

Examining the Efficiency of Portfolio Optimization using Model of Minimum-Variance and N/1 in Portfolio Selection

Reza Raei¹, Saeed Bajalan^{2*}, Alireza Ajam³

1- Professor., Finance and Insurance Department, Faculty of Management, University of Tehran, Tehran, Iran
raei@ut.ac.ir

2- Assistant professor, Finance and Insurance Department, Faculty of Management, University of Tehran, Tehran, Iran
saeedbajalan@alumni.ut.ac.ir

3- Ph.D. Student in Finance, Finance and Insurance Department, Faculty of Management, University of Tehran, Tehran, Iran
ajamalireza@ymail.com

Abstract

The issue of portfolio selection has always been considered as one of the key issues in the field of investment. To select optimal portfolios, various models and methods have been represented since the initial presentation of the Markowitz approach. However, finding the most efficient model in portfolio selection has always been the subject of concern. Introducing a new model, called "the composition model of minimum-variance and N/1", this paper aims to examine the efficiency of three different models of portfolio optimization. For this purpose, the performance of the composition model is compared with the sole minimum-variance model and the sole N/1 model. To evaluate the performance of the portfolios, some criteria such as Sharpe ratio, Trainer ratio, Modigliani and Modigliani ratio, Sortino ratio, and Information ratio have been applied. Finally, the TOPSIS multi-criteria decision-making method for ranking the research models has been used. The results indicate the superiority of the composition model over the two models applied solely.

Keywords: Portfolio Selection, N/1 model, Minimum-Variance model, Composition Model of Minimum-Variance and N/1

بررسی کارآیی بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری با استفاده از الگوی ترکیبی حداقل واریانس و 1/N

رضا راعی^۱، سعید باجلان^{۲*}، علی‌رضا عجم^۳

۱- استاد، گروه مالی و بیمه، دانشکده مدیریت، دانشگاه تهران، تهران، ایران
raei@ut.ac.ir

۲- استادیار، گروه مالی و بیمه، دانشکده مدیریت، دانشگاه تهران، تهران، ایران
saeedbajalan@alumni.ut.ac.ir

۳- دانشجوی دکتری مالی، گروه مالی و بیمه، دانشکده مدیریت، دانشگاه تهران، تهران، ایران
ajamalireza@ymail.com

چکیده

همواره به مسئله انتخاب سبد به‌منزله یکی از مسائل اساسی در زمینه سرمایه‌گذاری توجه شده است. الگوها و روش‌های مختلفی از زمان ارائه کار اولیه مارکویتز تا کنون برای انتخاب سبد سرمایه‌گذاری بهینه ارائه شده است. با این حال یافتن مفیدترین الگو در انتخاب این سبد همواره دغدغه سرمایه‌گذاران بوده است. هدف از این پژوهش بررسی کارآیی بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری با استفاده از الگوی جدید با نام الگوی ترکیبی حداقل واریانس و 1/N است؛ بدین منظور الگوی ترکیبی حداقل واریانس و 1/N ارائه و عملکرد این الگو با الگوهای حداقل واریانس و الگوی 1/N مقایسه شده است. برای ارزیابی عملکرد سبد سرمایه‌گذاری حاصل از الگوهای پژوهش از معیارهایی مانند شارپ، ترینر، مودیلیانی - مودیلیانی، اطلاعات و سورتینو و درنهایت از روش تصمیم‌گیری چندمعیاره TOPSIS برای رتبه‌بندی الگوهای پژوهش استفاده شده است. نتایج پژوهش نشان‌دهنده برتری الگوی ترکیبی حداقل واریانس و 1/N نسبت به الگوهای دیگر است.

واژه‌های کلیدی: انتخاب سبد سرمایه‌گذاری، الگوی 1/N، الگوی حداقل واریانس، الگوی ترکیبی حداقل واریانس و 1/N

مقدمه

وجود بازار سرمایه فعال و پویا از نشانه‌های توسعه یافتگی کشورها در سطح بین‌المللی است. در کشورهای توسعه یافته بیشتر سرمایه‌گذاری‌ها در بازارهای مالی صورت می‌گیرد. مشارکت فعال افراد جامعه در بورس متضمن حیات بازار سرمایه و توسعه پایدار کشور است. عمده‌ترین مسئله‌ای که سرمایه‌گذاران این بازارها با آن روبه‌رو هستند، تصمیم‌گیری در زمینه انتخاب سبد مناسب برای سرمایه‌گذاری است.

پس از آنکه مارکوویتز^۱ (۱۹۵۲) مسئله بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری میانگین - واریانس را ارائه کرد، پژوهش‌های مختلفی در این زمینه انجام و مسئله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری به منزله یکی از دغدغه‌های اصلی در حوزه دانشگاهی و حرفه‌ای مطرح شد و به دنبال آن کارهای بیشتری در این زمینه انجام گرفت. مفهوم انتخاب دارایی‌ها در سبد سرمایه‌گذاری از نظر او چنین بود که سرمایه‌گذاران با در نظر داشتن دو عامل بازده و ریسک به دنبال حداکثر کردن بازده خود با کمترین ریسک یا کمینه کردن ریسک با حداکثر بازده‌اند؛ اما در این زمینه برآورد پارامترها نظیر بازده موردانتظار با سختی‌ها و خطاهایی همراه است؛ به طوری که بسیاری از الگوهای ارائه شده بعد از مارکوویتز بر کاهش خطاهای تخمین بازده موردانتظار تمرکز کرده‌اند. از طرفی، مسئله بهینه‌سازی مارکوویتز بر مفروضاتی مبتنی است که همواره درباره آنها بحث شده است. میچاد^۲ (۱۹۸۹) معتقد است الگوی میانگین - واریانس به دلیل مفروضات مطرح شده در آن جذابیت کمتری دارد و به ارائه الگوهای دیگر نیاز است.

الگوی حداقل واریانس، الگوی دیگری است که در زمینه انتخاب سبد ارائه شده است. در این الگو با سرمایه‌گذاری روبه‌رو هستیم که تنها دغدغه او کمینه کردن ریسک سبد سرمایه‌گذاری است. در این الگو با توجه به تفاوت در میزان ریسک دارایی‌ها امکان تمرکز بیش از حد در یک یا چند دارایی به وجود می‌آید؛ به طوری که بخش چشمگیری از ریسک کل سبد سرمایه‌گذاری از یک یا چند دارایی تأثیر می‌گیرد؛ در واقع، بدین ترتیب تنوع سبد سرمایه‌گذاری به دست آمده به لحاظ ریسک کاهش می‌یابد که از ایرادات الگوی حداقل واریانس است [۱۳].

