک آن در بخش بعدی معادلات مسیر نور در فضای فرکتالی دیفرانسیل ناپذیر را به‌دست آوریم. به‌جای مختصات تعمیم یافته q_i با تابع پلکانی $S_F^t(w\,(t)$ سروکار داریم. با فرض اینکه تابع لاگرانژ مربوط به سیستم پایستار بر روی منحنی فرکتالی کوخ یا چزاره به‌صورت زیر باشد [۷]

$$L_F^\alpha(t, S_F^t(w\,(t)),\ D_F^\alpha S_F^\alpha(w\,(t))). \quad (۳۸)$$

در این‌صورت اصل کنش تعمیم یافته هامیلتون بر روی منحنی فرکتالی کوخ یا چزاره به صورت زیر است:

$$\delta\int_a^b L_F^\alpha(t, S_F^\alpha(w(t)), D_F^\alpha S_F^\alpha(w(t)))d_F^\alpha t = \delta A = 0. \quad (۳۹)$$

در اینجا

$$A = \int_a^b L_F^\alpha(t, S_F^t(w\,(t)),\ D_F^\alpha S_F^\alpha(w\,(t)))d_F^\alpha t \quad (۴۰)$$

به منظور مینیمم‌سازی این تابعکی با فرض شرایط مرزی زیر

$$\delta(S_F^\alpha((w(b))) = \delta(S_F^\alpha(w(a))) = 0. \quad (۴۱)$$

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.129267.1439

ابتدا یک مسیر نزدیک به مسیری که کنش را کمینه می‌کند در نظر گرفته و کنش فرکتالی مربوط به آن را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$A_\eta = \int_a^b L_F^\alpha(t, S_F^\alpha(w(t)) + \eta G_F^\alpha(w(t)), D_F^\alpha S_F^\alpha(w(t)) + \eta D_F^\alpha G_F^\alpha(w(t)))d_F^\alpha t \tag{۴۲}$$

$$= \int_a^b L_{F,\eta}^\alpha d_F^\alpha t, \tag{۴۳}$$

در اینجا

$$G_F^\alpha(w(a)) = G_F^\alpha(w(b)) = ۰. \tag{۴۴}$$

با مشتق‌گیری از A_η نسبت به η خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\frac{dA_\eta}{d\eta} &= \int_a^b \left(\frac{dL_{F,\eta}^\alpha(t,Q,Q^\alpha}{d\eta}\right) d_F^\alpha t \\ &= \int_a^b \left(\frac{dt}{d\eta}\frac{\partial L_{F,\eta}^\alpha}{\partial t} + \frac{dQ}{d\eta}\frac{\partial L_{F,\eta}^\alpha}{\partial Q} + \frac{dQ^\alpha}{d\eta}\frac{\partial L_{F,\eta}^\alpha}{\partial Q^\alpha}\right) d_F^\alpha t\end{aligned} \tag{۴۵}$$

از آنجائی‌که $\frac{dt}{d\eta} = ۰$ لذا خواهیم داشت:

$$\frac{dA_\eta}{d\eta} = \int_a^b \left(\frac{dQ}{d\eta}\frac{\partial L_{F,\eta}^\alpha}{\partial Q} + \frac{dQ^\alpha}{d\eta}\frac{\partial L_{F,\eta}^\alpha}{\partial Q^\alpha}\right) d_F^\alpha t \tag{۴۶}$$

در اینجا فرض می‌کنیم:

$$Q = S_F^\alpha(w(t)) + \eta G_F^\alpha(w(t)),\ Q^\alpha = D_F^\alpha S_F^\alpha(w(t)) + \eta D_F^\alpha G_F^\alpha(w(t))), \tag{۴۷}$$

لذا خواهیم داشت:

$$\frac{dA_\eta}{d\eta} = \int_a^b \left(G_F^\alpha(w(t))\frac{\partial L_{F,\eta}^\alpha}{\partial Q} + D_F^\alpha G_F^\alpha(w(t)))\frac{\partial L_{F,\eta}^\alpha}{\partial Q^\alpha}\right) d_F^\alpha t \tag{۴۸}$$

اگر $\eta = ۰$ در آن‌صورت $G_F^\alpha(w(t)) = S_F^\alpha(w(t))$ و A_η اکسترمم خواهد شد:

$$\left.\frac{dA_\eta}{d\eta}\right|_{\eta=۰} = ۰, \tag{۴۹}$$

و یا

$$\int_a^b \left(S_F^\alpha(w(t))\frac{\partial L_F^\alpha}{\partial S_F^\alpha(w(t))} + D_F^\alpha S_F^\alpha(w(t)))\frac{\partial L_F^\alpha}{\partial D_F^\alpha S_F^\alpha(w(t))}\right) d_F^\alpha t = ۰ \tag{۵۰}$$

