ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۲۳۴۵-۶۴۹۳، شاپا(الکترونیکی): ۲۳۴۵-۶۵۰۷
جلد ۶، شماره ۲ (۱۴۰۰)، صص. ۴۹-۷۳
© ۱۴۰۰ دانشگاه اصفهان

http://www.ui.ac.ir
http://math-sci.ui.ac.ir

استدلال‌های فیزیکی در ریاضیات

علی پارسیان

چکیده. بسیاری از خوانندگان متون ریاضی، با کاربرد ریاضیات در علوم دیگر، آشنایی دارند. برای برخی از آنان، آن چه که شگفت می‌نماید آن است که از کاربرد علوم دیگر در ریاضیات سخن به میان آید. در این مقاله، به بررسی این موضوع می‌پردازیم. بحث را با جست وجو در تاریخِ کهنِ علوم، و آشنایی با اندیشه‌های ریاضیدانان بزرگ آغاز می‌کنیم و روش حلِ برخی از مسائل کهنِ ریاضیات را به کمک سایر قانون‌های علمی ارائه می‌دهیم. سپس، با همین رویکرد، به ارائهٔ راه حل برخی از مسائل ریاضیات می‌پردازیم.

۱. مقدمه

زندگی، سراسر مسئله است و ریاضیات نیز از دیرباز وسیله‌ای برای حل مسئله‌ها به شمار می‌رفته است. در حقیقت، حل مسئله، خصلت ویژهٔ ذهن آدمی است و ریاضیات به توانایی آن در حل مسئله‌ها می‌افزاید. مسئله‌ها می‌توانند در زمینه‌های گوناگون مورد نیاز جوامع بشری اعم از علمی، اقتصادی، مالی، اجتماعی و ... باشند. راه‌حلی که ریاضیات در هر زمینه ارائه می‌دهد، مبتنی بر نظریه‌ای است که در آن زمینه بنا شده است. اما انسان در ژرفای وجود خود، آرزو دارد به روشی عمومی دست یابد که به یاری آن بتواند هر مسئله‌ای را حل کند. این آرزو، در او به صورت‌های گوناگون جلوه‌گری می‌کند و آثار آن از دیر باز در افسانه‌ها و نوشته‌های تاریخی نمایان است. مثلاً، انسان همواره به دنبال یافتن کلیدی بوده است که همهٔ درها را بگشاید، یا اینکه، در بارهٔ روش عامی که بتواند برای حل همهٔ مسئله‌ها به‌کار آید اندیشیده است. در زندگی بشر، همواره آرزوهای بزرگی وجود داشته‌اند که هم‌چنان به صورت آرمان باقی مانده‌اند، ولی این آرزوهای دست‌نیافتنی چندان هم بی‌فایده نبوده‌اند. بشر هنوز در یافتن اکسیر جوانی یا داروی عمرِ جاودان ناکام مانده، اما تلاشی که در این راه به‌کار برده، سبب شده تا راه علاج بسیاری از بیماری‌ها را بیابد. پولیا (۱۸۸۷-۱۹۸۵ میلادی) [1] می‌گوید: انسان تا کنون به ستارهٔ قطبی دست نیافته است ولی دانسته‌هایی که در بارهٔ آن به‌دست آورده، او را در یافتن مسیر حرکتش در دریا و صحرا یاری کرده است [۱]. مسئله‌هایی نیز وجود دارند که اندیشهٔ بشر، حتی به کمک ریاضیات، پاسخ آن‌ها را نیافته است، اما همان جستجوها، افق‌های جدیدی را به روی او گشوده‌اند. دنیای ریاضیات، از مسائلی انباشته است که ریاضیدانان بسیاری را در طول قرن‌ها به خود مشغول کرده‌اند و ناکام گذاشته‌اند. با این وجود، ریاضیات، زبان طبیعت است و پدیده‌های طبیعی از قوانین ریاضی پیروی می‌کنند. گالیله (۱۵۶۴-۱۶۴۲ میلادی) [2] می‌گوید: زبان کتابِ بزرگِ طبیعت، ریاضی است و نشانه‌های آن مثلث‌ها،

عبارات و کلمات کلیدی: میانه، مرکز ثقل، خم کوتاه‌ترین‌زمان، بیضی، رویهٔ مینیمال.
دبیرتخصصی رابط: محمدرضا پوریای‌ولی
نوع مقاله: پژوهشی
تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۴/۱۹ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۹/۲۱

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.129471.1445

[1] George Pólya [2] Galileo Galilei

دایره‌ها و سایر اشکال هندسی هستند [۲]. اویلر (۱۷۰۷-۱۷۸۳ میلادی) [۳] می‌افزاید: ساختار جهان کامل است و صنعت دست قادر دانا است، و هیچ چیز در آن بدون قاعدهٔ کمینه یا بیشینه‌ای رخ نخواهد داد [۳].

جستجوی اندکی در علوم فیزیک، شیمی، مکانیک، زیست‌شناسی و...، درستیِ این سخنان را آشکار می‌سازد. قانون‌های مربوط به اهرم‌ها، قرقره‌ها، انعکاس نور، مرکز ثقل اجسام، حرکت ذرات و سیارات، سقوط اجسام و مجموع و تفاضل بردارها در فیزیک و مکانیک، تجزیه عناصر رادیواکتیو در شیمی و رشد جمعیت در زیست‌شناسی برخی از شواهد این ادعا هستند و کاربرد ریاضیات را در علوم دیگر نشان می‌دهند. اما آن چه شگفت‌آور است این است که این کاربردها گاهی بر عکس بوده است. به عبارت دیگر، در تاریخ علوم مواردی می‌توان یافت که برای بعضی از مسئله‌های دنیای ریاضیات، به کمک قوانین سایر علوم پاسخی داده شده باشد. اما وجود این موارد، در ریاضیات به معنای حل مسئله نیست! زیرا ریاضیدانان برای کشف قضایا ممکن است از راه آزمایش و خطا، محاسبهٔ حالت‌های ویژه، حدس، الهام از قوانین سایر علوم، یا از هر شیوهٔ دیگری استفاده کنند. نمونه‌ای از این شیوه‌ها را می‌توان در کار اویلر برای دست‌یابی به مجموع سری $\Sigma_{n=1}^{+\infty} n^{-2}$ یافت [۴]. اما، روشی که در ریاضیات برای اثبات درستیِ نتایج به‌کار می‌رود، روش بنداشتی است. برای برخی از نتایج مهم در ریاضیات، به دلیل عدم استفاده از این روش، تنها دلایل ناقص، حتی از سوی ریاضیدانان بزرگ داده شده است. روش بنداشتی، بر دو شرط اساسیِ زیر استوار است:

۱) پذیرش احکامی به نام بنداشت که به هیچ توجیه دیگری نیاز ندارند.
۲) توافق بر قواعد استدلال.

اقلیدس (۳۰۰ سال قبل از میلاد) [۴] و پیشینیان او پی برده بودند که در ساختن هر نهاد منطقی، یک یا چند گزاره را باید مفروض دانست و حکم‌های دیگر را با استنتاج منطقی از آن‌ها نتیجه گرفت. هر تلاشی که برای اثبات همهٔ گزاره‌ها صورت گیرد بی‌تردید به دور باطل خواهد انجامید. روش بنداشتی که اقلیدس به‌کار برد، امروزه الگویی برای "ریاضیات محض" است. محض، به معنیِ اندیشهٔ محض است، هیچ تجربهٔ عینی برای تحقیق درستی احکام لازم نیست، و تنها درستیِ استدلال در اثبات قضایا اهمیت دارد. در این روش، هر گونه تغییر در بنداشت‌ها یا قواعد استدلال ممکن است نتایج را تغییر دهد. نمونهٔ بارز این اتفاق در اثر اقلیدس رخ داد که بیش از دو هزار سال بر تعلیم هندسه مسلط بود و تغییر اندکی که در اصل پنجم او ایجاد شد دنیایی تازه و شگفت پدید آورد. اگر یک دستگاه بنداشتی داده شده باشد، معمول است که به اصطلاحات تعریف نشده معنایی خاص بدهند و به اصطلاح، آن‌ها را به نوع خاصی تعبیر کنند. این کار را یک تعبیر دستگاه می‌نامند. آن‌گاه می‌توان پرسید که آیا بنداشت‌هایی که به این گونه تعبیر شده‌اند حکم‌های درستی هستند یا نه، و اگر درست بودند، این تعبیر را یک الگوی دستگاه می‌نامند. در واقع، الگوها، آزمایشگاه‌هایی برای تجربه‌کردن دستگاه‌های صوری هستند [۵]. در حقیقت، پیشرفت علم عموماً به تعامل بین مطالعات تجربی و نظری وابسته است، و تعجب‌آور نیست که در برخی از شاخه‌های علوم، چنین تعاملی وجود داشته یا حتی بیشتر هم شده باشد. در قرن گذشته رابطهٔ متقابل ریاضیات و فیزیکِ نظری، که از دیرباز وجود داشت، دست‌خوش تغییر شگرفی شد و دگرگونی بی‌سابقه‌ای را پشت سر گذاشت. در دیدگاه سنتی، که ریاضیات را عموماً ابزاری برای توصیف قانون‌ها و مسائل فیزیکی می‌شمرد، تغییر قابل ملاحظه‌ای پدیدار شد و تأثیرات متقابل فیزیکِ نظری و ریاضیات (به ویژه هندسهٔ دیفرانسیل) بر یکدیگر، از قالب سنتی بیرون آمد. مشهور است که نظریهٔ نسبیت عام اینشتین (۱۸۷۹-۱۹۵۵ میلادی) [۵]، سبب ترویج مطالعهٔ هندسهٔ ریمانی گردید، اما در سال‌ها و دهه‌های اخیر، اتفاقی که رخ می‌دهد، چیزی بیش از آن است که یک اصل فیزیکی، فقط وسیله‌ای برای مطالعهٔ ریاضیات شود. در حقیقت، رابطهٔ متقابل ریاضیات و فیزیک نظری، نتیجهٔ اجتناب‌ناپذیر فیزیک مدرن گردید و نشانه‌های آن از سال‌های اولیهٔ قرن بیستم نمودار شد. نظریهٔ نسبیت خاص، که یک اصل فیزیکی اساسی برای ماده در انرژی بالا است و فضا و زمان را در یک پایه قرار می‌دهد، نظریهٔ فضاــزمان سنتی مکانیک نیوتنی را تغییر داد و در واقع، آن را به عنوان یک تقریب، با انرژی پایین، از نظریهٔ نسبیت خاص ترسیم کرد. به همین ترتیب، در ریاضیات، مینکوفسکی (۱۸۶۴-۱۹۰۹ میلادی) [۶]، فضایی شبه اقلیدسی با تقارن بالا، تعریف کرد که اکنون به فضای

[3]Leonhard Euler [4]Euclid of Alexandria [5]Albert Einstein [6]Hermann Minkowski

مینکوفسکی موسوم است و نسبیت خاص به‌عنوان یک تقارن طول‌پایی [۷] در آن به‌حقیقت می‌پیوندد. به‌عبارت دیگر، فاصله، تحت تبدیل لورنتز (۱۸۵۳–۱۹۲۸ میلادی) [۸] ناوردا می‌ماند و یک توصیف هندسی زیبا برای نظریهٔ نسبیت خاص فراهم می‌آید [۶].

کاربرد نظریهٔ میدان کوانتومی در نظریهٔ نمایش گروه به نوتر (۱۸۸۲–۱۹۳۵ میلادی) [۹] منسوب است. او رابطهٔ مستقیم بین تقارن در یک نظریهٔ میدان و کمیت پایستار آن را کشف و در قضیهٔ مشهور خود ارائه کرد. این قضیه نشان می‌دهد که کمیت پایستار در یک نظریهٔ میدان، تنها یک نمایش برای مولد گروه تقارن پیوسته است [۶].

نابرابری‌های مورس (۱۸۹۲–۱۹۷۷ میلادی) [۱۰] در نظریهٔ مورس، که رویکردی جایگزین و قدرتمند برای بررسی ساختار توپولوژیک یک خمینه است و با مطالعهٔ نقاط بحرانی یک تابع تعریف شده روی خمینه صورت می‌گیرد، از طریق اثر تانِلینگ [۱۱] در الگوی سیگمای غیر خطی زِبَرمتقارن [۱۲] ۱ + ۰ بُعدی به‌دست آمد [۷].

قضیهٔ شاخص اتیه–سینگر [۱۳]، که برابریِ شاخص تحلیلی یک عملگر دیفرانسیل بیضوی (تعداد جواب‌های یک معادله دیفرانسیل) را با شاخص توپولوژیک خمینه‌ای که عملگر روی آن تعریف شده بیان می‌کند، با محاسبهٔ شاخص ویتن (۱۹۵۱ میلادی) [۱۴] در الگوی سیگمای غیر خطی زِبَرمتقارن ۱ + ۰ بُعدی تأیید شد [۸، ۹].