الگوی دیگر در زمینه انتخاب سبد سرمایه‌گذاری، الگوی $1/N$ است که در آن در سبدهی متشکل از N دارایی، وزنی برابر به هر دارایی اختصاص می‌یابد. سرمایه‌گذاران با وجود سادگی این الگو همچنان به دو دلیل از آن استفاده می‌کنند: یکی، نیاز نداشتن به برآورد همراه با خطای پارامترها در بهینه‌سازی و دیگر آنکه با وجود ارائه نظریه‌ها و روش‌های مختلف برای بهینه‌سازی سبد از طریق برآوردها در ۵۰ سال گذشته سرمایه‌گذاران همچنان سادگی را در انتخاب سبد ترجیح می‌دهند [۶]. دی‌میگوئل^۳ و همکاران (۲۰۰۹) و چاوز^۴ و همکاران (۲۰۱۲) نیز در پژوهش‌های خود به این نتیجه رسیدند که وزن‌دهی برابر بیشتر به دلیل خطاهای تخمین بازدهی‌های موردانتظار نتایج بهتری در مقایسه با بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری دارای حداقل واریانس دارد و عملکرد الگوی $1/N$ از الگوی میانگین - واریانس و الگوی ترکیبی حداقل واریانس و $1/N$ نیز بهتر است. جنبه منفی الگوی $1/N$ این است که هیچ اطلاعاتی را درباره بازده، ریسک و همبستگی با دیگر دارایی‌ها در نظر نمی‌گیرد؛ بنابراین، سبد سرمایه‌گذاری

3. DeMiguel
4. Chaves

1. Markowitz
2. Michaud

شرح است: در بخش بعدی مبانی نظری بیان می‌شود؛ سپس روش پژوهش بررسی می‌شود؛ در نهایت نیز یافته‌ها و نتایج و پیشنهادها مطرح می‌شود.

مبانی نظری

در حدود قرن چهارم رابی ایزاک بار آها^۱ قاعده‌ای برای تخصیص دارایی‌ها پیشنهاد داد: «یک فرد باید همیشه ثروتش را به سه بخش تقسیم کند؛ یک سوم در زمین، یک سوم در کالا و یک سوم آماده در دستش» [۶]. پس از یک سکون مختصر در ادبیات دربارهٔ تخصیص دارایی، مارکویتز در سال ۱۹۵۲ پیشرفت‌های چشمگیری ایجاد کرد و قاعده‌ای بهینه برای تخصیص ثروت بین دارایی‌های ریسکی در شرایطی ایستا (یعنی زمانی که سرمایه‌گذاران تنها مراقب میانگین و واریانس بازده یک سبد سرمایه‌گذاری‌اند) ارائه کرد. پس از آن و برای بهبود عملکرد الگوی مارکویتز، تلاش زیادی صورت گرفت تا موضوع کنترل خطای برآورد بهبود یابد. در ادامه برخی پژوهش‌های انجام‌شده در زمینه انتخاب سبد سرمایه‌گذاری با تکیه بر الگوهای مطالعه‌شده در پژوهش حاضر بررسی می‌شود.

دی‌میگوئل و همکاران (۲۰۰۹) عملکرد الگوی $1/N$ را در مقایسه با ۱۴ الگوی بهینه‌سازی دیگر بررسی کردند. نتایج پژوهش آنها نشان می‌دهد هیچ الگویی نسبت شارپ، بازده معادل اطمینان و حجم معاملات بالاتری از الگوی $1/N$ ندارد. حتی الگوی ترکیبی حداقل واریانس و $1/N$ ارائه‌شده در این پژوهش عملکرد بهتری نسبت به الگوی $1/N$ ندارد. بهر^۲ و همکاران (۲۰۱۲) با پیشنهاد رویکرد مبتنی بر ویژگی‌های سهام برای انتخاب سبد سرمایه‌گذاری که از

به‌دست آمده احتمالاً به‌خوبی متنوع نیست و سرمایه‌گذار متحمل ریسکی خواهد بود که بابت آن بازده متناسب را به دست نخواهد آورد [۶].

دی‌میگوئل و همکاران (۲۰۰۹) الگوی ترکیبی حداقل واریانس و $1/N$ را ارائه کردند. دلیل اصلی ارائه این الگو آن است که با توجه به سختی و خطاهای مطرح‌شده در برآورد بازده موردانتظار نسبت به کوواریانس ممکن است سرمایه‌گذاری بخواهد میانگین بازده‌ها را نادیده بگیرد؛ اما به برآوردهای کوواریانس توجه کند و با تمرکز بر کمینه کردن ریسک که در الگوی حداقل واریانس مطرح است، بتواند از مزایای الگوی $1/N$ نیز بهره‌برد. در این پژوهش عملکرد این الگو در مقایسه با الگوهای دیگر بررسی می‌شود و نتایج آن از بعد نظری زمینه‌ای را فراهم می‌کند تا بهترین روش انتخاب سبد سرمایه‌گذاری بهینه در ادبیات موضوع از بین چندین روش و براساس معیارهای عملکردی مختلف ارائه شود.

هدف از این پژوهش بررسی کارآیی بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری با استفاده از الگوی ترکیبی حداقل واریانس و $1/N$ ارائه‌شده توسط دی‌میگوئل و همکاران (۲۰۰۹) و مقایسه عملکرد آن با الگوی $1/N$ و الگوی حداقل واریانس و در نهایت رتبه‌بندی این الگوهاست. این پژوهش، اولین پژوهشی است که این الگوها را مقایسه و در این زمینه از معیارهای مختلفی برای ارزیابی عملکرد سبد سرمایه‌گذاری استفاده و در پایان رتبه‌بندی این الگوها را ارائه کرده است. دلیل انتخاب این سه الگو این است که این الگوها بازده را در نظر نمی‌گیرند و خطاهای پیش‌بینی بازده در آنها تأثیرگذار نیست. نتایج این پژوهش برای سرمایه‌گذاران و فعالان بازار سرمایه که به‌دنبال درامان‌ماندن از معایب مترتب بر برآورد بازده‌اند، قابل استفاده است. ساختار مقاله بدین

1. Rabbi Issac bar Aha
2. Behr

نمونه‌گیری از یک الگوی احتمال چندمتغیره تخمین زدند که شامل عدم تقارن توزیع انتظارات است. نتایج نشان می‌دهد اعمال رابطه‌ها با استفاده از الگوی حاشیه‌ای که از درآمیختن خصوصیات پویا مثل خودرگرسیون، دسته‌بندی نوسانات و چولگی است، خطای تخمین را نسبت به نمونه‌گیری تاریخی کاهش می‌دهد. در پژوهش آنها عملکرد الگوی $1/N$ بهتر از الگوی حداقل واریانس و الگوی ترکیبی حداقل واریانس و $1/N$ است.