با استفاده از قاعده انتگرال جزء به جزء در حساب فرکتال‌ها می‌توان نوشت

$$\int_a^b \left(\frac{\partial L_F^\alpha}{\partial S_F^\alpha(w(t))} - D_{F,t}^\alpha \frac{\partial L_F^\alpha}{\partial D_F^\alpha S_F^\alpha(w(t))}\right) G_F^\alpha(w(t)) d_F^\alpha t + \left[G_F^\alpha(w(t))\frac{\partial L_F^\alpha}{\partial D_F^\alpha S_F^\alpha(w(t))}\right]_a^b = ۰ \tag{۵۱}$$

با توجه معادله به ۴۴ معادله لاگرانژی تعمیم یافته زیر بدست می‌آید :

$$D_{F,w}^\alpha L_F^\alpha - D_{F,t}^\alpha\, D_{F,v}^\alpha L_F^\alpha = ۰, \tag{۵۲}$$

در اینجا

$$v = D_F^\alpha S_F^\alpha(w(t)),\ D_{F,w}^\alpha L_F^\alpha = \frac{\partial L_F^\alpha}{\partial S_F^\alpha(w(t))}. \tag{۵۳}$$

۴. معادله مسیر نور در فضای فرکتالی

همان‌طور که مکانیک حوزه‌ای از فیزیک است که به حرکت اجسام فیزیکی، به ویژه روابط بین نیرو، ماده و حرکت مربوط می‌شود، نورشناسی نیز شاخه‌ای از فیزیک است که به مطالعه سیستم‌های نوری می‌پردازد. یک سیستم نوری متشکل از عناصری متوالی است که ممکن است شامل لنزها، آینه‌ها، منابع نوری، آشکارسازهای نوری، صفحه‌های نمایشی، منشورهای منعکس کننده، دستگاه‌های پراکننده، فیلترها، فیلم‌های نازک و فیبر نوری باشد. درصورتی‌که اصل وردشی روی کنش یک سیستم نوری اعمال شود معادله مسیر نور را خواهد داد.اصل فرما یا اصل کوتاه‌ترین زمان اصلی است که بیان می‌دارد که مسیر پیموده‌شده بین دو نقطه توسط یک پرتو نور مسیری خواهد بود که به‌توان در کوتاه‌ترین زمان پیمود. اگر T فاصله زمانی برای حرکت پرتو نور بین نقاط A و B باشد. لذا می توان نوشت

$$T(t) = \int_A^B dt = \int_A^B \frac{ds}{v} \tag{۵۴}$$

که در اینجا v سرعت نور بین این دو نقطه در محیط، n ضریب شکست نور در محیط و c سرعت نور در خلاء می‌باشد $(v = c/n)$.

$$ds = \sqrt{dx^۲ + dy^۲} = \sqrt{۱ + (\frac{dy}{dx})^۲}\, dx. \tag{۵۵}$$

می باشد. طبق اصل فرما مسیر حرکت نور بین این دو نقطه از معادله زیر بدست می اید

$$\delta T(t) = \delta \int_A^B \frac{ds}{v} = ۰ \tag{۵۶}$$

مشابه حالت بالا و با توجه به اصل فرما فاصله زمانی$T(t)$ برای حرکت نور بین دو نقطه بر روی منحنی فرکتالی صورت زیر می‌باشد [۱۰]

$$T(t) = \int_{t_A}^{t_B} \frac{۱}{c} \sqrt{۱ + (D^\alpha_{F,t} S^\alpha_F(w))^۲}\, d^\alpha_F t, \tag{۵۷}$$

لذا تابع لاگرانژ معادل برای نور در خلا $v = c$ با مقایسه رابطه های ۵۷ و ۵۴ در فضای فرکتالی به صورت زیر است

$$L^\alpha_F(t, D^\alpha_{F,t} S^\alpha_F(w)) = \sqrt{۱ + (D^\alpha_{F,t} S^\alpha_F(w))^۲} \tag{۵۸}$$

با استفاده از معادلات لاگرانژ ۵۲ روی فرکتال‌ها می توانیم بنویسیم

$$D^\alpha_{F,t}(\frac{D^\alpha_{F,t} S^\alpha_F(w)}{\sqrt{۱ + (D^\alpha_{F,t}, S^\alpha_F(w))^۲}}) = ۰, \tag{۵۹}$$