نظریهٔ گِیج [۱۵] در ریاضیات، معمولاً به مطالعهٔ معادلات نظری گیج می‌پردازد. این‌ها معادلات دیفرانسیلی شامل هموستارها روی کلاف‌های برداری، کلاف‌های اصلی، یا بُرش‌هایی از کلاف‌های برداری هستند و بنابراین پیوندهای قوی بین نظریهٔ گیج و تحلیل هندسی برقرار می‌کنند. این معادلات با اینکه در ریاضیات اهمیت دارند اغلب از نظر فیزیکی نیز با معنی هستند و با مفاهیم مهمی در نظریهٔ میدان کوانتومی یا نظریهٔ ریسمان ارتباط دارند. به‌عنوان نمونه، معادلات یانگ–میلز [۱۶]، دستگاهی از معادلات دیفرانسیل جزئی برای یک هموستار روی یک کلاف اصلی است، و جواب‌های آن، در فیزیک با جواب‌های خلاء، برای معادلات حرکت ذراتی موسوم به اینستنتن [۱۷]، مطابقت دارند. چندجمله‌ای‌های جونز (۱۹۵۲–۲۰۲۰ میلادی) [۱۸] که گره‌ها و پیوندها را از نظر توپولوژی در فضای سه‌بعدی طبقه‌بندی می‌کنند، در واقع با نوعی حلقه‌های کوانتومی در نظریهٔ گِیج توپولوژیک چرن–سیمونز [۱۹] در سه بعد یکی هستند [۱۰]. یکی از دشوارترین مسائل موجود در هندسهٔ دیفرانسیل، رده‌بندی خمینه‌های دیفرانسیل‌پذیر است. این مسئله در مورد خمینه‌هایی که دارای ابعاد کمتر از ۳ هستند به‌طور کامل حل شده و در مورد برخی دیگر از جمله خمینه‌های سه یا چهار بعدی در حال انجام است [۱۱]. یکی از آن‌ها حدس تورستون (۱۹۴۶–۲۰۱۲ میلادی) [۲۰] است که می‌تواند برای خمینه‌های سه بعدی، رده‌بندی توپولوژیک ارائه دهد، و با استفاده از گرانش ریسمان سه بعدی مورد مطالعه قرار گرفته است [۱۲].

معادلات سایبرگ– [۲۱] ویتن روی هر خمینهٔ چهاربعدی هموار تعریف می‌شوند و با نوعی شمارشِ جواب‌ها ناورداهای خمینه را به‌دست می‌دهند. این ناورداها روی یک خمینهٔ هم‌تافتهٔ [۲۲] چهاربعدی، از یک تعبیر هم تافته، مانند تعداد خم‌های شبه‌تمام‌ریخت [۲۳] برخوردارند، و به‌سبب این ویژگی، زمینهٔ جابجایی اطلاعات را بین رسته‌های [۲۴] هموار و هم‌تافته فراهم می‌آورند. به کمک این معادلات، خمینه‌هایی هم‌سان‌ریخت [۲۵] یافته شده که وابرریخت [۲۶] نیستند [۱۳].

دونالدسون (۱۹۵۷ میلادی) [۲۷]، ریاضیدان انگلیسی که به‌سبب کارهای خود در توپولوژیِ خمینه‌های چهاربعدی هموار مشهور است ثابت کرد که یک ماتریس اشتراکِ مثبت (یا منفی) معینِ مربوط به یک خمینهٔ چهار بُعدیِ هموار همبند ساده، همواره می‌تواند به یک ماتریس یکهٔ مثبت (یا منفی) تبدیل شود. او از مفهوم فضای مدول در نظریهٔ یانگ–میلز، و تعداد مقادیر ویژه ۱+، در یک ماتریس اشتراک استفاده، و برای تشخیص ساختار ظریف توپولوژی دیفرانسیل یک خمینه هموار همبند ساده، ناورداهای چندجمله‌ای، از مرتبهٔ d با مقادیر درست ارائه کرد. ویتن، فیزیکدان نظری، ناورداهای توپولوژیک را که توسط دونالدسون و با استفاده از فضای

---

[7] isometry [8] Hendrik Antoon Lorentz [9] Amalie Emmy Noether [10] Harold Calvin Marston Morse [11] tunneling [12] supersymmetric [13] Michael Atiyah (1929-2019)- Isadore Singer (1924-2021) [14] Edward Witten [15] gauge [16] Chen Ning Yang (1922)- Robert Mills (1927-1999) [17] instanton [18] Vaughan Jones [19] Shiing-Shen Chern (1911-2004)- James Harris Simons (1938) [20] William Paul Thurston [21] Nathan Seiberg (1956) [22] symplectic [23] pseudo holomorph [24] category [25] homeomorph [26] diffeomorph [27] Simon Donaldson

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.129471.1445

مدولی یانگ–میلز ساخته شده بود با روشی فیزیکی از یک نظریهٔ میدان کوانتومی نسبیتی به‌دست آورد و به همین سبب، مدال فیلدز [۲۸] را دریافت کرد [۱۴، ۱۵، ۱۶].

آن چه که بیان شد، بخشی از تعاملاتی را که در سال‌های اخیر در حوزه‌های علوم ریاضی و فیزیک و نگرش متخصصان آن‌ها روی داده است، نشان می‌دهد. در این نوشتار ما نیز از دریچهٔ دانش فیزیک به جهان ریاضیات می‌نگریم و برخی از قضیه‌های مشهور ریاضیات را با توسل به قوانین فیزیک نتیجه می‌گیریم. نخست موضوع را در تاریخ علوم جست‌وجو می‌کنیم و آن‌گاه، به حل چند مسئلهٔ ریاضی با استفاده از قوانین سایر علوم می‌پردازیم.

۲. نمونه‌های تاریخی

در این بخش، به ارائهٔ نمونه‌هایی می‌پردازیم که از کارهای ارشمیدس، هرون، فرما، برنولی و اویلر نشأت گرفته‌اند. ارزش و اهمیت این آثار، مرهون ارتباطی است که بین مسئلهٔ ریاضی و روش حل آن وجود دارد.

۱.۲. قانون اهرم ارشمیدس. ارشمیدس (۲۱۲–۲۸۷ قبل از میلاد) [۲۹] شاید نخستین فرد تاریخ باشد که شرایط لازم برای تعادل اهرم را به صورت دقیق مطالعه و مطرح کرده است. اهرمی را که از مادهٔ صلب و بی‌وزنی ساخته شده در نظر می‌گیریم که دو وزنه از دو انتهای آن آویزان است و با استقرار بر یک نقطهٔ اتکا در حال تعادل قرار دارد. در این حالت گشتاورهای سمت چپ و راست اهرم با هم برابرند، یعنی

$$\text{طول بازوی راست} \times \text{وزن وزنهٔ راست} = \text{طول بازوی چپ} \times \text{وزن وزنهٔ چپ}$$

این همان قانون اهرم ارشمیدس است. وی برای دست‌یابی به این قانون، از ساده‌ترین حالت، یعنی اهرمِ بی وزن با بازوهای برابر که دو وزنهٔ برابر به دو انتهای آن آویزان است شروع کرده است. تشریح مراحل اصلی، که طی آن‌ها ارشمیدس به این قانون دست یافت، مورد نظر ما نیست و در [۲، ۱۷] آمده است. در اینجا به بیان کاربردهایی از قانون ارشمیدس در ریاضیات می‌پردازیم.

تقارب میانه‌ها در مثلث

مثلثی با رئوس A، B و C از جنس مادهٔ صلب و بی‌وزن در صفحهٔ افقی در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم از هر رأسِ آن وزنه‌ای به وزن W آویزان است و پایه‌هایی زیر رأس A و A' وسط BC قرار دارند. در این حالت نیروهای وارد بر B و C یکدیگر را خنثی می‌کنند و مثلث در حالت تعادل باقی می‌ماند (شکل ۱- الف را ببینید). نیروهای اولیه با نیروی W در A و $2W$ در A' هم‌ارزند (شکل ۱- ب را ببینید). اکنون قانون اهرم ارشمیدس را در مورد این دو نیرو به‌کار می‌بریم. فرض می‌کنیم G نقطه‌ای بر AA' باشد به طوری که $AG = 2A'G$، در این صورت

$$W \times AG = W \times (2A'G) = 2W \times A'G,$$

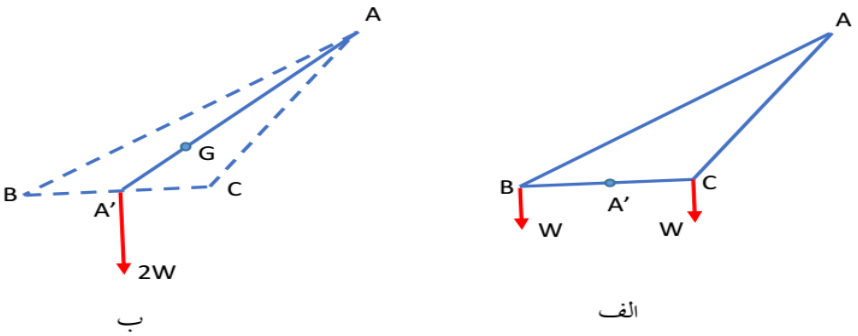
بنابراین اگر مثلث از G آویزان شود در حالت تعادل باقی می‌ماند. همین استدلال را در مورد دو میانهٔ دیگر به‌کار می‌بریم. در نتیجه، با توجه به اینکه سه نیرو فقط یک برآیند دارند، سه میانهٔ مثلث، یکدیگر را در G قطع می‌کنند [۱۷، ۱۸].

مرکز ثقل ورقه‌ی مثلثی همگن افقی

مثلثی از جنس مادهٔ صلب و بی‌وزن در صفحهٔ افقی مفروض است (شکل ۱- الف را ببینید). یک ضلع دلخواه ورقه را به عنوان قاعدهٔ مثلث، و ورقهٔ مثلثی را به شکل مجموعی از نوارهای باریک موازی با قاعدهٔ آن در نظر می‌گیریم. هر نوار، توسط میانهٔ وارد بر قاعده به دو نیمهٔ برابر تقسیم می‌شود. بنابراین نقطهٔ تعادل هر نوار بر آن میانه قرار دارد. از این رو، مرکز ثقل یا نقطهٔ تعادل کل ورقه نیز بر میانهٔ وارد بر قاعده واقع است. به همین دلیل، این نقطهٔ تعادل باید بر دو میانهٔ دیگر هم واقع باشد. بنابراین، به دلیل تقارب سه میانه، مرکز ثقل مثلث بر نقطهٔ تقارب میانه‌های آن قرار دارد [۱۷].

[۲۸] جایزه‌ای است که هر چهار سال یک بار، به ابتکار ریاضیدان کانادایی، فیلدز (۱۸۶۳–۱۹۳۲ میلادی) در جریان کنگرهٔ اتحادیهٔ جهانی ریاضیات به ریاضیدانان جوان کمتر از چهل سال که کار ارزنده‌ای در ریاضی انجام داده باشند، داده می‌شود.

[29] Archimedes of Syracuse

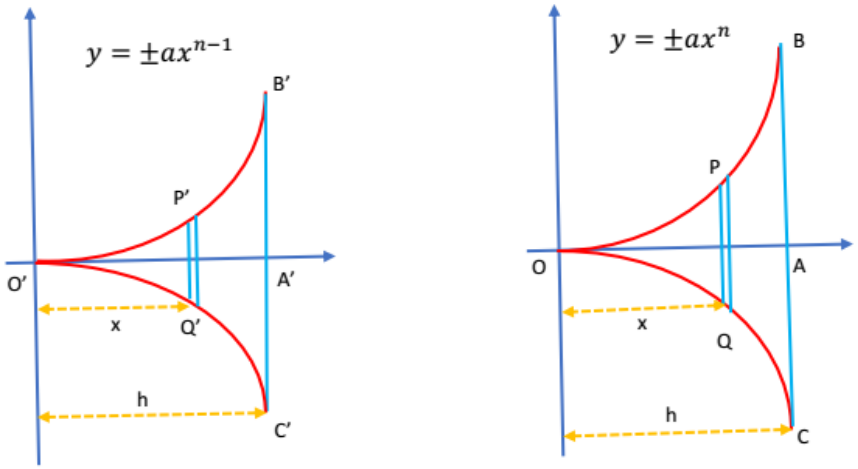


شکل ۱: نیروهای W در B و C، با نیروی $2W$ در A' هم ارز هستند.

سطح زیر خم

قضیهٔ زیر، از ارشمیدس نیست اما برهان آن، بر اساس آن چه که ارشمیدس برای محاسبهٔ سطح زیر سهمی آورده، بنا شده است، با این تفاوت که در زمان ارشمیدس، بر خلاف زمان ما، نمادهای جبری وجود نداشتند و سهولت استفاده از آن‌ها فراهم نبود. محاسبهٔ سطح زیر سهمی، نتیجهٔ این قضیه است.

قضیه ۱.۲. *سطح محدود به خم* $y = ax^k (k \geq 2)$، *محور* x *ها و خط* $x = h$ *برابر است با* $S = bah^{k+1}$ و $b \leq \frac{1}{3}$.

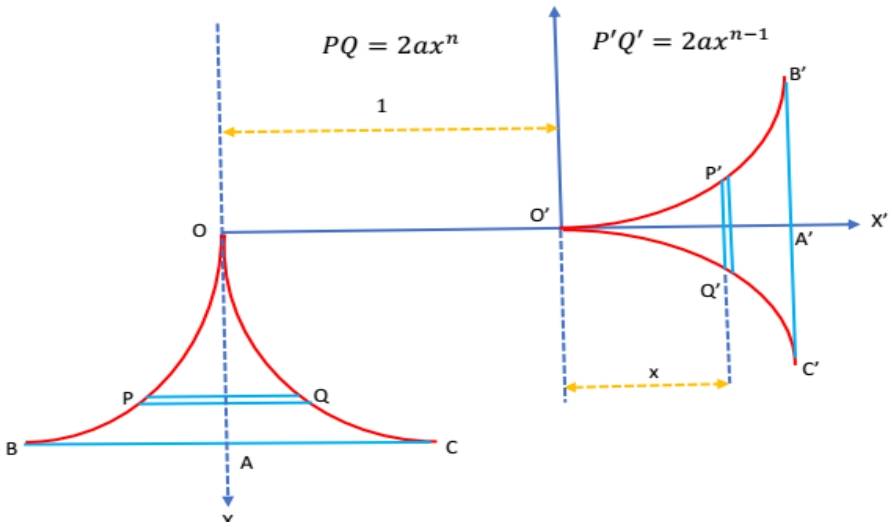


شکل ۲: نوار قائم PQ به درازای $2ax^n$ به فاصلهٔ x از O، با نوار $P'Q'$ به درازای $2ax^{n-1}$ به فاصلهٔ x از O' متناظر است.