در پژوهش‌های داخلی، پژوهشی یافت نشد که الگوهای انتخاب سبد سرمایه‌گذاری را بدون در نظر گرفتن بازده مقایسه کند و این پژوهش، اولین پژوهشی است که این الگوها را بررسی می‌کند. همان طور که بیان شد بیشتر پژوهش‌ها الگوهایی را بررسی کرده است که تخمین بازده را در نظر می‌گیرد و با توجه به خطای تخمین و سختی‌های برآورد بازده، این پژوهش تنها بر الگوهایی تمرکز می‌کند که بازده را در نظر نمی‌گیرد؛ مانند الگوی حداقل واریانس، الگوی $1/N$ و الگوی ترکیبی حداقل واریانس و $1/N$. برتری دیگر این پژوهش نسبت به پژوهش‌های اشاره‌شده در معیارهای ارزیابی عملکرد است که علاوه بر در نظر گرفتن معیارهای ارزیابی عملکرد مختلف، از آنها برای رتبه‌بندی الگوهای پژوهش با استفاده از الگوی TOPSIS بهره برده است؛ به طوری که در انتها با استفاده از نتایج به دست آمده از این رتبه‌بندی می‌توان درباره برترین الگوی انتخاب سبد سرمایه‌گذاری در بین الگوهای بررسی شده قضاوت کرد.

روش پژوهش

همان‌طور که بیان شد در این پژوهش هم برای انتخاب سبد سرمایه‌گذاری بهینه و هم برای سنجش

اصلاح الگوی برانت^۱ و همکاران (۲۰۰۹) به دست آمده است، عملکرد این رویکرد را با الگوهای دیگر نظیر میانگین - واریانس، حداقل واریانس، $1/N$ و الگوهای عاملی دیگر مقایسه کردند. نتایج نشان می‌دهد با توجه به اینکه در الگوی حداقل واریانس از میانگین چشم‌پوشی شده است و تنها بر کوواریانس‌های بازده دارایی‌ها تمرکز شده است، این الگو عملکرد بهتری از الگوی میانگین - واریانس دارد. با وجود این، الگوی حداقل واریانس عملکرد بهتری در مقایسه با الگوی $1/N$ ندارد. کیربی و استدیگ^۲ (۲۰۱۲) برای بررسی عملکرد راهبردهای ساده و فعال نسبت به راهبرد $1/N$ از دو روش جایگزین انتخاب سبد سرمایه‌گذاری میانگین - واریانس شامل زمان‌بندی نوسانات و زمان‌بندی پاداش به ریسک بهره بردند که برای کاهش اثرات تخمین ریسک طراحی شده است. هر یک از این روش‌ها به سرمایه‌گذار اجازه می‌دهد روی حجم معاملات خود کنترل داشته باشد؛ از این رو، هزینه‌های معاملات با استفاده از پارامتر تنظیم به منزله معیاری از زمان‌بندی تفسیر می‌شود. نتایج این پژوهش عملکرد بهتر راهبردهای زمان‌بندی را نسبت به الگوی $1/N$ نشان می‌دهد. فلتچر^۳ (۲۰۱۷) مزایای استفاده از ویژگی‌های سهام در انتخاب سبدهای بهینه را با استفاده از رویکرد برانت و همکاران (۲۰۰۹) بررسی کرد. نتایج نشان داد سبد سرمایه‌گذاری انتخابی با استفاده از رویکرد ویژگی‌های سهام از نظر معیار شارپ عملکرد بهتری نسبت به سایر الگوها از جمله الگوهای $1/N$ و میانگین - واریانس دارد. لو^۴ و همکاران (۲۰۱۶) برای بهبود عملکرد الگوی میانگین - واریانس با استفاده از الگوی توزیعی عدم تقارن، بازده مازاد موردانتظار را به وسیله

1 Brandt

2. Kirby & Ostdiek

3. Fletcher

4. Low

نباشد و سرمایه‌گذار را متحمل ریسکی کند که بابت آن بازده متناسبی کسب نمی‌کند [۶]. از طرفی، در الگوی حداقل واریانس با توجه به تفاوت در میزان ریسک‌پذیری افراد امکان تمرکز بیش از حد در یک یا چند دارایی به وجود می‌آید؛ به طوری که بخش چشمگیری از ریسک کل سبد سرمایه‌گذاری از یک یا چند دارایی تأثیر می‌گیرد [۱۳]. الگوی ترکیبی با استفاده از دو الگوی حداقل واریانس و $1/N$ به دست آمده و برای بررسی عملکرد این الگو، عملکرد سبد سرمایه‌گذاری انتخابی براساس این الگو با دو الگوی به دست آمده از آن مقایسه شده است؛ بنابراین، الگوهای استفاده‌شده در پژوهش عبارت‌اند از: الگوی $1/N$ ، الگوی حداقل واریانس و الگوی ترکیبی حداقل واریانس و $1/N$ که در ادامه توضیح داده می‌شود. در جدول (۱) الگوهای انتخاب سبد ارائه شده است.