در اینجا با توجه به تابع لاگرانژ نور، از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$D^\alpha_{F,w} L^\alpha_F = ۰. \tag{۶۰}$$

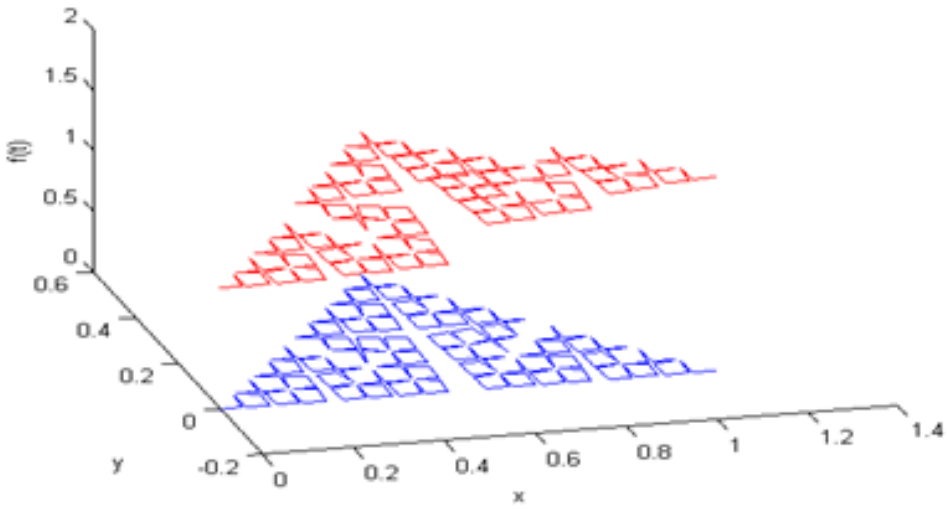
حل معادله ۵۹ با مقایسه آن با معادله استاندارد بصورت زیر بدست می آید:

$$S^\alpha_F(w) = m\, S^\alpha_F(t) + k, \tag{۶۱}$$

که در اینجا m, k ثابت هستند. در شکل ۶ مسیر نور در فضای فرکتالی چزاره رسم شده است. در اینجا اگر $\alpha = ۱$ معادله ۶۱ تبدیل به معادله خط راست بین دو نقطه می‌شود که همان نتیجه حاصل از هندسه اقلیدسی را نشان می‌دهد. یعنی بین دو نقطه نزدیکترین فاصله یک خط راست است که نور آن را در کمینه زمان ممکن طی می‌کند. اگر به شکل ۶ توجه شود شیب این خط راست را می‌توان بر منحنی چزاره مشاهده کرد. یعنی اگر نور روی فضای فرکتالی مانند منحنی فرکتالی چزاره حرکت کند نزدیکترین مسیر بین دو نقطه به صورت شکل ۶ است و نور آن را در حداقل مدت زمان بین این دو نقطه طی می‌کند. لذا با حل این مسئله اثر هندسه فضا را بر

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.129267.1439

روی حرکت و مسیر نور که بین دو نقطه را در زمان کمینه طی کند را مشاهده می‌کنیم و هرچقدر $\alpha < ۲$ بیشتر از یک باشد زمان حرکت بین دو نقطه افزایش می‌یابد .



شکل ۹: مسیرنور در فضای فرکتالی (قرمز) برای منحنی چزاره (آبی) با فرض $m = ۲, k = ۱$ در معادله (۳۱).

۵. تشکر و قدردانی

از پیشنهادات، دقت نظر و حسن نیت داور محترم جهت ارتقاء کیفیت مقاله و استفاده بهتر خوانندگان مقاله کمال تشکر و قدردانی را می‌نمائیم. امید است که تا بالاترین حد ممکن رضایت ایشان جلب شده باشد.

مراجع

[1] L. F. Abbott and M. B. Wise, Dimension of a quantum-mechanical path, *Amer. J. Phys.*, **49** (1981) 37–39.

[2] M. L. Boas, *Mathematical methods in the physical sciences*, John Wiley & Sons, Inc., (2006).

[3] N. Delfan, A. Pishkoo, M. Azhini and M. Darus, Using fractal calculus to express electric potential and electric field in terms of staircase and characteristic functions, *Eur. J. Pure Appl.*, **13** (2020) 19–32.

[4] R. A. El-Nabulsi and A. K. Golmankhaneh, Generalized heat diffusion equations with variable coefficients and its fractalization from black-scholes equation, *Commun. Theor. Phys*, **73** (2021).

[5] R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum mechanics and path integrals*, McGraw-Hill, New York, (1965).