شکل ۲ را در نظر می‌گیریم. سطح محدود به خط $x = h$ و خم‌های $y = ax^n (n \geq 2)$ و $y = -ax^n$ را با S_{OBC} نمایش می‌دهیم. برای هر $n \in N$، سطح محدود به خم $y = ax^n$، محور x ها و خط $x = h$، یک‌دوم S_{OBC} است. هر نوار قائمی مانند PQ به درازای $2ax^n$ به فاصلهٔ x از O، با نوار $P'Q'$ به درازای $2ax^{n-1}$ به فاصلهٔ x از O' متناظر است. هرگاه نقطهٔ وسط PQ از

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.129471.1445

O تا A را طی کند، PQ سطح OBC را جاروب می‌کند. به همین ترتیب، هرگاه نقطهٔ وسط $P'Q'$ از O' تا A' را طی کند، سطح $O'B'C'$ را جاروب می‌کند. فرض کنیم OBC در یک صفحهٔ قائم آویزان است و $O'B'C'$ در یک صفحهٔ افقی قرار دارد و $OO' = ۱$ (شکل ۳ را ببینید). پهنای دو نوار متناظر PQ و $P'Q'$ را ϵ، و چگالیِ مادهٔ همگن هر دو جسم را یک می‌گیریم. وزن



شکل ۳: OBC در یک صفحهٔ قائم آویزان است و $O'B'C'$ در یک صفحهٔ افقی قرار دارد و گشتاور PQ حول O' با گشتاور $P'Q'$ حول O' برابر است.

نوار PQ، $۲ax^n\epsilon$ و وزن $P'Q'$، $۲ax^{n-۱}\epsilon$ است. مرکز ثقل PQ روی خط قائم گذرنده از O قرار دارد، لذا گشتاور PQ حول O' برابر است با:

$$OO' \times ۲ax^n\epsilon \times ۱ = ۱ \times ۲ax^n\epsilon \times ۱ = ۲ax^n\epsilon,$$

و چون $P'Q'$ در فاصلهٔ x از O' قرار دارد، گشتاور آن حول O' برابر است با:

$$x \times ۲ax^{n-۱}\epsilon \times ۱ = ۲ax^n\epsilon,$$

بنابراین گشتاور PQ حول O' با گشتاور $P'Q'$ حول O' برابر است. این نتیجه برای هر دو نوار متناظر برقرار است. در نتیجه، گشتاور کل OBC حول O' با گشتاور کل $O'B'C'$ حول O' برابر است. فرض می‌کنیم W_n وزن OBC و $W_{n-۱}$ وزن $O'B'C'$ باشد. به دلیل تقارن، فرض می‌کنیم نقطهٔ اثر W_n بر OA به فاصلهٔ $a_nh(a_n \le ۱)$ از O، و نقطهٔ اثر $W_{n-۱}$ بر $O'A'$ به فاصلهٔ $a_{n-۱}h(a_{n-۱} \le ۱)$ از O' واقع باشد. پس، قانون اهرم ارشمیدس به صورت $W_n \times ۱ = a_{n-۱}hW_{n-۱}$ در می‌آید. این رابطه را برای $n = ۲, ۳, \dots, k-۱, k$ می‌نویسیم و طرفین متناظر تساوی‌های حاصل را در هم ضرب می‌کنیم، خواهیم داشت $W_k = a_۱a_۲ \cdots a_{k-۱}h^{k-۱}W_۱$. اما $W_۱$ وزن مثلث محدود به خطوط $y = ax$، $y = -ax$ و $x = h$ است و $a_۱ = \frac{۲}{۳}$، بنابراین $W_۱ = \frac{۱}{۲} \times ۲ah \times h \times ۱ = ah^۲$ و در نتیجه

$$W_k = a_۱a_۲ \cdots a_{k-۱}h^{k-۱}ah^۲ = \frac{۲}{۳}a_۲ \cdots a_{k-۱}ah^{k+۱}. \quad (۱)$$

قرار می‌دهیم $m = \frac{۲}{۳}a_۲ \cdots a_{k-۱}$، از روابط $a_n \le ۱ (n = ۲, ۳, \dots, k-۱, k)$ داریم $m \le \frac{۲}{۳}$ و

$$W_k = mah^{k+۱} \le \frac{۲}{۳}ah^{k+۱},$$

در نتیجه با فرض $b = \frac{m}{۲}$ داریم $S = \frac{۱}{۲}W_k = bah^{k+۱}$ و $b \leq \frac{۱}{۳}$.

سطح زیر سهمی

پیشینیان و معاصران ارشمیدس برای محاسبهٔ مساحت بیضی و سطح محدود به یک هذلولی و وتری از آن، کوشش‌های بی‌نتیجه کرده بودند. ارشمیدس به مقطع مخروطی سهمی پرداخت و موفق به اثبات قضیهٔ زیر گردید.

قضیه ۲.۲. *سطح محدود به سهمیِ $y = ax^۲$، محور x ها و خط $x = h$ برابر است با $S = \frac{۱}{۳}ah^۳$.*

این قضیه، نتیجهٔ استدلال پیشین است. در این حالت $k = ۲$ و رابطهٔ (۱) به صورت $W_۲ = a_۱ah^۳$ تبدیل می‌شود. حال با توجه به اینکه $a_۱ = \frac{۲}{۳}$، رابطهٔ $W_۲ = \frac{۲}{۳}ah^۳$ به‌دست می‌آید. از آن جا که $W_۲$ دو برابر سطح زیر سهمی است، حکم مورد نظر نتیجه می‌شود.

حجم کره

ارشمیدس به محاسبهٔ حجم قطعهٔ کروی، کره، استوانه، مخروط و ... نیز پرداخته است. در این جا با استفاده از نمادهای امروزی، به تشریح روش او برای محاسبهٔ حجم کره‌ای به شعاع a می‌پردازیم.

معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = ۲ax$، دایره‌ای به شعاع a را نشان می‌دهد که بر محور عرض‌ها در مبداء مختصات مماس است. این دایره و نیمسازهای $y = x$، $y = -x$ و خط $y = ۲a$ را در بازهٔ $[۰, ۲a]$ در نظر می‌گیریم. از دوران این اشکال حول محور x ها، کره‌ای به شعاع a، و استوانه و مخروطی به شعاع قاعدهٔ $۲a$ پدید می‌آیند. این احجام را توپُر با چگالیِ یک در نظر می‌گیریم. مقاطع این احجام با صفحه‌ای که نیمهٔ مثبت محور x ها را در فاصلهٔ x از مبدا می‌بُرد به ترتیب قرص‌هایی به شعاع‌های y، $۲a$ و x است. اگر محور $x'ox$ را به عنوان اهرم در نظر بگیریم و کره و مخروط را از نقطهٔ H به طول $(-۲a)$ واقع بر محور بیاویزیم از تساوی $۲a(\pi x^۲ + \pi y^۲) = x\pi(۲a)^۲$ که هم ارز معادلهٔ دایره است، نتیجه می‌شود گشتاور مقطع استوانهٔ توپُر با مجموع گشتاورهای مقاطع متناظر کرهٔ توپُر و مخروط توپُر برابر است. اکنون اگر x از ۰ تا $۲a$ تغییر کند همهٔ مقاطع استوانهٔ توپُر، کرهٔ توپُر و مخروط توپُر پدید می‌آیند (شکل ۴ را ببینید). اگر حجم کره را با V_S نمایش دهیم و از این نکته که حجم استوانه $V_{CY} = \pi(۲a)^۲ ۲a$ و مرکز ثقل آن نقطهٔ $(a, ۰)$، و حجم مخروط $V_{CO} = \pi(۲a)^۲ \frac{۲a}{۳}$ است استفاده کنیم داریم $۲a(V_S + V_{CO}) = aV_{CY}$، که پس از جای‌گذاری، بی‌درنگ نتیجهٔ $V_S = \frac{۴}{۳}\pi a^۳$ را به‌دست می‌دهد [۲، ۱۹].

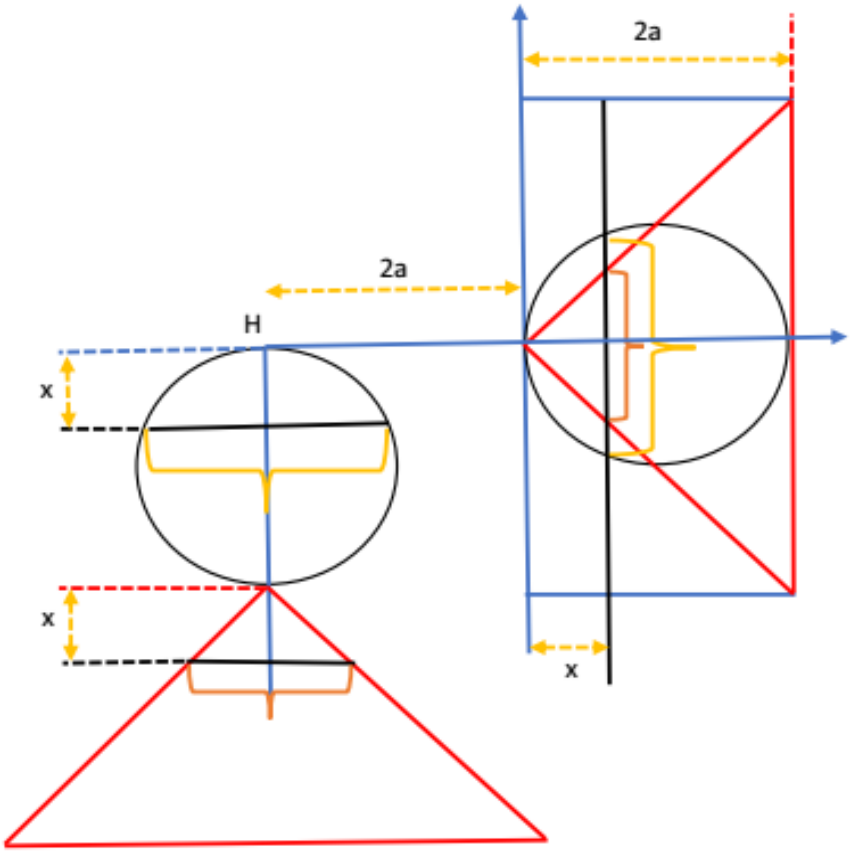
۲.۲. قانون‌های اقلیدس و اصل هرون در انتشار نور، فاصلهٔ کمینه. اقلیدس مسیر انتشار نور را در خطوط مستقیم در نظر می‌گرفت و به تجربه دریافته بود که زاویهٔ تابش پرتوی از نور که به آینه برخورد کند با زاویهٔ بازتاب آن برابر است. انتشار نور به خط مستقیم، و تساوی زوایای تابش و بازتاب، قانون‌های اقلیدس در نورشناسی هستند. هرون اسکندرانی [۳۰] حدود ۱۰۰ سال پس از میلاد می‌زیست و برخلاف آن که چندان مشهور نیست نقش بسزایی در پیشرفت علوم داشت. او نشان داد هر دو قانون اقلیدس نتایجی از این اصل هستند که "نور کوتاه‌ترین مسیر ممکن را می‌پیماید". این اصل را نیز خود او مطرح کرد. قانون اول اقلیدس، بی درنگ از اصل هرون نتیجه می‌شود. برای آگاهی از روش هرون در اثبات قانون دوم اقلیدس، شکل ۵ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم نور پس از انتشار از نقطهٔ A، در نقطهٔ P به سطح آینه برخورد کند و به نقطهٔ B برسد. باید ثابت کنیم اگر APB کوتاه‌ترین مسیر ممکن با بازتابیدن از سطح آینه باشد، آن‌گاه خطوط مستقیم AP و PB با PN زوایای برابر می‌سازند.

هرون، گام اساسی را برداشت. او B'، تصویر B را در آینه در نظر گرفت. دو مثلث $\triangle PBC$ و $\triangle PB'C$ قابل انطباقند و طول مسیر APB با طول APB' برابر است. از آن‌جا که APB' باید "کوتاه ترین مسیر ممکن باشد"، نتیجه می‌گیریم که APB' خط مستقیم است و P در محل برخورد AB' با سطح آینه قرار دارد (شکل ۶ را ببینید). در این صورت $\angle APN$ زاویهٔ تابش و $\angle BPN$ زاویهٔ بازتاب است و

$$\angle APN = \frac{\pi}{۲} - \angle APD = \frac{\pi}{۲} - \angle CPB' = \frac{\pi}{۲} - \angle BPC = \angle BPN,$$

[30] Heron of Alexandria

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.129471.1445



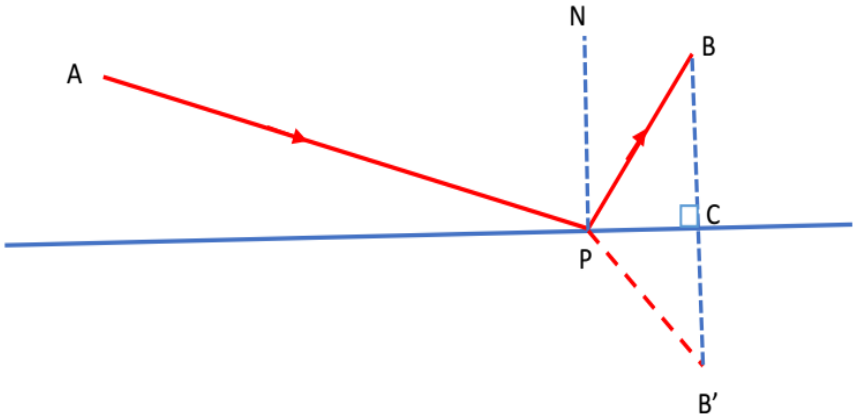
شکل ۴: گشتاور مقطع استوانهٔ توپُر با مجموع گشتاورهای مقاطع متناظر کرهٔ توپُر و مخروط توپُر برابر است. اگر x از ۰ تا $2a$ تغییر کند همهٔ مقاطع استوانهٔ توپُر پدید می‌آیند و متناظر به هر مقطع، دو مقطع معلق از H متعلق به کره توپُر و مخروط توپُر ایجاد می‌شوند. اگر x از ۰ تا $2a$ تغییر کند همهٔ مقاطع کره توپُر و مخروط توپُر نیز پدید می‌آیند.