جدول (۱) الگوهای انتخاب سبد سرمایه‌گذاری

علامت اختصاری	الگو
ew	الگوی $1/N$ یا وزن برابر
min	الگوی حداقل واریانس
ew-min	الگوی ترکیبی حداقل واریانس و $1/N$

الگوی $1/N$ یا الگوی با وزن برابر^۲ (ew)، به سادگی وزن مشابه را به هر دارایی تخصیص می‌دهد. اگر N سهم وجود داشته باشد، هر سهم $1/N$ وزن را خواهد داشت [۶]:

$$W^{ew} = \frac{1}{N} \quad (1)$$

ایده سبد سرمایه‌گذاری با وزن برابر برای این است که سبد سرمایه‌گذاری را مستقل از تخمین پارامترها و

عملکرد سبد سرمایه‌گذاری از روش‌ها و الگوهای مختلفی استفاده شده و در پایان روش تصمیم‌گیری چندمعیاره TOPSIS برای رتبه‌بندی الگوهای پژوهش به کار رفته است. سبد سرمایه‌گذاری و اوزان بهینه به دست آمده از هر الگو برای سال‌های ۱۳۸۸ تا ۱۳۹۵، با استفاده از پنجره تخمین چرخشی^۱ سه‌ساله به دست می‌آید؛ به بیان دیگر، به ازای هر سه سال یک سبد سرمایه‌گذاری برای هر یک از الگوها تعیین می‌شود؛ در واقع، از این دوره سه‌ساله برای محاسبه وزن‌های بهینه، بازده و ریسک سبد و در انتها معیارهای ارزیابی عملکرد استفاده می‌شود. در پایان نیز الگوها رتبه‌بندی می‌شود.

همان‌طور که بیان شد هدف از این پژوهش بررسی کارآیی بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری با استفاده از الگوی ترکیبی حداقل واریانس و $1/N$ است. در الگوی ترکیبی فرض بر آن است که سرمایه‌گذار قصد دارد بدون در نظر گرفتن برآوردهای بازده موردانتظار و تنها با توجه به برآوردهای کوواریانس، ریسک موردانتظار سبد سرمایه‌گذاری را حداقل کند [۶]. ارائه الگوی ترکیبی بدین دلیل است که همچنان از الگوی $1/N$ با وجود ارائه الگوهای مختلف برای انتخاب سبد سرمایه‌گذاری به دلیل سادگی و نیازنداشتن به برآورد پارامترهای دیگر استفاده می‌شود؛ علاوه بر این، نتایج پژوهش‌های لو و همکاران (۲۰۱۶)، بهر و همکاران (۲۰۱۲)، دی‌میگوتل و همکاران (۲۰۰۹) و چاوز و همکاران (۲۰۱۲) بیان‌کننده برتری عملکرد الگوی $1/N$ نسبت به سایر الگوهاست. با این حال، این الگو ویژگی‌هایی از جمله بازده، ریسک و همبستگی بین دارایی‌های سبد سرمایه‌گذاری را در نظر نمی‌گیرد که این امر سبب می‌شود سبد سرمایه‌گذاری به دست آمده به خوبی متنوع

اصولی ارائه این الگو آن است که برآورد بازده‌های موردانتظار نسبت به کوواریانس سخت‌تر است و ممکن است سرمایه‌گذاری بخواهد میانگین بازده‌ها را نادیده بگیرد؛ اما به برآوردهای کوواریانس توجه کند. به دلیل آنکه فرض می‌شود سرمایه‌گذار بازده‌های موردانتظار را نادیده می‌گیرد، حداکثر مطلوبیت موردانتظار برابر است با حداقل واریانس سبد سرمایه‌گذاری در شرایطی که Σ نامعلوم باشد؛ بنابراین، هدف کمینه کردن واریانس موردانتظار سبد سرمایه‌گذاری است [۵]:

$$\min_{c,d} \text{variance}(c,d) = \frac{1}{\gamma} E \left[\left(c \frac{1}{N} \mathbf{1}_N + d \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_N \right)^T \Sigma \left(c \frac{1}{N} \mathbf{1}_N + d \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_N \right) \right] \quad (4)$$

$$= \frac{1}{\gamma} E \left[\frac{c^2}{N^2} \mathbf{1}_N^T \Sigma \mathbf{1}_N + d^2 \mathbf{1}_N^T \hat{\Sigma}^{-1} \Sigma \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_N + \frac{cd}{N} \mathbf{1}_N^T \Sigma \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_N \right] \quad (5)$$

فرض کنید $W \equiv \Sigma^{-1} \hat{\Sigma}^{-1} \Sigma^{-1}$. پس $W^{-1} = \Sigma^{\dagger} \hat{\Sigma}^{-1} \Sigma^{\dagger}$ و $W^{-2} = \Sigma^{\dagger} \hat{\Sigma}^{-1} \Sigma \hat{\Sigma}^{-1} \Sigma \hat{\Sigma}^{-1} \Sigma^{\dagger}$ رابطه ۵ به صورت زیر است:

$$\frac{c^2}{\gamma N^2} \mathbf{1}_N^T \Sigma \mathbf{1}_N + E \left[\frac{1}{\gamma} d^2 \mathbf{1}_N^T \hat{\Sigma}^{-1} W^{-2} \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_N + \frac{cd}{N} \mathbf{1}_N^T \Sigma \hat{\Sigma}^{-1} W^{-1} \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_N \right] \quad (6)$$

از آنجا که $MW \sim W_N(M-1, I_N)$ ، به پیروی از هف^۲ (۱۹۷۹) داریم:

$$E[W^{-1}] = \left(\frac{M}{M-N-\gamma} \right) I_N \quad (7)$$

$$E[W^{-2}] = k I_N \quad (8)$$

که در آنها

$$k = \frac{M^2(M-\gamma)}{(M-N-\gamma)(M-N-\gamma)(M-N-\varepsilon)} \quad (9)$$

ویژگی‌های سهام تعریف کند. جنبه منفی این امر این است که این روش هیچ اطلاعاتی درباره بازده، ریسک و همبستگی با دیگر دارایی‌ها در نظر نمی‌گیرد. این بدان معناست که سبد سرمایه‌گذاری احتمالاً به‌خوبی متنوع نیست؛ بنابراین، سرمایه‌گذار ریسکی را به عهده می‌گیرد که بابت آن بازدهی مناسبی کسب نمی‌کند. وزن‌دار کردن به‌طور مساوی تنها زمانی معنا پیدا می‌کند که مدیران سبد سرمایه‌گذاری اطلاعات بسیار کمی درباره بازده موردانتظار و ریسک سهام انتخاب‌شده در اختیار دارند. جنبه مثبت آن، این است که بسیار ساده است و سرمایه‌گذار قادر است به‌سادگی از این الگو بهره‌برد [۶].