[6] A. K. Golmankhaneh, On the calculus of parameterized fractal curves, *Turk. J. Phys.*, **41** (2017) 418–425.

[7] A. K. Golmankhaneh, A. K. Golmankhaneh and D. Baleanu, Lagrangian and Hamiltonian mechanics on fractals subset of real-line, *Int. J. Theor. Phys.*, **52** (2013) 4210–4217.

[8] A. K. Golmankhaneh and K. Welch, Equilibrium and non-equilibrium statistical mechanics with generalized fractal derivatives: A review, *Mod. Phys. Lett. A*, **36** (2021) 31 pp.

[9] A. K. Golmankhaneh and R. T. Sibatov, Fractal Stochastic Processes on Thin Cantor-Like Sets, *mathematics*, **9** (2021).

[10] V. Lakshminarayanan, A. Ghatak and K. Thyagarajan, *Lagrangian optics*. Springer Science & Business Media, (2002).

[11] A. Parvate and A. D. Gangal, Calculus on fractal subsets of real-line I: Formulation, *Fractals*, **17** (2009) 53–81.

[12] A. Parvate and A. D. Gangal, Calculus on fractal subsets of real line II: Conjugacy with ordinary calculus, *Fractals*, **19** (2011) 271–290.

[13] A. Parvate, S. Satin and A. D. Gangal, Calculus on fractal curves in R^n, *Fractals*, **19** (2011) 15–27.

[14] A .Pishkoo and M. Darus, Using fractal calculus to solve fractal Navier-Stokes equations and simulation of laminar static mixing in COMSOL Multiphysics, *Fractal and Fractional*, **5** (2021) 16 pp.

[15] H. Goldstein, C. Poole and J. Safko, *Classical Mechanics*, Pearson; 3rd edition, London, (2001).

[۱۶] ا. پیشکو و ع. خلیلی گلمانخانه، حساب دیفرانسیل و انتگرال فرکتالی؛ از نظریه تا کاربرد، *ریاضی و جامعه*، **۵** (۱۳۹۹) ۵۵—۶۸

[۱۷] م. ح. اکرمی، حسابان کسری از نظریه تا کاربرد، *ریاضی و جامعه*، **۴** (۱۳۹۶) ۵۶—۶۹.

علیرضا خلیلی گلمانخانه

گروه فیزیک،واحد ارومیه،دانشگاه ازاد اسلامی،ارومیه، ایران

alirezakhalili۲۰۰۲@yahoo.co.in

a.khalili@iaurmia.ac.ir

علیرضا خلیلی گلمانخانه دکترای فیزیک نظری از دانشگاه پونا هندوستان زیر نظر پرفسور گنگال به پایان رسانده است. و همچنین یک فرصت مطالعاتی تحت نظر پروفسور الکساندر بالانکین در دانشگاه (IPN) مکزیکوسیتی داشته است . بعنوان استاد مدعو در دانشگاه وان ترکیه در زمینه فرکتالها همکاری داشته است. ایشان تاکنون بیش از ۸۰ مقاله، دو کتاب و داوری بیش از ۱۰۰ مقاله علمی در مجلات معتبر داشته است.

امیر پیشکو

پژوهشکده فیزیک و شتابگرها، پژوهشگاه علوم و فنون هسته ای

apishkoo@gmail.com

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.129267.1439

Equation of Lightpath in fractal spaces

Alireza Khalili Golmankhaneh* and Amir Pishkoo

Abstract: The fractal dimension of Koch and Cesàro curves has different values. These two curves are not differentiable and integrable in the sense of ordinary calculus. This paper shows how fractal calculus can be applied to these two curves. To do this, we need to obtain the corresponding staircase function. Calculating the path integral on these two fractal curves is the starting point for formulating and extracting Lagrange equations. Fractal integration and fractal derivation on these two fractal paths are performed analytically, and the results are plotted in a MATLAB environment. In addition, we present an application by finding light path equations in this fractal space using the generalized Fermat's principle in fractal calculus.

Keywords: Fractal calculus; Koch Curve; Fermat's principle; Lagrange equations; light path equations.

Alireza Khalili Golmankhaneh
Department of Physics, Urmia Branch, Islamic Azad University, Urmia, Iran
Email: alirezakhalili2002@yahoo.co.in

Amir Pishkoo
Physics and Accelerators Research School, Nuclear Science and Technology Research Institute, Tehran, Iran
Email: apishkoo@aeoi.org.ir

Communicated by Saeid Maghsoudi.
Article Type: Research Paper.
Received: 25/06/2021, Accepted: 12/12/2021.
* Corresponding author.