و قانون دوم اقلیدس نتیجه می‌شود [۲، ۱۷]. از اثبات هرون برای قانون دوم ارشمیدس قضیهٔ زیر در هندسهٔ اقلیدسی به‌دست می‌آید:

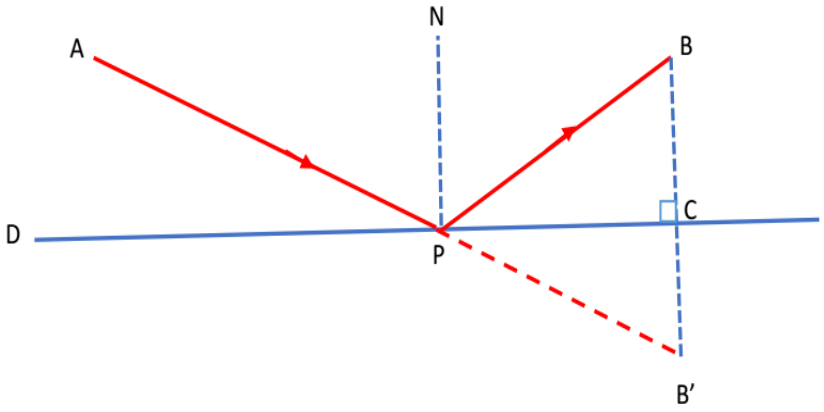
قضیه ۳.۲. *نقاط A و B در یک طرف خط DC مفروضند. نقطهٔ متغیر P را واقع بر خط DC در نظر می‌گیریم. اگر طول $AP+PB$ دارای کمترین مقدار خود باشد، آن‌گاه P در محل برخورد خط DC و پاره‌خط گذرنده از A و قرینهٔ B نسبت به DC، واقع است.*

۳.۲. بطلمیوس و شکست نور، اصل فرما در انتشار نور. بطلمیوس (۱۰۰ – ۱۷۰ میلادی) [۳۱] از رصد ستارگان دریافت که انتشار نور در نزدیکی سطح زمین مستقیم نیست. او در قیاس با ظاهر شکستهٔ چوبی که قسمتی از آن در آب فرو رفته، شکست نور را ناشی از عبور از لایه‌های هوا با چگالی‌های متفاوت می‌دانست. این موضوع، چالشی برای اصل هرون محسوب می‌شد. فرما (۱۶۰۱–۱۶۶۵ میلادی) [۳۲] "اصل کوتاه‌ترین زمان" را جانشین اصل "کوتاه‌ترین مسیر" کرد. او با خود اندیشید که اگر نور به‌طور آنی انتشار نیابد و دارای سرعت باشد آن‌گاه این فرض که نور مسیر با کوتاه‌ترین زمان را طی می‌کند، اصل هرون را نتیجه می‌دهد. زیرا در

[31] Claudius Ptolemy [32] Pierre de Fermat



شکل ۵: اگر نور پس از انتشار از نقطهٔ A، در نقطهٔ P به سطح آینه برخورد کند و به نقطهٔ B برسد، آن‌گاه خطوط مستقیم AP و PB با PN زوایای برابر می‌سازند.



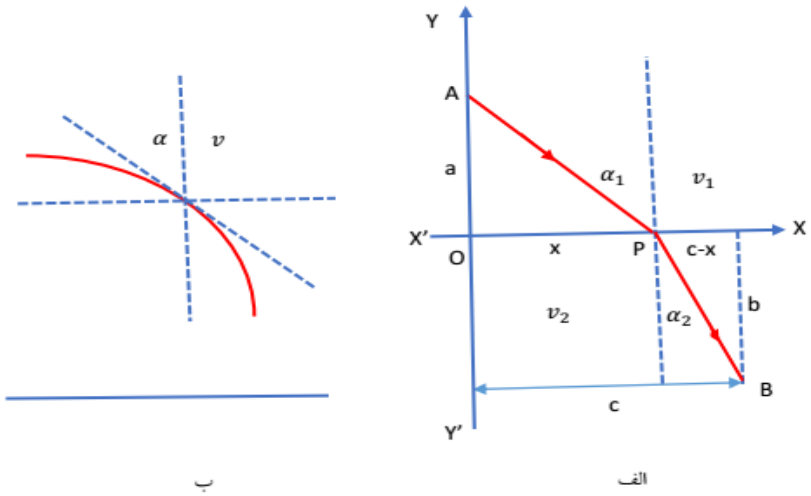
شکل ۶: طول مسیر APB با APB' برابر است. از آن‌جا که APB باید "کوتاه ترین مسیر ممکن باشد"، نتیجه می‌گیریم که APB' خط مستقیم است و P در محل برخورد AB' با سطح آینه قرار دارد.

محیط یکسان کوتاه‌مدت‌ترین مسیر همان کوتاه‌ترین مسیر خواهد بود و هنگامی که مسیر نور هم در هوا و هم در آب است کوتاه‌ترین مسیر دیگر کوتاه‌مدت‌ترین مسیر نیست و پرتو انکساریافته، دیگر کوتاه‌ترین مسیر را طی نمی‌کند. بنابراین اصل فرما جامع‌تر از اصل هرون است [۱۷].

۴.۲. اسنل، دکارت و قانون شکست نور. علیرغم اینکه بطلمیوس به انکسار نور هنگام ورود از یک محیط به محیطی با چگالیِ متفاوت پی برده بود، در یافتن رابطهٔ بین زوایای تابش و شکست نور توفیق نیافت. این موضوع، نظر کپلر (۱۵۷۱ - ۱۶۳۰ میلادی) را نیز به خود جلب کرد. او در این زمینه، سابقهٔ خوبی داشت و توانسته بود رابطهٔ بین مدت‌زمان گردش یک سیاره به دور خورشید، و فاصلهٔ متوسط آن از خورشید را با استفاده از جدول ارقامی که با دقت زمان او تهیه شده بود با زحمت طاقت‌فرسایی بیابد. با این

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.129471.1445

حال، کپلر نیز در یافتن این راز ناکام ماند. سال‌ها بعد، اسنل (۱۵۹۱–۱۶۲۶ میلادی) [۳۳] و دکارت (۱۵۹۶–۱۶۵۰ میلادی) [۳۴] این رابطه را به صورت تجربی کشف کردند. آنان دریافتند که اگر پرتو نورانی از نقطهٔ A واقع در یک محیط، با تندیِ v_1 به نقطهٔ P برود، و از نقطهٔ P با تندیِ v_2 به نقطهٔ B واقع در محیط دوم برسد، آن‌گاه رابطهٔ $\frac{sin\alpha_1}{v_1} = \frac{sin\alpha_2}{v_2}$ برقرار خواهد بود که در آن α_1 زاویهٔ تابش پرتو و α_2 زاویهٔ شکست آن است. جالب این‌جا است که فرما، بعداً قانون اسنل–دکارت را از اصل کوتاه‌ترین‌زمان خود نتیجه گرفت [۱۷]. بدین‌سان، اصل کوتاه‌ترین‌زمان فرما، قانون اسنل– دکارت، اصل هرون و قوانین اقلیدس در نورشناسی را به‌عنوان نتیجه در بر دارد. امروزه، خواننده‌ای که اندک آشنایی با دانش حسابان داشته باشد به سادگی می‌تواند قانون اسنل–دکارت را از اصل فرما به‌دست آورد. شکل (۷– الف) را در نظر می‌گیریم. T، زمان لازم برای رفتن پرتو نورانی از A به B برابر است با



شکل ۷: (الف) زمان لازم برای رفتن پرتو نورانی از A به B برابر است با $T = \frac{AP}{v_1} + \frac{PB}{v_2}$. (ب) طبق قانون اسنل، ثابت C به گونه‌ای وجود دارد که برای پرتو نورانی که مرز بین دو لایه را با سرعت v و زاویهٔ α قطع می‌کند، رابطهٔ $\frac{sin\alpha}{v} = C$ برقرار است.

$$T = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{v_2}.$$

برای آن که T کمترین مقدار خود را اختیار کند باید $\frac{dT}{dx} = 0$ و در نتیجه

$$\frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c-x}{v_2\sqrt{b^2 + (c-x)^2}},$$

که همان رابطهٔ $\frac{sin\alpha_1}{v_1} = \frac{sin\alpha_2}{v_2}$ است [۲۰].

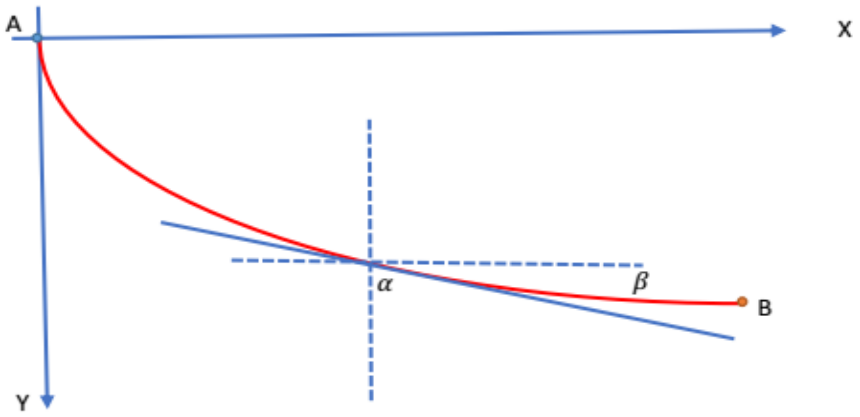
۵.۲. برنولی، قانون اسنل و خم کوتاه‌ترین زمان. یوهان برنولی (۱۶۶۷–۱۷۸۴ میلادی) [۳۵] از قانون اسنل در حل مسئلهٔ خم کوتاه‌ترین زمان سود برده است. تصور کنید نقطهٔ A و نقطهٔ پایین‌تر B (که دقیقاً زیر A نیست) داده شده‌اند و سیم مسطحی در صفحهٔ قائم، آن‌ها را به هم متصل کرده است. شکل سیم چگونه باشد تا مهره‌ای که حرکت خویش را از A آغاز و روی سیم حرکت

[33] Willebrord Snellius [34] René Descartes [35] Johann Bernoulli

می‌کند در کوتاه‌ترین زمان ممکن به B برسد؟ فرض کنید پرتو نورانی ضمن عبور از لایه‌های متعدد، شکسته و رفته‌رفته به امتداد قائم نزدیک‌تر شود. اگر قانون اسنل را در مورد مرزهای بین لایه‌ها به‌کار بریم داریم:

$$\frac{sin\alpha_1}{v_1} = \frac{sin\alpha_2}{v_2} = \frac{sin\alpha_3}{v_3} = \frac{sin\alpha_4}{v_4} = \dots$$

اگر محیط حرکت پرتو نورانی را به صورت لایه‌های بسیار نازک با تعداد بسیار زیاد در نظر بگیریم نتیجه می‌گیریم که مقدار ثابت C به‌گونه‌ای وجود دارد که $\frac{sin\alpha}{v} = C$ (شکل ۷- ب را ببینید). فرض می‌کنیم مهره، مانند پرتو نور می‌تواند مسیری را انتخاب کند که لغزیدنش از A به B در کوتاه‌ترین زمان ممکن صورت گیرد (شکل ۸ را ببینید). از آن‌چه گفته شد، داریم:



شکل ۸: خمی که نقاط A و B را به هم وصل کرده، مسیر لغزیدن مهره از A به B، در کوتاه‌ترین زمان است.

$$\frac{sin\alpha}{v} = C. \qquad (۲)$$

طبق اصل پایستگی انرژی، مجموع انرژی‌های پتانسیل و جنبشیِ جسم مقدار ثابتی است. چون در $y = 0$ جسم از حال سکون سقوط می‌کند و انرژی جنبشیِ کسب‌شده با انرژی پتانسیلِ ازدست‌رفته برابر است، داریم $\frac{1}{2}mv^2 = mgy$، که در آن g شتاب ثقل است. در نتیجه

$$v = \sqrt{2gy}. \qquad (۳)$$

اکنون با توجه به شکل ۸ داریم:

$$sin\alpha = cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + tan^2\beta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}}. \qquad (۴)$$

با ترکیب روابط (۲)، (۳) و (۴) که از نورشناسی، مکانیک و حسابان گرفته شده‌اند و با فرض $2gC^2 = c^{-1}$، معادلهٔ دیفرانسیل خم کوتاه‌ترین‌زمان به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$y[1 + (y')^2] = c. \qquad (۵)$$