در الگوی حداقل واریانس^۱ (min) با سرمایه‌گذاری روبه‌رو هستیم که تنها دغدغه او کمینه کردن ریسک و واریانس سبد سرمایه‌گذاری است؛ بنابراین، تابعی که سرمایه‌گذار به دنبال بهینه کردن آن است به صورت زیر است [۶]:

$$\min_{w_t} w_t^T \Sigma_t w_t \quad s.t. \quad \mathbf{1}_N^T w_t = 1 \quad (2)$$

که در آن: $\mathbf{1}_N^T$ معکوس بردار یک‌ها، w_t بردار وزن‌ها و w_t^T معکوس بردار وزن‌هاست. برای اجرای این راهبرد از تخمین ماتریس کوواریانس بازده دارایی‌ها استفاده می‌شود. این الگوی بهینه‌سازی با استفاده از روش‌های تحلیلی حل‌شدنی است. درنهایت وزن الگوی حداقل واریانس از رابطه ۳ به دست می‌آید [۶]:

$$W^{min} = \frac{\Sigma_t^{-1} \mathbf{1}_N}{\mathbf{1}_N^T \Sigma_t^{-1} \mathbf{1}_N} \quad (3)$$

که در آن: Σ_t^{-1} ماتریس کوواریانس و $\mathbf{1}_N$ برداری یک‌هاست.

الگوی ترکیبی حداقل واریانس و $1/N$ به تقلید از دی‌میگوتل و همکاران (۲۰۰۹) طراحی شده است. دلیل

داشته باشد و به‌طور مستقل بتوان با توجه به هر معیار درباره برتری الگو قضاوت کرد. در ادامه نحوه محاسبه این معیارها بیان می‌شود. معیارهای ارزیابی عملکرد استفاده‌شده در این پژوهش در جدول ۲ ارائه شده است:

جدول (۲) معیارهای ارزیابی عملکرد سبد سرمایه‌گذاری

معیار	علامت اختصاری
شارپ	SR_p
ترینر	T_p
مودیلیانی - مودیلیانی یا M^2	M_p^2
اطلاعات	IR_p
سورتینو	S_p

معیار شارپ^۱ با نسبت بازده به تغییرپذیری^۲، بازده را نسبت به ریسک کل سبد سرمایه‌گذاری (انحراف معیار بازده) اندازه‌گیری می‌کند. SR_p از تقسیم متوسط بازده اضافی سبد سرمایه‌گذاری بر انحراف معیار به دست می‌آید [۱۴]:

$$SR_p = \frac{\bar{r}_p - \bar{r}_f}{\sigma_p} \quad (14)$$

معیار ترینر^۳ یا نسبت بازدهی به نوسان‌پذیری^۴ با نماد T_p برای یک سبد سرمایه‌گذاری، از تقسیم بازده اضافی بر ریسک سیستماتیک سبد سرمایه‌گذاری به دست می‌آید [۱۴]:

$$T_p = \frac{\bar{r}_p - \bar{r}_f}{\beta_p} \quad (15)$$

فرانکو مودیلیانی و لیا مودیلیانی^۵ معیار M^2 را ارائه کردند. این معیار مشخص می‌کند که اگر سبد

بنابراین، واریانس کمینه‌شده سبد سرمایه‌گذاری برابر است با:

$$variance(c, d) = \frac{c^2}{\gamma N^2} \mathbf{1}_N^T \Sigma \mathbf{1}_N + \frac{1}{\gamma} kd^2 \mathbf{1}_N^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}_N + \frac{Mcd}{M - N - \gamma} \quad (10)$$

می‌خواهیم مقدار c و d را به نحوی به دست آوریم که مقدار مورد انتظار رابطه ۱۰ را حداقل کند؛ با در نظر گرفتن این محدودیت که مجموع وزن‌ها برابر با یک شود. با حل رابطه و ساده کردن آن داریم:

$$c = 1 - d \mathbf{1}_N^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}_N \quad (11)$$

$$d = \frac{(M - N - \gamma)(\mathbf{1}_N^T \Sigma \mathbf{1}_N)(\mathbf{1}_N^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}_N) - N^2 M}{N^2 (M - N - \gamma)k(\mathbf{1}_N^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}_N) - \gamma MN^2 (\mathbf{1}_N^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}_N) + (M - N - \gamma)(\mathbf{1}_N^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}_N)(\mathbf{1}_N^T \Sigma \mathbf{1}_N)} \quad (12)$$

که در این روابط N تعداد دارایی‌ها و M طول دوره‌ای است که برای برآورد گشتاورها استفاده می‌شود؛ در نهایت، در این الگو وزن بهینه از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$W^{ew-min} = c \frac{1}{N} \mathbf{1}_N + d \Sigma^{-1} \mathbf{1}_N \quad s.t. \quad \mathbf{1}_N^T W^{ew-min} = 1 \quad (13)$$

که در آن c و d به نحوی انتخاب می‌شود که مطلوبیت مورد انتظار سرمایه‌گذار از ریسک و بازده را حداکثر کند.

پس از به دست آوردن وزن‌ها، بازده و ریسک سبد سرمایه‌گذاری، معیارهای ارزیابی عملکرد محاسبه می‌شود. در پژوهش‌های لو و همکاران (۲۰۱۶)، بهر و همکاران (۲۰۱۲)، دی‌میگوتل و همکاران (۲۰۰۹) و چاوز و همکاران (۲۰۱۲) از معیارهای مختلفی برای ارزیابی عملکرد سبد سرمایه‌گذاری استفاده شده است. در این پژوهش نیز به پیروی از پژوهش‌های ذکر شده از معیارهای شارپ، ترینر، مودیلیانی - مودیلیانی، اطلاعات و سورتینو استفاده شده است تا عملکرد سبد سرمایه‌گذاری به دست آمده از الگوهای پژوهش از ابعاد مختلف بررسی شود و نتایج پژوهش جامعیت بیشتری

1. The Sharpe Ratio
2. The Reward-to-Variability Ratio
3. Treynor
4. The Reward-to-Volatility Ratio
5. Franco Modigliani & Liah Modigliani

شاخص کل بازار) و DR ریسک نامطلوب^۵ است که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$DR = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_{pt} - MAR)^2} \quad (19)$$

برای ارزش سبد سرمایه‌گذاری بازار از شاخص کل بازار استفاده شده است. همچنین، نرخ بازده اوراق مشارکت به منزله نرخ بازده بدون ریسک در نظر گرفته شده است. در پایان با استفاده از روش TOPSIS رتبه‌بندی الگوهای استفاده شده در این پژوهش ارائه می‌شود. روش TOPSIS یکی از روش‌های استفاده شده در زمینه تصمیم‌گیری چندمعیاره است. هوانگ و یون^۶ (۱۹۸۱) این روش را ارائه کردند. در این روش m گزینه به وسیله n معیار ارزیابی می‌شود و هر مسئله به منزله یک سیستم هندسی شامل m نقطه در یک فضای n بعدی در نظر گرفته می‌شود. اساس این فن بر این مفهوم استوار است که گزینه انتخابی باید کمترین فاصله را با راه‌حل ایده‌آل مثبت (بهترین حالت ممکن) و بیشترین فاصله را با راه‌حل ایده‌آل منفی (بدترین حالت ممکن) داشته باشد [۱]. در این پژوهش چهار الگو به منزله گزینه‌های انتخاب سبد سرمایه‌گذاری و پنج معیار ارزیابی عملکرد به منزله معیارهای انتخاب در نظر گرفته شده است و وزن یکسانی به هر یک از معیارها داده شده است.

نمونه بررسی شده در این پژوهش شامل شاخص‌های صنایع مختلف بورس اوراق بهادار تهران است که مجموع ارزش بازار آنها هشتاد درصد از ارزش کل بازار را تشکیل می‌دهد؛ بدین ترتیب از بین شاخص‌های صنایع بورس اوراق بهادار ۱۰ شاخص در نظر گرفته شده است. داده‌های مربوط به این شاخص‌ها برای سال‌های ۱۳۸۸ تا ۱۳۹۵ بررسی شده است. در جدول (۳) شاخص صنایع مطالعه شده در پژوهش ارائه شده است:

سرمایه‌گذاری، درجه مشابهی از ریسک کل سبد سرمایه‌گذاری بازار را داشته باشد، متوسط بازده چقدر خواهد بود. M_p^* به صورت زیر به دست می‌آید [۱۵]:

$$M_p^* = \bar{r}_f + \left(\frac{\bar{r}_p - \bar{r}_f}{\sigma_p} \right) \sigma_m \quad (16)$$

معیار دیگر، معیار اطلاعات^۱ است. این معیار از تقسیم بازده غیرعادی بر ریسک غیرسیستماتیک به دست می‌آید. بازده غیرعادی، بازده مازاد سبد سرمایه‌گذاری نسبت به سبد سرمایه‌گذاری مبنا (در این پژوهش شاخص کل بازار) است. از طرفی، ریسک غیرسیستماتیک نیز برابر با انحراف معیار تفاوت بین بازده سبد سرمایه‌گذاری مدنظر و بازده سبد سرمایه‌گذاری مبناست. رابطه این معیار به صورت زیر است [۱۰]:

$$IR_p = \frac{\bar{r}_p - \bar{r}_{bp}}{\sigma(r_p - r_{bp})} \quad (17)$$

سورتینو و پرایس^۲ (۱۹۹۴) معیار جدیدی را برای ارزیابی عملکرد سبد سرمایه‌گذاری ارائه کردند. در معیار سورتینو^۳ چنین استدلال می‌شود که یک سرمایه‌گذار معمولاً به اثر نامطلوب ریسک (نوسان) بر دارایی توجه می‌کند؛ بنابراین، از ریسک نامطلوب به جای ریسک کل در الگوی خود استفاده می‌کند. همچنین، در این معیار به جای استفاده از نرخ بدون ریسک از حداقل نرخ بازده پذیرفتنی برای سرمایه‌گذاری استفاده می‌شود. رابطه مربوط به معیار سورتینو به صورت زیر است:

$$S_p = \frac{\bar{r}_p - MAR}{DR} \quad (18)$$

که در این رابطه، \bar{r}_p بازده متوسط سبد سرمایه‌گذاری در طول دوره بررسی شده، MAR حداقل نرخ بازده پذیرفتنی^۴ (در این پژوهش بازده

5. Downside Risk

6. Elimination et Choice Translating to Reality

7. Hwang & Yoon

1. Informational Ratio

2. Sortino & Price

3. Sortino Ratio

4. Minimum Acceptable Return

جدول (۳) شاخص صنایع مطالعه‌شده در پژوهش

شاخص صنایع	
محصولات شیمیایی	۱
فلزات اساسی	۲
بانک‌ها و مؤسسات اعتباری	۳
مخابرات	۴
فرآورده‌های نفتی، کک و سوخت هسته‌ای	۵
شرکت‌های چندرشته‌ای صنعتی	۶
خودرو و ساخت قطعات	۷
استخراج کانه‌های فلزی	۸
مواد و محصولات دارویی	۹
رایانه و فعالیت‌های وابسته به آن	۱۰

یافته‌ها

در این بخش ابتدا نتایج مربوط به بازده و ریسک سبدهای حاصل از هر الگو ارائه شده است؛ سپس نتایج به‌دست آمده از محاسبه معیارهای ارزیابی عملکرد به تفکیک بررسی شده است. در انتها نیز نتایج مربوط به روش Topsis ارائه شده است. در جدول (۴) نتایج مربوط به بازده سبدهای سرمایه‌گذاری به‌دست آمده از الگوهای پژوهش ارائه شده است:

جدول (۴) بازده سبدهای سرمایه‌گذاری به‌دست آمده از الگوهای پژوهش

الگوهای پژوهش	۱۳۹۱	۱۳۹۲	۱۳۹۳	۱۳۹۴	۱۳۹۵	میانگین
الگوی $1/N$	٪۲۸	٪۷۴	٪-۱۴	٪۳۲	٪-۲	٪۲۳/۶
الگوی حداقل واریانس	٪۲۳	٪۱۱۷	٪-۲۷	٪۵۳	٪۲۸	٪۳۸/۸
الگوی ترکیبی حداقل واریانس و $1/N$	٪۱	٪۷	٪۳	٪۶	٪۰	٪۳/۴

همان‌طور که مشاهده می‌شود، الگوی ترکیبی حداقل واریانس و $1/N$ بازده مناسبی را ایجاد نکرده است. در عین حال، الگوی حداقل واریانس بازده نسبتاً خوبی ایجاد کرده است. درباره الگوی $1/N$ نیز مشاهده

می‌شود که این الگو بازده مناسبی ایجاد نکرده است. در جدول (۵) نتایج مربوط به ریسک (انحراف معیار) سبدهای سرمایه‌گذاری به‌دست آمده از الگوهای پژوهش ارائه شده است.