معادلهٔ (۵) را به صورت $dx = \pm(\frac{y}{c-y})^{\frac{1}{2}}dy$ می‌نویسیم و تعویض متغیر

$$\pm(\frac{y}{c-y})^{\frac{1}{2}} = \tan\phi$$

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.129471.1445

را به‌کار می‌بریم، خواهیم داشت:

$$y = c\sin^{۲}\phi,$$

در نتیجه $dy = ۲c\sin\phi\cos\phi d\phi$، و از آن‌جا

$$dx = \tan\phi dy = ۲c\sin^{۲}\phi d\phi = c(۱ - \cos ۲\phi)d\phi$$

و

$$x = \frac{c}{۲}(۲\phi - \sin ۲\phi) + c_{۱}.$$

چون خم از مبدا مختصات می‌گذرد از ضابطهٔ y داریم $\phi = ۰$ و $c_{۱} = ۰$. بنابراین معادلات پارامتری خم کوتاه‌ترین‌زمان عبارتند از:

$$x = \frac{c}{۲}(۲\phi - \sin ۲\phi), \quad y = c\sin^{۲}\phi = \frac{c}{۲}(۱ - \cos ۲\phi),$$

اگر قرار دهیم $a = \frac{c}{۲}$ و $\theta = ۲\phi$ خواهیم داشت:

$$x = a(\theta - \sin\theta), \quad y = a(۱ - \cos\theta). \tag{۶}$$

این روابط، معادلات پارامتری خم چرخ‌زاد هستند که وقتی دایره‌ای به شعاع a بر محوری می‌غلتد، نقطه‌ای از دایره، آن را ایجاد می‌کند [۲۰]. هرچند این راه حل از جنبهٔ هنریِ والایی برخوردار است، اما هنوز بعضی از پرسش‌ها را بدون پاسخ باقی گذاشته است. این خم متناوب است و به ازای هر مقدار a از مبداء مختصات می‌گذرد. آیا اولین کمان این خم از B می‌گذرد؟ به ازای کدام مقدار a ؟ آیا جواب یکتا است؟ اکنون این ریاضیات است که باید به درون سادگی‌های پنهان جهان فیزیکی نفوذ کند و پاسخ را بیابد. باید نشان دهیم مقداری برای a وجود دارد که به ازای آن اولین کمان چرخ‌زاد از B می‌گذرد. برای این منظور تابع

$$f(\theta) = \frac{۱ - \cos\theta}{\theta - \sin\theta}, ۰ < \theta \leq ۲\pi$$

در نظر می‌گیریم. از روابط $lim_{\theta\to ۰} f(\theta) = +\infty$، $lim_{\theta\to ۲\pi} f(\theta) = ۰$، $\frac{y_B}{x_B} > ۰$ و پیوستگیِ f نتیجه می‌شود $۰ < \theta_{۰} < ۲\pi$ به گونه‌ای وجود دارد که $f(\theta_{۰}) = \frac{y_B}{x_B}$. در این صورت، چرخ‌زادِ (۶) با فرض $a = \frac{x_B}{\theta_{۰} - \sin\theta_{۰}}$ از B می‌گذرد، زیرا برای $\theta = \theta_{۰}$ داریم:

$$x = a(\theta_{۰} - \sin\theta_{۰}) = \frac{x_B}{\theta_{۰} - \sin\theta_{۰}}(\theta_{۰} - \sin\theta_{۰}) = x_B,$$

$$y = a(۱ - \cos\theta_{۰}) = \frac{x_B}{\theta_{۰} - \sin\theta_{۰}}(۱ - \cos\theta_{۰}) = x_B f(\theta_{۰}) = x_B\frac{y_B}{x_B} = y_B.$$

حال با اثبات اینکه تنها یک مقدار برای a وجود دارد که به ازای آن اولین کمان چرخ‌زادِ (۶) از B بگذرد، بحث را به پایان می‌بریم. برای این منظور کافی است توجه کنیم که تابع f در بازهٔ $(۰, ۲\pi]$ کاهشی اکید است، زیرا محاسبه نشان می‌دهد که:

$$f'(\theta) = \frac{۴\sin\frac{\theta}{۲}}{(\theta - \sin\theta)^{۲}}(\frac{\theta}{۲}\cos\frac{\theta}{۲} - \sin\frac{\theta}{۲}) < ۰.$$

۶.۲. آزمایش‌های لایهٔ صابون وروبه‌های مینیمال. حل مسائل کمینه یا بیشینه، به‌طور صریح و با استفاده از فرمول‌ها یا ترسیمات هندسی معمولاً دشوار و گاهی ناممکن است. به همین دلیل در اوقات بسیاری به اثبات وجود جواب، تحت شرایطی معین و بررسی ویژگی‌های آن اکتفا می‌شود. در موارد زیادی وقتی معلوم می‌شود اثبات وجود جواب نیز مشکلات خاص خود را دارد این انگیزه پدید می‌آید که شرایط ریاضی مسئله را به صورت تجربی و آزمایشگاهی تحقق بخشند. در سیر پیشرفت ریاضیات نمونه‌های متعددی از کمک‌های ارزشمندی که نظریه‌های ریاضی از آزمایش‌های فیزیکی گرفته‌اند دیده می‌شود. مثلاً آزمایش‌های فیزیکی با جریان‌های الکتریسیته در نظریهٔ توابع، بسیار روشنگر بوده‌اند و ابزارها و روش‌های الکتریکی به جواب مسائل مقدار مرزی برای معادلهٔ لاپلاس [۳۶] و دیگر معادلات با مشتقات جزئی تجسم عینی بخشیده‌اند [۲۱]. در این صورت، حصول نتیجهٔ مطوب، نویددهندهٔ وجود جواب برای مسئلهٔ ریاضی است. البته، این امر فقط وجود جواب را می‌نمایاند و یک اثبات ریاضی نیست، زیرا باز هم این پرسش باقی می‌ماند که آیا تعبیر ریاضی رویداد فیزیکی به مفهوم دقیق کلمه، رسا و مناسب است و با مسئلهٔ ریاضیِ اولیه هم‌خوانی دارد، یا تصویر متفاوتی را به‌دست می‌دهد؟ یکی از عمیق‌ترین مسائل کمینه یا بیشینه، مسئله‌های حساب تغییرات است که تعدادی از آن‌ها بسیار قدیمی‌اند و توسط یونانیان باستان مورد بررسی قرار گرفته و برخی هم حل شده‌اند. هرچند پیدایش حسابان توسط نیوتن (۱۷۲۶-۱۶۴۲ میلادی) [۳۷] و لایب‌نیتس (۱۷۱۶-۱۶۴۶ میلادی) [۳۸]، بر انگیزهٔ مطالعهٔ مسائل حساب تغییرات افزود، اما این مبحث، با کشف معادلهٔ دیفرانسیل اویلر به طور اساسی به صحنه آمد و به عنوان یکی از شاخه‌های آنالیز ریاضی مطرح گردید. یکی از مسائل حساب تغییرات، مسئله پلاتو (۱۸۰۱-۱۸۸۳ میلادی) [۳۹] است. البته، خود مسئله خیلی قدیمی‌تر است و گذشتهٔ آن به مراحل اولیهٔ حساب تغییرات باز می‌گردد. ولی، به دلیل آن که پلاتو، فیزیکدان بلژیکی، آزمایش‌های جالبی در مورد آن انجام داده، به نام او معروف شده است. صورت مسئله این است: "رویه‌ای با کمترین مساحت بیابید که به یک یا چند خم مرزی بستهٔ مفروضی در فضای سه بعدی محدود باشد". این مسئله از نظر ریاضی به حل یک معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی یا دستگاهی از آن‌ها می‌انجامد. روش پلاتو که خود آن را ابداع و در رساله‌ای که در خصوص نیروهای مولکولیِ موجود در مایعات نگاشته، تشریح کرده، مبتنی بر آزمایش است و وجود جواب‌ها را به صورت تجربی برای مرزهای بسیار کلی به‌دست می‌دهد [۲۰].

اگر سیمی را که به شکل مرز بستهٔ دلخواهی درآمده در مایع چسبناکی فروبرده و بیرون آوریم، لایهٔ آویزانی روی سیم تشکیل می‌شود. چنین مایعی را می‌توان با حل کردن ۱۰ گرم اولئات خشک خالص در ۵۰۰ گرم آب مقطر و سپس مخلوط کردن ۱۵ واحد از محلول با ۱۱ واحد گلیسیرین فراهم کرد. فرض می‌کنیم تاثیر نیروی گرانش و عوامل دیگر که مانع از گرایش لایه به کسب کمترین سطح ممکن گردد قابل اغماض باشند. این لایه، شکل یک رویه با کمترین مساحت را به خود می‌گیرد. با این روش، می‌توان مسئله را به آسانی با شکل‌دادن قاب سیمی به صورت مورد نظر، حل کرد.

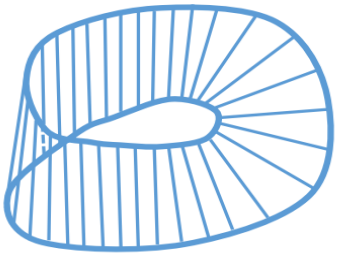
در این مورد، اساساً سه موضوع کلی وجود دارد که باید مورد مطالعه قرار گیرند:

۱) وجود جواب از نوع معین.
۲) یکتایی جواب.
۳) وابستگی جواب به داده‌های از قبل تعیین شده.

در مورد این موضوعات، هنوز باید کارهای زیادی انجام شود. با این حال، آزمایش‌های فیزیکی، پرتوِ خود را بر هر سه موضوع می‌افکنند و پرسش‌های دیگری را نیز پیش می‌کشند و حتی پاسخ آن‌ها را نیز نشان می‌دهند. برای نمونه، اگر مرز، یک دایره باشد، به طور طبیعی یک قرص مستدیر مسطح به‌دست می‌آید (شکل ۹- الف را ببینید). حال اگر دایرهٔ مرزی را به‌طور پیوسته تغییر شکل دهیم، احتمالا انتظار داریم رویه‌ای که ایجاد می‌شود، مشخصهٔ توپولوژیکِ یک قرص واحد را حفظ کند، اما چنین نیست. اگر مرز به گونه‌ای که در (شکل ۹- ب) نشان داده شده، تغییر کند، آزمایش فیزیکی، رویه‌ای را پدید می‌آورد که دیگر همبند ساده نیست، بلکه یک نوار موبیوس (۱۷۹۰-۱۸۶۸ میلادی) [۴۰] است [۲۱].

[36]Pierre-Simon Laplace [37]Isaac Newton [38]Gottfried Wilhelm Leibniz [39]Joseph Antoine Ferdinand Plateau [40]August Ferdinand Möbius

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.129471.1445



ب

الف

شکل ۹: (الف) اگر مرز، یک دایره باشد، از آزمایش فیزیکی، به طور طبیعی یک قرص مستدیر مسطح به‌دست می‌آید. (ب) اگر مرز به گونه‌ای که نشان داده شده، تغییر کند، آزمایش فیزیکی، رویه‌ای را پدید می‌آورد که دیگر همبند ساده نیست، بلکه یک نوار موبیوس است.

اگر ساده‌ترین شکل مسئله را که برای اولین بار توسط اویلر مطرح شد در نظر بگیریم، هدف، تعیین رویه‌ای است که به خم بسته مفروضی محدود، و دارای کمترین مساحت باشد. هرگاه فرض کنیم که تصویر این خم در صفحه xy ، یک خم بسته C است که ناحیهٔ R از این صفحه را احاطه کرده، و نیز اگر رویه به صورت صریح $z = f(x,y)$ قابل نمایش باشد، آن‌گاه مسئله به تعیین f منجر می‌شود، مشروط به اینکه انتگرال مساحت

$$I(z) = \iint_R \sqrt{۱ + (\frac{\partial z}{\partial x})^۲ + (\frac{\partial z}{\partial y})^۲} dxdy \qquad (۷)$$

را کمینه سازد و $f(x,y)$ روی خم C مقادیر مفروضی را اختیار کند. اویلر ثابت کرده است که تابع z که انتگرال

$$I(z) = \iint_R g(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y})dxdy$$

را کمینه (یا بیشینه) می‌سازد، در صورت وجود، در معادلهٔ

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial g}{\partial z_x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial g}{\partial z_y}) - \frac{\partial g}{\partial z} = ۰ \qquad (۸)$$

صدق می‌کند. این معادله برای (۷) عبارت است از

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{۱ + (\frac{\partial z}{\partial x})^۲ + (\frac{\partial z}{\partial y})^۲}}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{۱ + (\frac{\partial z}{\partial x})^۲ + (\frac{\partial z}{\partial y})^۲}}) = ۰$$

که می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$z_{xx}(۱ + z_x^۲) - ۲z_x z_y z_{xy} + z_{yy}(۱ + z_y^۲) = ۰. \qquad (۹)$$

این معادلهٔ دیفرانسیل جزئی، توسط لاگرانژ (۱۷۳۶-۱۸۱۳ میلادی) [۴۱]، که کشفیات برجسته‌ای در حساب تغییرات و مکانیک تحلیلی دارد کشف شد. اثبات وجود جواب z برای معادلهٔ (۸) و حتی برای برخی توابع خاص f، که در شرایط مرزی مناسب نیز صدق کنند، عموماً بسیار دشوار است، و به همین دلیل بررسی ویژگی‌های جواب آن‌ها با فرض اینکه وجود دارند، اهمیت ویژه دارد. اویلر ثابت کرد که رویه‌هایی که در معادلهٔ (۹) صدق کنند، در هر نقطه، دارایِ خمیدگیِ میانگینِ صفر هستند. رویه‌ای را که خمیدگیِ

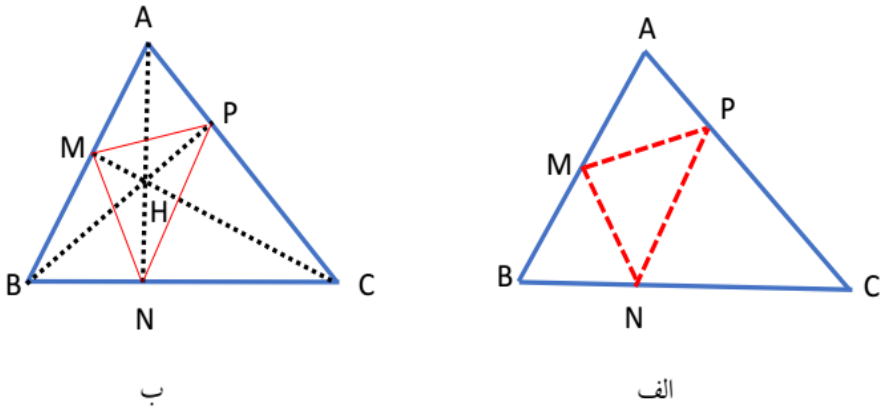
[41] Joseph Louis Lagrange

میانگین آن صفر باشد، رویهٔ مینیمال می‌نامند. خمیدگی‌های اصلی رویهٔ مینیمال، در هر نقطه، قرینهٔ یکدیگرند و خمیدگیِ گاوسیِ آن، عددی منفی یا صفر است. حلی کامل برای (۹) به‌طور جداگانه، توسط رادو (۱۸۹۵–۱۹۶۵ میلادی) [۴۲] و داگلاس (۱۸۹۷–۱۹۶۵ میلادی) [۴۳] به‌دست آمده است [۲۱].