جدول (۵) ریسک سبدهای سرمایه‌گذاری به‌دست آمده از الگوهای پژوهش

الگوهای پژوهش	۱۳۹۱	۱۳۹۲	۱۳۹۳	۱۳۹۴	۱۳۹۵	میانگین
الگوی $1/N$	٪۶	٪۶	٪۴	٪۷	٪۳	٪۵/۲
الگوی حداقل واریانس	٪۶	٪۱۲	٪۵	٪۷	٪۴	٪۶/۸
الگوی ترکیبی حداقل واریانس و $1/N$	٪۵	٪۸	٪۴	٪۷	٪۴	٪۵/۶

مطابق نتایج ارائه‌شده در جدول (۵)، الگوی ترکیبی حداقل واریانس و $1/N$ از نظر ریسک سبد سرمایه‌گذاری نسبت به الگوی حداقل واریانس وضعیت پذیرفتنی و بهتری دارد؛ اما همان‌طور که مشاهده می‌شود، الگوی حداقل واریانس همواره کمترین واریانس را طی دوره نداشته است که دلیل این امر

اتکای بیش از حد این الگو به دارایی‌های خاص سبد سرمایه‌گذاری است که در صورت نزول بیش از حد این دارایی‌ها این الگو چندان مناسب عمل نخواهد کرد. نتایج ارائه‌شده بیان‌کننده برتری الگوی $1/N$ از نظر ریسک نسبت به دو الگوی دیگر است. در ادامه نتایج مربوط به محاسبه معیارهای ارزیابی عملکرد سبد

سرمايه گذارى ارائه شده است:

جدول (۶) معيارهاى ارزىايى عملكرد الكوهاى پژوهش

معيارهاى ارزىايى عملكرد					
الكوهاى پژوهش	شارپ	ترينر	موديليانى - موديليانى	اطلاعات	سورتينو
الكوى ۱/N	-۰/۰۵۵	۰/۰۰۴	۰/۱۸۶	۰/۱۰۷	۰/۷۳۲
الكوى حداقل واريانس	-۰/۲۱۸	-۰/۰۰۷	۰/۱۷۷	-۰/۰۱۴	۰/۹۳۶
الكوى تركيبى حداقل واريانس و ۱/N	-۰/۰۹۹	۰/۰۰۱	۰/۱۸۱	۰/۱۲۳	۱/۹۶۴

نيز الكوى تركيبى حداقل واريانس و ۱/N نسبت بازده مازاد از حداقل بازده پذيرفتنى به ريسك نامطلوب بهترى را ارائه داده است. به طور كلى، با توجه به نتايج پژوهش بر مبنای معيارهاى شارپ، ترينر و موديليانى - موديليانى، الكوى ۱/N نسبت به الكوهاى ديگر عملكرد بهترى دارد و براساس معيارهاى اطلاعات و سورتينو، عملكرد الكوى تركيبى حداقل واريانس و ۱/N بهتر است.

در جدول (۷) نتايج نهايى مربوط به روش TOPSIS ارائه شده است. Score نشان دهنده امتياز اختصاص يافته به هر الكو براساس روش TOPSIS است. در ستون آخر رتبه مربوط به هر الكو ارائه شده است كه بيانگر برترى الكوى تركيبى حداقل واريانس و ۱/N است. همان طور كه مشاهده مى شود الكوى ۱/N و الكوى حداقل واريانس در جاىگاههاى بعدى قرار مى گيرد.

جدول (۷) رتبه بندي الكوها با استفاده از روش

TOPSIS

Rank	Score	الكوهاى پژوهش
۲	۰/۴۷۲۳۳۷	الكوى ۱/N
۳	۰/۰۲۹۹۹۹	الكوى حداقل واريانس
۱	۰/۴۹۷۶۶۴	الكوى تركيبى حداقل واريانس و ۱/N

همان طور كه در جدول (۶) مشاهده مى شود، بر مبنای معيار شارپ عملكرد الكوى ۱/N نسبت به الكوهاى ديگر بهتر است؛ در واقع، الكوى ۱/N از نظر بازده به دست آمده به ازای ريسك كل متحمل شده پذيرفتنى تر بوده است. در عين حال عملكرد الكوى تركيبى حداقل واريانس و ۱/N با وجود برترى نسبت به الكوى حداقل واريانس چندان پذيرفتنى نيست. براساس معيار ترينر، الكوى ۱/N بهتر عمل کرده است و نسبت بازده اضافى به ريسك سيستماتيک سبد سرمايه گذارى به طور متوسط در اين الكو بيشتر است. بر مبنای اين معيار نيز عملكرد الكوى تركيبى حداقل واريانس و ۱/N نسبت به الكوى حداقل واريانس بهتر است.

نتايج مربوط به معيار موديليانى - موديليانى برای الكوهاى پژوهش بسيار نزديك به يكديگر است؛ با اين حال، الكوى ۱/N براساس اين معيار برترى نسبي دارد؛ به بيان ديگر، با توجه به نتايج به دست آمده از اين معيار مى توان گفت اگر سبد سرمايه گذارى درجه مشابهى از ريسك كل سبد سرمايه گذارى بازار را داشته باشد، متوسط بازده آن براساس الكوى ۱/N بيشتر خواهد بود. نتايج به دست آمده برای معيار اطلاعات بيان كننده برترى الكوى تركيبى حداقل واريانس و ۱/N است؛ بنابراین، بازده غير عادى اين الكو نسبت به ريسك غير سيستماتيک پذيرفتنى تر است. درباره معيار سورتينو