۳. نمونه‌های دیگر

در این بخش، روش حل چندین مسئله را با رویکرد بخش گذشته ارائه می‌کنیم. برای برداشتن گام‌هایی به بلندی گام‌های ریاضیدانان بزرگ باید دارای قامتی مانند آنان شد، مهارت جدیدی به‌دست آورد، و کسب مهارت نیاز به کوشش، تمرین و ممارست دارد.

۱.۳. اصول اقلیدس و فرما، مثلث محاطی با محیط کمینه. مثلث $\triangle ABC$ را با سه زاویهٔ حاده در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم به کمک اصول اقلیدس و فرما نقاط M، N و P را به ترتیب روی اضلاع AB، BC و AC طوری تعیین کنیم که محیط مثلث $\triangle MNP$ کمینه باشد. فرض می‌کنیم $\triangle MNP$ مثلث مفروض است (شکل ۱۰- الف را ببینید). بدیهی است که کمینه بودن



شکل ۱۰: (الف) نقاط M، N و P، به ترتیب روی اضلاع AB، BC و AC به‌گونه‌ای وجود دارند که محیط مثلث $\triangle MNP$ کمینه باشد. (ب) اگر M، N و P به‌ترتیب پای ارتفاع‌های وارد از رئوس C، A و B بر اضلاع مقابل باشند، چهارضلعی‌های $BNHM$، $CNHP$ و $BCPM$ محاطی‌اند و رابطه‌های $\angle BNM = \angle CNP$، $\angle CPN = \angle APM$ و $\angle AMP = \angle BMN$ برقرارند.

محیط $\triangle MNP$ ، موجب کمینه شدن $MN + NP$، $NP + PM$ و $PM + MN$ خواهد شد، زیرا در غیر این صورت، مثلثی با محیط کمتر وجود خواهد داشت. بنابراین با استفاده از بند ۲ ۰ ۲ داریم

$$\angle BNM = \angle CNP, \tag{۱۰}$$

و به همین ترتیب

$$\angle CPN = \angle APM, \angle AMP = \angle BMN. \tag{۱۱}$$

اگر اضلاع مثلث $\triangle ABC$ را به صورت آینه در نظر بگیریم، از رابطه‌های (۱۰) و (۱۱) و اصل اقلیدس نتیجه می‌شود که محیط مثلث $\triangle MNP$ می‌تواند مسیر حرکت یک پرتو نورانی از M به N، سپس از N به P، و سرانجام از P به M باشد، و در نتیجه طبق

[42] Tibor Radó [43] Jesse Douglas

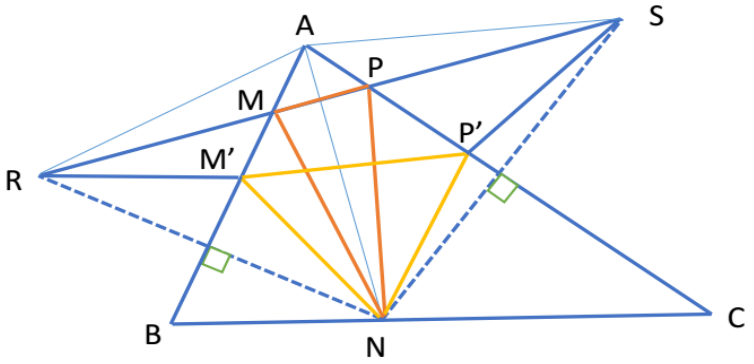
http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.129471.1445

اصل فرما، مقدار کمینه دارد. ثابت می‌کنیم اگر M، N و P به ترتیب پای ارتفاع‌های وارد از رئوس C، A و B بر اضلاع مقابل باشند، رابطه‌های (۱۰) و (۱۱) برقرارند (شکل ۱۰- ب را ببینید). چهارضلعی‌های $BNHM$، $CNHP$ و $BCPM$ محاطی‌اند و در نتیجه

$$\angle BNM = \angle BNA - \angle MNH = \angle BNA - \angle MBH$$
$$= \angle CNA - \angle PCH = \angle CNA - \angle PNH = \angle CNP,$$

و رابطهٔ (۱۰) برقرار است. به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که رابطه‌های (۱۱) نیز برقرارند. مثلث $\triangle MNP$ که رئوس آن، پای ارتفاع‌های وارد از رئوس مثلث $\triangle ABC$ بر اضلاع مقابل آن‌ها هستند، به مثلث ارتفاعیِ $\triangle ABC$، یا مثلث پادکِ $\triangle ABC$ موسوم است [۵]. بنابراین، قضیهٔ زیر در هندسهٔ اقلیدسی نتیجه می‌شود:

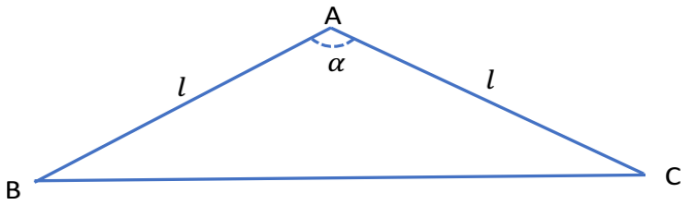
قضیه ۱.۳. *مثلث $\triangle ABC$ با سه زاویهٔ حاده مفروض است. در این صورت، یکی از مثلث‌هایی که در مثلث $\triangle ABC$ محاط است و بین مثلث‌های محاط در آن، محیط کمینه دارد، مثلث ارتفاعی است.*



شکل ۱۱: نقاط R و S قرینه‌های نقطهٔ N، به ترتیب نسبت به اضلاع AB و AC هستند. محیط مثلث $\triangle MNP$، با طول پاره خط راست RS، و محیط مثلث $\triangle M'NP'$، با طول پاره خط شکستهٔ $RM'P'S$ برابر است.

هر چند این قضیه، چنین مثلثی را معرفی می‌کند، اما در مورد یکتایی یا عدم یکتایی آن، سخنی به میان نمی‌آورد. برای بررسی این موضوع، مثلث $\triangle ABC$ را با سه زاویهٔ حاده، و نقطهٔ N واقع بر ضلع BC را در نظر می‌گیریم (شکل ۱۱ را ببینید). قرینه‌های N را نسبت به اضلاع AB و AC به ترتیب R و S می‌نامیم. پاره‌خط RS ، اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط M و P می‌بُرد. ادعا می‌کنیم، بین مثلث‌های محاط در مثلث $\triangle ABC$ که یک رأس آن‌ها N است، مثلث $\triangle MNP$ محیط کمینه دارد. برای اثبات، نقاط اختیاری M' و P' را به ترتیب بر اضلاع AB و AC در نظر می‌گیریم و محیط‌های دو مثلث $\triangle MNP$ و $\triangle M'NP'$ را با هم مقایسه می‌کنیم. مثلث‌های $\triangle NPS$ و $\triangle NMR$ متساوی‌الساقین هستند، در نتیجه محیط مثلث $\triangle MNP$ با طول پاره‌خط راست RS برابر است. به همین ترتیب، مثلث‌های $\triangle NP'S$ و $\triangle NM'R$ متساوی‌الساقین هستند و محیط مثلث $\triangle M'NP'$ با طول پاره‌خط شکستهٔ $RM'P'S$ برابر است. حال از اینکه پاره‌خط راست، کوتاه‌ترین فاصلهٔ بین دو نقطه است نتیجه می‌شود که مثلث $\triangle MNP$ محیط کمینه دارد.

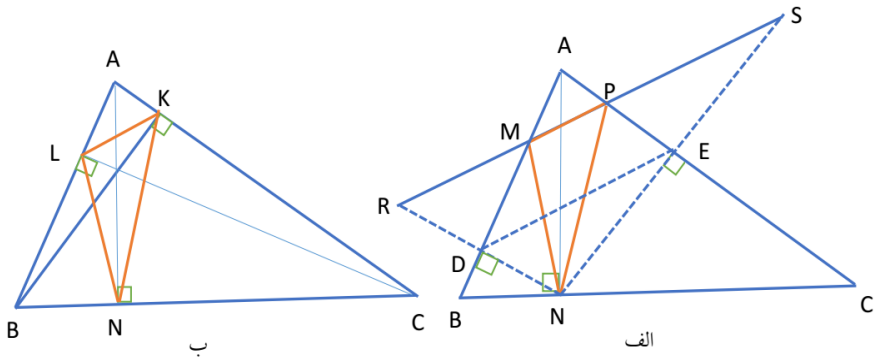
اکنون به محاسبهٔ اندازهٔ محیط این مثلث می‌پردازیم. ابتدا توجه می‌کنیم که طول قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین با ساق l و زاویهٔ رأس α از فرمول $2l\sin\frac{\alpha}{2}$ به‌دست می‌آید (شکل ۱۲ را ببینید). در شکل ۱۱، مثلث‌های $\triangle RAN$ و $\triangle NAS$ متساوی‌الساقین



شکل ۱۲: طول قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین $\triangle ABC$، با ساق l و زاویهٔ رأس α، با $2l\sin\frac{\alpha}{2}$ برابر است.

هستند و محیط مثلث $\triangle MNP$، که آن را با $p_{\triangle MNP}$ نمایش می‌دهیم، با طول قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین $\triangle RAS$، با زاویهٔ رأس $\angle RAS = 2\angle BAC$ و ساق AS، برابر است. به عبارت دیگر،

$$p_{\triangle MNP} = RS = 2AS\sin\frac{\angle RAS}{2} = 2AS\sin\angle BAC = 2AN\sin\angle BAC. \qquad (12)$$



شکل ۱۳: (الف) اگر N پای ارتفاع مرسوم از A باشد، آن‌گاه بین تمام مثلث‌هایی که یک رأس آن‌ها بر BC واقع است، مثلث $\triangle MNP$ محیط کمینه دارد. (ب) مثلث $\triangle LNK$، مثلث ارتفاعیِ مثلث $\triangle ABC$ است و رئوس آن، بر رئوس مثلث $\triangle MNP$، که محیط کمینه دارد، منطبقند.

حال اگر در شکل ۱۱، N را روی BC تغییر دهیم، آن‌گاه بین تمام مثلث‌هایی که یک رأس آن‌ها بر BC واقع است و محیط کمینه نیز دارند، مثلثی با کمترین محیط را می‌یابیم. زیرا علیرغم این تغییر، اندازهٔ زاویهٔ رأس مثلث متساوی‌الساقین $\triangle RAS$ ثابت می‌ماند و طول RS متناسب با طول AN تغییر می‌کند. در نتیجه، محیط مثلث $\triangle MNP$، زمانی کمینه می‌شود که AN کمینه باشد، و این امر وقتی رخ می‌دهد که N پای ارتفاع مرسوم از A باشد [۵].

اکنون فرض می‌کنیم N پای ارتفاع مرسوم از A است، و مثلث $\triangle MNP$ محیط کمینه دارد (شکل ۱۳- الف را ببینید). گام آخر را با تحقیق این امر که نقاط P و M نیز به ترتیب پای ارتفاع‌های مرسوم از B و C هستند، برمی‌داریم. به عبارت دیگر، ثابت می‌کنیم رئوس M و P از مثلث $\triangle MNP$، به ترتیب بر رئوس L و K از مثلث $\triangle LNK$، مثلث ارتفاعی $\triangle ABC$ منطبقند (شکل ۱۳- ب را ببینید). برای این منظور، کافی است انطباق نقاط P و K را ثابت کنیم. در شکل (۱۳- الف) پاره‌خط‌های RS

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.129471.1445

و DE موازی یکدیگرند، مثلث $\triangle ANC$ قائم‌الزاویه و چهارضلعی $ADNE$ محاطی است، در نتیجه،

$$NC = AC\cos\angle ACB, \quad \angle PSE = \angle DEN = \angle BAN = \frac{\pi}{۲} - \angle ABC. \tag{۱۳}$$

هم‌چنین در مثلث‌های قائم‌الزاویه $\triangle NEC$ و $\triangle PES$ داریم:

$$CE = NC\cos\angle ACB, \quad NE = NC\sin\angle ACB, \quad EP = ES\tan\angle PSE. \tag{۱۴}$$

با ترکیب روابط (۱۳) و (۱۴) و رابطهٔ مثلثاتی

$$\frac{AB}{\sin\angle ACB} = \frac{AC}{\sin\angle ABC} = \frac{BC}{\sin\angle BAC} = ۲R, \tag{۱۵}$$

که برای هر مثلث ABC با شعاع دایرهٔ محیطی R برقرار است، داریم:

$$\begin{aligned} CP = CE + EP &= NC\cos\angle ACB + ES\tan\angle PSE \\ &= NC\cos\angle ACB + NE\tan\angle PSE \\ &= NC\cos\angle ACB + NC\sin\angle ACB\tan\angle PSE \\ &= NC(\cos\angle ACB + \sin\angle ACB\cot\angle ABC) \\ &= AC\cos\angle ACB(\cos\angle ACB + \sin\angle ACB\cot\angle ABC) \\ &= (AC\cos\angle ACB + AC\sin\angle ACB\cot\angle ABC)\cos\angle ACB \\ &= (AC\cos\angle ACB + ۲R\sin\angle ACB\cos\angle ABC)\cos\angle ACB \\ &= (AC\cos\angle ACB + AB\cos\angle ABC)\cos\angle ACB \\ &= BC\cos\angle ACB. \end{aligned}$$

حال، در شکل (۱۳- ب) و در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\triangle BKC$ داریم

$$CK = BC\cos\angle ACB,$$

و در نتیجه، $CP = CK$ و نقطهٔ P بر پای ارتفاع مرسوم از B منطبق است. بنابراین:

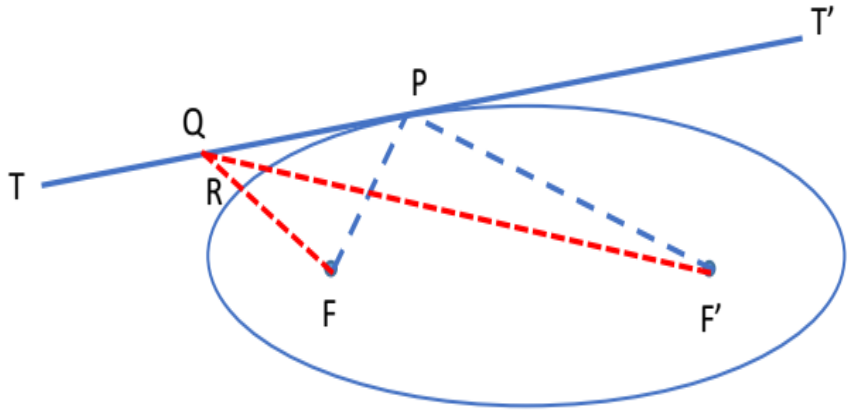
قضیه ۲.۳. *مثلث ABC با سه زاویهٔ حاده مفروض است. مثلث یکتایی که در آن محاط است و محیط کمینه دارد، مثلث ارتفاعی است.*

تبصره ۳.۳. با استفاده از رابطه‌های $AN = AC\sin\angle ACB$ در (شکل ۱۳ـ ب)، (۱۲) و (۱۵)، محیط مثلث ارتفاعی، بر حسب شعاع دایرهٔ محیطی مثلث $\triangle ABC$ و سینوس زوایای آن به‌دست می‌آید. در واقع داریم:

$$\begin{aligned} p_{\triangle MNP} &= ۲AN\sin\angle BAC \\ &= ۲AC\sin\angle ACB\sin\angle BAC = ۴R\sin\angle ABC\sin\angle ACB\sin\angle BAC. \end{aligned}$$

از رابطهٔ اخیر و نابرابریِ بین میانگین‌های هندسی و حسابی اعداد نامنفی، نتیجه می‌شود که بین همهٔ مثلث‌هایی که سه زاویهٔ حاده دارند و در دایره‌ای به شعاع R محاطند، محیط مثلث ارتفاعیِ مثلث متساوی‌الاضلاع، از محیط مثلث ارتفاعی سایر مثلث‌ها بیشتر است. هم‌چنین، هیچ یک از مثلث‌های محاط در دایره، دارای مثلث ارتفاعی با محیط کمینه نیست، زیرا همواره می‌توان مثلثی با سه زاویهٔ حاده، محاط در دایره یافت که محیط مثلث ارتفاعی آن، به اندازهٔ دلخواه به صفر نزدیک باشد.

۲.۳. اصل فرما و ویژگی خط مماس بر بیضی. بیضیِ E با ثابت $2a$ و کانون‌های F و F' و خط TPT' را که در نقطهٔ P بر E مماس است در نظر می‌گیریم. یکی از قضایای هندسهٔ اقلیدسی این است که شعاع‌های کانونی PF و PF' با خط TPT' زوایای برابر $\angle FPT$ و $\angle F'PT'$ می‌سازند (شکل ۱۴ را ببینید). این قضیه به کمک اصل فرما و نتایج آن قابل استنتاج است. خط

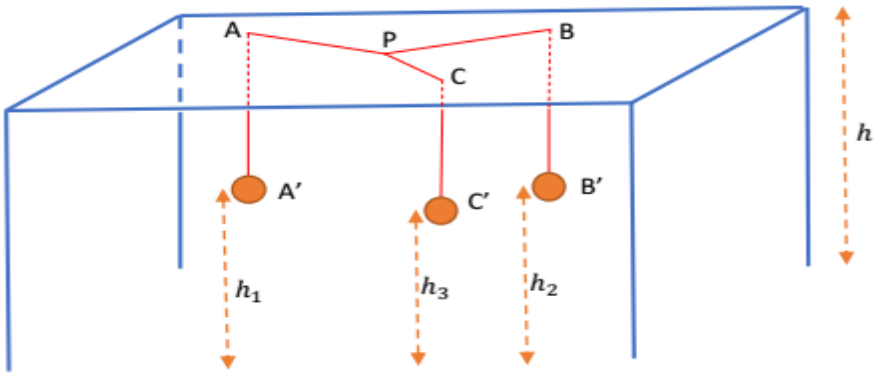


شکل ۱۴: شعاع‌های کانونی PF و PF' با TPT'، خط مماس بر بیضی، زوایای برابر $\angle FPT$ و $\angle F'PT'$ می‌سازند.

TPT' را به عنوان آینه در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم نقطهٔ Q به گونه‌ای بر آینه واقع باشد که پرتوی که از F به آن می‌تابد پس از بازتابش از F' بگذرد. در آن صورت، طبق اصل فرما، FQF' کوتاه‌ترین مسیر ممکن است، و زوایای $\angle FQT$ و $\angle F'QT'$ نیز با هم برابرند. ثابت می‌کنیم کوتاه‌ترین مسیر وقتی اتفاق می‌افتد که $Q = P$ و Q نقطهٔ تماس TT' با بیضی E باشد. بدیهی است که هر نقطه‌ای جز P، مانند Q که واقع بر TT' باشد در خارج بیضی قرار دارد. فرض کنید FQ بیضی را در R قطع کند. چون RF' کوتاه‌ترین مسیر از R تا F' است داریم $RQ + QF' > RF'$ و در نتیجه $FR + (RQ + QF') > FR + RF'$، و چون R و P بر بیضی قرار دارند $FQ + QF' > 2a = FP + PF'$. از آن‌جا که نور کوتاه‌ترین مسیر را می‌پیماید، و P بر TT' واقع است، Q باید بر P واقع شود و زوایای $\angle FPT$ و $\angle F'PT'$ برابر باشند [۱۷، ۱۸].

۳.۳. اصل انرژی پتانسیل کمینه و مجموع فواصل. توجه به یک رشته از حقایق رشتهٔ فیزیک، این فکر را به دانشمندان قرن هجدهم میلادی القا کرد که پدیده‌های گوناگون طبیعی، به پربازده‌ترین و اقتصادی‌ترین صورت ممکن انجام می‌گیرند. مثلا، پرتو نورانی کوتاه‌مدت‌ترین مسیر را در یک محیط نوری می‌پیماید، یا شکل یک زنجیر آویخته به گونه‌ای است که انرژیِ پتانسیلش کمینه شود. گویا، در پشت ظواهر درهم و آشفتهٔ طبیعی، سادگی‌های پنهانی وجود دارد. اصل انرژیِ پتانسیل کمینه، در برخی از دستگاه‌ها، نتایج شگفتی را در ریاضیات رقم می‌زند. شکل ۱۵ را در نظر می‌گیریم. به هر یک از رئوس مثلث بدون وزن افقی $\triangle ABC$ با سه زاویهٔ حاده، قرقره‌ای متصل است و نخ‌های بدون وزن PAA'، PBB' و PCC' به ترتیب به طول‌های l_1، l_2 و l_3، که در نقطهٔ P به هم گره خورده‌اند، بدون اصطکاک از قرقره‌ها می‌گذرند، و به وزنه‌هایی به جرم m واقع در A'، B'، و C' متصل می‌شوند. فرض می‌کنیم مثلث $\triangle ABC$ و نقاط A'، B'، و C' به ترتیب در ارتفاع‌های h، h_1، h_2 و h_3 از سطح زمین واقع باشند. انرژیِ پتانسیل

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.129471.1445



شکل ۱۵: به هر یک از رئوس مثلث بدون وزن افقی $\triangle ABC$ با سه زاویهٔ حاده، قرقره‌ای متصل است و نخ‌های بدون وزن PAA'، PBB' و PCC'، بدون اصطکاک از قرقره‌ها می‌گذرند، و به وزنه‌هایی به جرم m متصل می‌شوند.

دستگاه برابر است با

$$\begin{aligned} mgh_1 + mgh_2 + mgh_3 &= mg(h - AA') + mg(h - BB') + mg(h - CC') \\ &= 3mgh - mgAA' - mgBB' - mgCC' \\ &= 3mgh - mg(l_1 - PA) - mg(l_2 - PB) - mg(l_3 - PC) \\ &= mg(3h - l_1 - l_2 - l_3) + mg(PA + PB + PC). \end{aligned}$$

از آن‌جا که m، h، l_1، l_2 و l_3 ثابتند، انرژیِ پتانسیل دستگاه وقتی کمینه است که $PA + PB + PC$ کمینه باشد. بنابراین، محل استقرار نقطهٔ P از مثلث $\triangle ABC$، که مجموع فواصل آن از سه راس مثلث، کمینه باشد، جایی است که دستگاه شکل ۱۵ را دارای انرژی پتانسیل کمینه سازد [۱۸]. اما ویژگیِ هندسیِ محل استقرار P چیست؟ چگونه می‌توان از نظر هندسی، جای نقطهٔ P را در صفحهٔ مثلث $\triangle ABC$ یافت؟ در این جا، با استفاده از ریاضیات، ویژگیِ هندسیِ نقطهٔ P را مشخص می‌کنیم. توجه می‌کنیم که:

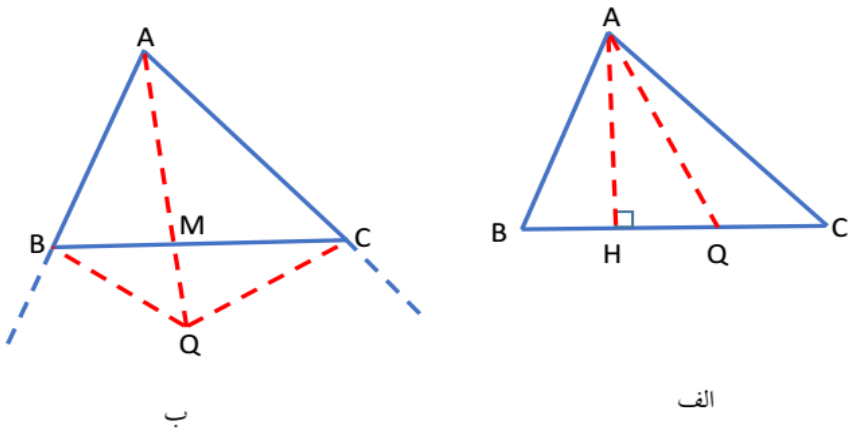
الف) اگر Q نقطه‌ای از یک ضلع مثلث باشد $QA + QB + QC$ وقتی کمینه است که Q، پای ارتفاع وارد از رأس مقابل بر آن ضلع باشد، زیرا با توجه به شکل (۱۶- الف) داریم

$$QA + QB + QC = QA + BC = QA + HB + HC \geq HA + HB + HC.$$

ب) اگر Q نقطه‌ای درون زاویهٔ $\angle BAC$ و بیرون مثلث باشد، آن‌گاه $QA + QB + QC$ کمینه نیست، زیرا با توجه به شکل (۱۶- ب) داریم

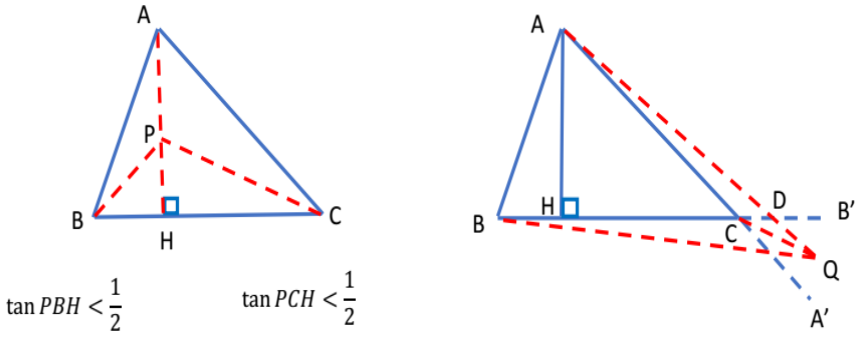
$$\begin{aligned} QA + QB + QC &= (QM + MA) + QB + QC > QM + MA + BC \\ &> MA + BC = MA + MB + MC. \end{aligned}$$

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.129471.1445



ب الف

شکل ۱۶: (الف) اگر Q بر ضلع BC واقع باشد، مقدار $QA+QB+QC$ وقتی کمینه است که Q بر H، پای ارتفاع وارد از رأس A بر ضلع BC باشد. (ب) اگر $AQ>AM$، آن‌گاه $QA+QB+QC>MA+MB+MC$.