نتایج و پیشنهادها

در این پژوهش با هدف بررسی کارآیی بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری، از الگوی ترکیبی حداقل واریانس و $1/N$ استفاده شد و عملکرد آن با الگوهای حداقل واریانس و $1/N$ بر مبنای معیارهای ارزیابی عملکرد متفاوت مقایسه شد. در انتها نیز رتبه‌بندی این الگوها بررسی شد. از لحاظ بازده عملکرد، الگوی ترکیبی حداقل واریانس و $1/N$ چندان پذیرفتنی نیست. در حالی که عملکرد الگوی حداقل واریانس مناسب است. الگوی $1/N$ از نظر ریسک به‌طور نسبی عملکرد بهتری در مقایسه با الگوهای دیگر داشته است. به‌طور کلی بین الگوهای بررسی‌شده، الگوی $1/N$ از نظر معیارهای شارپ، ترینر و مودیلیانی - مودیلیانی عملکرد بهتری داشته است. از نظر دو معیار اطلاعات و سورتینو نیز عملکرد الگوی ترکیبی حداقل واریانس و $1/N$ بهتر بوده است. در پایان رتبه‌بندی الگوهای پژوهش با روش TOPSIS نشان‌دهنده برتری الگوی ترکیبی حداقل واریانس و $1/N$ است و بعد از آن به ترتیب الگوهای $1/N$ و حداقل واریانس جای دارند. نتایج به‌دست آمده از پژوهش میگوئل و همکاران (۲۰۰۹) بیان‌کننده برتری الگوی $1/N$ بر الگوهای دیگر بر مبنای معیارهای نسبت شارپ، بازده معادل اطمینان و حجم معاملات است. در این پژوهش عملکرد الگوی ترکیبی بهتر از الگوی حداقل واریانس بوده است. همچنین یافته‌های لو و همکاران (۲۰۱۶) نشان‌دهنده برتری عملکرد الگوی $1/N$ بر الگوهای دیگر بر مبنای نسبت شارپ و بازده معادل اطمینان است. علاوه بر این، در این پژوهش عملکرد الگوی ترکیبی نسبت به الگوی حداقل واریانس برتری دارد.

همان‌طور که پیشتر اشاره شد الگوی حداقل واریانس وزن بیشتری به برخی دارایی‌های کم‌ریسک

می‌دهد که با توجه به ماهیت رکودی بازار در چند سال گذشته نزول شدیدی در برخی از این سهم‌های کم‌ریسک مشاهده شده است که ضرر زیادی به سهامداران وارد کرده است. به آن دسته از فعالان بازار سرمایه که به‌دنبال بهره‌بردن از الگوی حداقل واریانس اند، پیشنهاد می‌شود با توجه به نتایج حاصل از این پژوهش و برتری الگوی ترکیبی حداقل واریانس و $1/N$ بر الگوی حداقل واریانس و $1/N$ ، از این راهبرد ترکیبی برای انتخاب سبد سرمایه‌گذاری استفاده کنند؛ در واقع، اگر سرمایه‌گذاران و فعالان بازار سرمایه پیچیدگی‌های حاکم بر الگوی ترکیبی را بپذیرند، می‌توانند از این الگو برای انتخاب سبد سرمایه‌گذاری استفاده کنند. در غیر این صورت استفاده از الگوی $1/N$ زیان زیادی به‌لحاظ عملکردی به آنها وارد نمی‌کند.

در ادامه پیشنهادهایی برای بهتر انجام‌شدن پژوهش‌های بعدی ارائه می‌شود: پیشنهاد می‌شود برای مقایسه بهتر بین روش‌های انتخاب سبد سرمایه‌گذاری، الگوهای این پژوهش در کنار دیگر روش‌های بهینه‌سازی مانند شبکه‌های عصبی، شبکه‌های عصبی ترکیبی و ... بررسی شود. همچنین علاوه بر محاسبه ماتریس کوواریانس به روش کلاسیک آماری از روش‌هایی چون میانگین موزون متحرک‌نمایی^۱، شریکیج^۲ و ... نیز بدین منظور استفاده شود و نتایج با این پژوهش مقایسه شود. در این پژوهش، از برخی معیارهای ارزیابی عملکرد استفاده شد، در پژوهش‌های بعدی می‌توان از معیارهایی نظیر شارپ تعمیم‌یافته^۳، شارپ مضاعف^۴، پتانسیل مطلوب^۵ و ... بهره برد.

1. Exponentially-weighted Moving Average
 2. Shrinkage Method
 3. Generalised Sharpe Ratio
 4. Double Sharpe Ratio
 5. Upside Potential Ratio

- [8] Haff, L. (1979). An identity for the Wishart distribution with applications. *Journal of Multivariate Analysis*, 9(4): 531-544.
- [9] Kirby, C., Ostdiek, B. (2012). It's all in the timing: Simple active portfolio strategies that outperform naive diversification. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 47(2): 437-467.
- [10] Le Sourd, V. (2007). Performance measurement for traditional investment. *Financial Analysts Journal*, 58(4): 36-52.
- [11] Low, R. K. Y., Faff, R., & Aas, K. (2016). Enhancing mean-variance portfolio selection by modeling distributional asymmetries. *Journal of Economics and Business*, 85: 49-72.
- [12] Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *Journal of Finance*, 7(1): 77-91.
- [13] Michaud, R. O. (1989). The Markowitz optimization enigma: Is 'optimized' optimal? *Financial Analysts Journal*, 45(1): 31-42.
- [14] Raei, R., Pooyanfar, A. (2010). Advanced Investment Management. Tehran: Samt. (in persian).
- [15] Sortino, F. A., Price, L. N. (1994). Performance measurement in a downside risk framework. *The Journal of Investing*, 3(3): 59-64.

References

- [1] Asgharpoor, M. J. (2006). Multiple Criteria Decision Analysis. Tehran: University of Tehran (in persian).
- [2] Behr, P., Guettler, A., & Truebenbach, F. (2012). Using industry momentum to improve portfolio performance. *Journal of Banking & Finance*, 36(5): 1414-1423.
- [3] Brandt, M. W. P., Santa, C., & Volkanov, R. (2009). Parametric portfolio policies: Exploiting characteristics in the cross-section of equity returns. *Review of Financial Studies*, 22: 3411-3447.
- [4] Chaves, D. B., Hsu, J. C., Li, F., & Shakernia, O. (2012). Efficient algorithms for computing risk parity portfolio weights. *The Journal of Investing*, 21(3): 150-163.
- [5] DeMiguel V., Garlappi, L., & Uppal, R. (2006). 1/N. Available at: https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=911512.
- [6] DeMiguel, V., Garlappi, L., & Uppal, R. (2009). Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/N portfolio strategy? *The Review of Financial Studies*, 22(5): 1915-1953.
- [7] Fletcher, J. (2017). Exploring the benefits of using stock characteristics in optimal portfolio strategies. *The European Journal of Finance*, 23(3): 192-210.