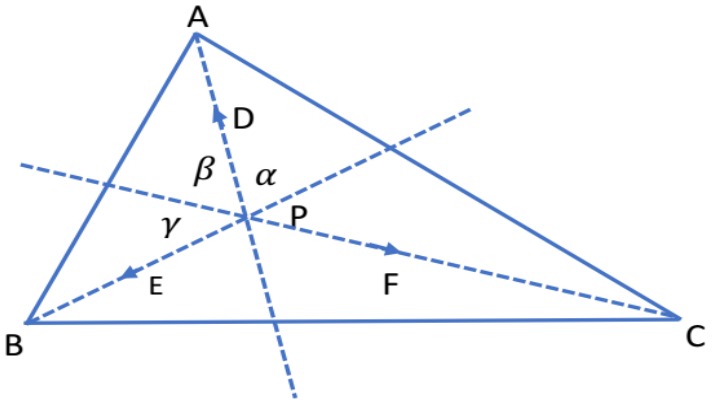
ب الف

شکل ۱۷: (الف) اگر Q نقطه‌ای درون زاویهٔ $\angle A'CB'$ باشد، $QA+QB+QC$ کمینه نیست. (ب) اگر P نقطه‌ای از ارتفاع AH و به اندازهٔ کافی نزدیک H باشد، در این صورت $PA+PB+PC<HA+HB+HC$.

پ) اگر Q نقطه‌ای درون زاویهٔ $\angle A'CB'$ باشد، $QA+QB+QC$ کمینه نیست، زیرا با توجه به شکل (۱۷- الف) داریم

$$\begin{aligned} QA+QB+QC &= (QD+DA)+QB+QC > QD+DA+BC \\ &> DA+BC > DA+HB+HC > HA+HB+HC. \end{aligned}$$

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.129471.1445



شکل ۱۸: نقطهٔ P، از صفحهٔ مثلث $\triangle ABC$ با سه زاویهٔ حاده، که مجموع $PA+PB+PC$ را کمینه سازد، درون مثلث قرار دارد و نیروهای $\overrightarrow{PD}$، $\overrightarrow{PE}$ و $\overrightarrow{PF}$ در حال تعادلند.

ت) فرض می‌کنیم P نقطه‌ای از ارتفاع AH و به اندازهٔ کافی نزدیک H باشد، در این صورت با توجه به شکل (۱۷- ب) و با فرض $\tan PBH < \frac{۱}{۲}$ و $\tan PCH < \frac{۱}{۲}$، داریم:

$$\begin{aligned}(PA+PB+PC)-(HA+HB+HC) &= PB+PC-HP-HB-HC\\ &= PB+PC-HP-PB\cos PBH-PC\cos PCH\\ &= PB(۱-\cos PBH)+PC(۱-\cos PCH)-HP\\ &= PB(۱-\cos PBH-\frac{۱}{۲}\sin PBH)+PC(۱-\cos PCH-\frac{۱}{۲}\sin PCH)\\ &= PB\sin\frac{PBH}{۲}\cos\frac{PBH}{۲}(۲\tan\frac{PBH}{۲}-۱)\\ &+PC\sin\frac{PCH}{۲}\cos\frac{PCH}{۲}(۲\tan\frac{PCH}{۲}-۱)<۰.\end{aligned}$$

بنابراین $PA+PB+PC<HA+HB+HC$ و نقطهٔ P، که مجموع $PA+PB+PC$ را کمینه سازد، نقطه‌ای از درون مثلث است.

اکنون شکل ۱۸ را در نظر می‌گیریم، به وزنه‌های A'، B' و C'، به ترتیب نیروهای $\overrightarrow{PD}$، $\overrightarrow{PE}$ و $\overrightarrow{PF}$ برابر با mg نیوتن، در امتدادهای PA، PB و PC وارد می‌شود و $\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{PF}=۰$. تصویر این رابطهٔ برداری در راستای PA نتیجهٔ $mg=mg\cos\alpha+mg\cos\beta$ یا $\cos\alpha+\cos\beta=۱$ را به همراه دارد. به همین ترتیب $\cos\alpha+\cos\gamma=۱$ و $\cos\beta+\cos\gamma=۱$ و در نتیجه $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{۳}$. بنابراین، قضیهٔ زیر از هندسهٔ اقلیدسی به‌دست می‌آید:

قضیه ۴.۳. *نقطهٔ P واقع در صفحهٔ مثلث $\triangle ABC$ با سه زاویهٔ حاده، که مجموع $PA+PB+PC$ را کمینه سازد، نقطه‌ای درون مثلث است و در محل برخورد کمان‌های درخور زاویهٔ ۱۲۰ درجهٔ اضلاع مثلث قرار دارد، یعنی*

$$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=۱۲۰^\circ.$$

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.129471.1445

۴. سخن آخر

خواننده می‌تواند نمونه‌های دیگری از این استدلال‌ها را در مورد علامت حاصل‌ضرب اعداد حقیقی در [۲] بیابد، یا خود برای برخی فرمول‌های نظریهٔ اعداد، مانند فرمول مجموع جمله‌های یک تصاعد حسابی، با استفاده از قانون اهرم ارشمیدس، استدلال فیزیکی بیاورد. دور از انتظار نیست که همهٔ این نمونه‌ها، این فکر را در خواننده تقویت کنند که هر چند در هر یک از آن‌ها، قانونی از علوم دیگر به کار بسته شده است، اما از جنبهٔ ریاضیِ هیچ یک از آن علوم نمی‌توان چشم پوشید. این رأی از صواب دور نیست، زیرا از خصایص زمانه این بوده و هست که هر چه علوم پیشرفت می‌کنند، بر جنبهٔ ریاضیِ آن‌ها افزوده شده و می‌شود. در سال‌های بسیار دور، مساحان مصری می‌پنداشتند که مساحت یک زمین چهارضلعی به اضلاع a، b، c و d از دستور $S = \frac{(a+c)(b+d)}{۴}$ یا به‌دست می‌آید. با پیشرفت ریاضیات معلوم شد که در واقع $S \leq \frac{(a+c)(b+d)}{۴}$، و تساوی زمانی برقرار است که چهارضلعی مستطیل باشد. در سال‌هایی نه چندان دور، هواشناسی غیر علمی و غیر ریاضی بود، و پیش‌بینیِ هوا با استفاده از مشاهدات کلی، مانند رنگ آسمان، نوع ابر و واکنش‌های برخی از جانوران صورت می‌گرفت. اکنون که به کمک تصاویر ماهواره‌ای، داده‌هایی از لایه‌های بالایی جو به‌دست می‌آوریم، با استفاده از فیزیک ریاضی، به توفیقات بیشتری در پیش‌گوییِ هوا دست می‌یابیم. افزون بر این‌ها، برخی از راه‌حل‌هایی که از قانون‌های سایر علوم به‌دست می‌آیند پاسخگوی تمام پرسش‌های مربوط نیستند و سرانجام استفاده از ریاضیات را ضروری می‌نمایند. بندهای ۲ ۰ ۵، ۳ ۰ ۱ و ۳ ۰ ۳، آشکارا این سخنان را تأیید می‌کنند.

در قرن حاضر، در هر یک از شاخه‌های گوناگون علوم، پیشرفت‌های چشم‌گیری حاصل شده است. هر یک از آن‌ها، برج عظیمی از افتخار برای خود ساخته‌اند. برج‌هایی که سر بر آسمان می‌سایند، و بناهایی زیبا که موجبات شوق و لذت معماران خود را فراهم می‌آورند. بناهایی که کالبد آن‌ها ریاضیات است و معماران هر یک، روش‌ها و ابزارهای خاص خود را دارند، و با اینکه نوعی هم‌آوایی و هم‌خوانی بین آن‌ها وجود دارد، اما هر یک به زبان خود سخن می‌گویند. ابزار مشترک همهٔ آن‌ها، قدرت یزدانی فکر آدمی است، که به کمک آن، اسرار آفرینش خلّاق و معمار یکتای جهان را آشکار می‌سازند.

۵. تشکر وقدردانی

نویسندهٔ مقاله، از داوران محترم، به خاطر نظرات ارزشمندشان، تشکر و قدردانی می‌نماید.

مراجع

[۱] ج. پولیا، *خلاقیت ریاضی*، ترجمهٔ پرویز شهریاری، تهران، انتشارات فاطمی، ۱۳۶۶.

[۲] ج. پولیا، *روش‌های ریاضیات در علوم*، ترجمهٔ علی پارسیان، تفرش، انتشارات دانشگاه تفرش، ۱۳۹۲.

[۳] ج. ا. مارسدن و آ. ج. ترومبا، *حساب برداری*، ترجمهٔ علی‌اکبر عالم‌زاده، حسین محمدداودی، تهران، موسسهٔ نشر علوم نوین، ۱۳۷۰.

[۴] ع. پارسیان، شهود در آموزش ریاضیات چالش یا هنجار، *ریاضی و جامعه*، **۳** (۱۳۹۶) ۱–۶.

[۵] م. ج. گرینبرگ، *هندسه‌های اقلیدسی و نا اقلیدسی*، ترجمهٔ محمدهادی شفیعی‌ها، تهران، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۱.

[6] W. F. Chen, Differential geometry from quantum field theory, *Int. J. Geom. Methods Mod.*, **10** (2013) 32 pp.

[7] E. Witten, Supersymmetry and Morse theory, *J. Differential Geom.*, **17** (1982) 661–692.

[8] L. Álvarez-Gaumé, Supersymmetry and the Atiyah-Singer index theorem, *Commun. Math. Phys.*, **90** (1983) 161–173.

[9] L. Álvarez-Gaumé, A note on The Atiyah-Singer index theorem, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **A16** (1983) 4177–4182.

[10] E. Witten, Quantum field theory and the Jones polynomial, *Commun. Math. Phys.*, **121** (1989) 351–399.

[11] J. W. Milnor, *Topology from the Differentiable Viewpoint*, The University Press of Viriginia, Charlottesville, 1972.

[12] J. Gegenberg and G. Kunstatter, Using 3D stringy gravity to understand the Thurston conjecture, *Class.Quant.Grav*, **21** (2004) 1197–1208.

[13] C. H. Taubes, SW $\Longrightarrow$ Gr: From the Seiberg-Witten equations to pseudo-holomorphic Curves, *J. Am. Math. Soc.*, **9** (1996) 845–918.

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.129471.1445

[14] E. Witten, Topological quantum field theory, *Commun. Math. Phys.*, **117** (1988) 353–386.

[15] S. K. Donaldson, An application of gauge theory to four-dimensional topology, *J. Differential Geom*, **18** (1983) 279–315.

[16] S. K. Donaldson, Polynomial invariants for smooth manifolds, *Topology*, **29** (1990) 257–315.

[۱۷] م. م. شیفر، ل. باودن، *نقش ریاضیات در علوم*، ترجمهٔ علیرضا مدقالچی، تهران، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۴.

[۱۸] و. ا. اوسپنسکی، *برخی کاربردهای مکانیک در ریاضیات*، ترجمهٔ کاظم ابهری، تهران، نشر گستره، ۱۳۶۱.

[19] G. Polya, *Mathematics and Plausible Reasoning*, **1**, Prinston University Press, Princeton, New Jersey, 1968.

[۲۰] ج. ف. سیمونز، *معادلات دیفرانسیل و کاربرد آن‌ها*، ترجمهٔ علی‌اکبر بابایی، ابوالقاسم میامئی، تهران، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۹۲.

[۲۱] ر. کورانت، آزمایش‌های لایهٔ صابون برای نمایش رویه‌های مینیمال، ترجمهٔ علی پارسیان، *جُنگ ریاضی دانشجو*، **۴** (۱۳۶۸) ۱۰۰ – ۱۰۸.

علی پارسیان

گروه ریاضی، دانشگاه تفرش، تفرش، ایران.

parsian@tafreshu.ac.ir

نویسنده متولد سال ۱۳۳۸ در شهرستان ساوه است. او پس از تغییر رشتهٔ دانشگاهی خود، در سال ۱۳۵۸ وارد مقطع کارشناسی رشتهٔ ریاضی دانشگاه تهران، در سال ۱۳۶۵ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشتهٔ ریاضی دانشگاه تهران و در سال ۱۳۶۷ وارد مقطع دکتری ریاضی همان دانشگاه شد. وی عضو هیئت علمی دانشگاه تفرش است.

Physical Arguments in Mathematics

Ali Parsian

Abstract: Many readers of mathematical texts are familiar with the application of mathematics in other sciences. For some of them, it is surprising to hear about the applications of the other sciences in mathematics. In this article, we intend to study this subject. We survey the history of sciences, in order to get an acquaintance with the ideas and methods of the great mathematicians for solving some of the olden mathematical problems with the aid of other scientific laws. Then, with the same approach, we provide the solutions of some mathematical problems.

Keywords: Median, Centroid, Brachistochrone curve, Ellipse, Minimal Surface.

Ali Parsian
Department of Mathematics, Tafresh University, Tafresh, Iran.
Email: parsian@tafreshu.ac.ir

Communicated by Mohamad Reza Pouryayevali.
Article Type: Research Paper.
Received: 10/07/2021, Accepted: 12/12/2021.

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.129471.1445