http://math-sci.iranjournals.ir

ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۶۴۹۳-۲۳۴۵، شاپا(الکترونیکی): ۶۵۰۷-۲۳۴۵
جلد ۳، شماره ۱ (۱۳۹۷)، صص. ۶۷-۵۵

http://www.ui.ac.ir

ضرب کرونکر و کاربردها

حمیده افشاری ارجمند و عفت گلپر رابوکی*

چکیده. ضرب کرونکر دو ماتریس که با $A \otimes B$ نشان داده می‌شود، دارای خواص جالبی است که باعث شده در زمینه‌های مختلف اعم از پردازش سیگنال، پردازش تصویر و همچنین در محاسبات کوانتومی به‌طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار گیرد. این ضرب خواصی هم‌چون وارون‌پذیری، تعامد، مثلثی، تقارن و بسیاری از خواص دیگر را حفظ می‌کند. اگر A یک ماتریس صفر و یک و یا ماتریس مجاورت یک گراف باشد، توان‌های کرونکری آن منجر به تولید فرکتال‌ها و یا گراف‌های کرونکری می‌شود. یک زمینه پرکاربرد دیگر آن، در حل دستگاه معادلات ماتریسی مانند معادلات سیلوستر $AX+XB=C$ و لیاپانوف $AX+XA=H$ است. این مقاله سعی دارد خواننده را با بعضی ویژگی‌های ضرب کرونکر آشنا نماید. به علاوه برخی کاربردهای آن را، در زمینه تبدیلات سریع، گراف، فرکتال، شبکه‌های خودکار تصادفی، دستگاه معادلات ماتریسی، تجزیه ماتریس به طور مختصر توصیف می‌کند.

۱. مقدمه

روش‌های مختلفی برای ضرب دو ماتریس از جمله ضرب معمولی، ضرب هادامار و ضرب کرونکر وجود دارد. ضرب کرونکر که با نماد $\otimes$ تعریف می‌شود، اولین بار توسط یوهان گئورگ زفوس[1] در سال ۱۸۵۸ استفاده شد که به عنوان ضرب مستقیم یا ضرب تانسوری نیز شناخته می‌شود [۱۱].
فرض کنید $\mathbb{C}$ میدان اعداد مختلط و $\mathbb{C}^{m\times n}$ مجموعه ماتریس‌های شامل m سطر و n ستون با درایه‌های مختلط باشد.

۱.۱. ضرب کرونکر یا تانسوری. ضرب کرونکر ماتریس‌های $A \in \mathbb{C}^{m_A\times n_A}$ و $B \in \mathbb{C}^{m_B\times n_B}$ به‌صورت $A\otimes B$ نمایش داده می‌شود و برابر است با:

$$A\otimes B=\begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n_A}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m_A1}B & \cdots & a_{m_An_A}B \end{pmatrix} \tag{۱}$$

عبارات و کلمات کلیدی. ضرب کرونکر، گراف، شبکه‌های خودکارتصادفی، دستگاه معادلات ماتریسی، تجزیه ماتریسی.
دبیر تخصصی رابط: محمدصال مصلحیان
*نویسنده مسئول
تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۳/۱۵ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۱۰/۲۶
http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.104599.1227

[1] Johann Georg Zehfuss

هر $a_{ij}B$ یک بلوک در سایز $m_B \times n_B$ است بنابراین سایز $A \otimes B$ برابر $m_A m_B \times n_A n_B$ است.
ضرب کرونکر در حالت کلی خاصیت جابجایی ندارد. به عنوان مثال ماتریس‌های $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ را در نظر بگیرید که

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \tag{2}$$

در این صورت

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B \otimes A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

و این یعنی ضرب کرونکر خاصیت جابه‌جایی ندارد.

۲.۱. قضیه. فرض کنید $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$.
در این صورت $A \otimes B = B \otimes A$ اگر و تنها اگر اسکالر $c \in \mathbb{C}$ وجود داشته باشد که $A = cB$ یا $B = cA$.

اثبات: ابتدا فرض کنید به ازای اسکالر $c \in \mathbb{C}$ داشته باشیم $A = cB$ یا $B = cA$. اگر $c = 0$ آن‌گاه $A = 0$ یا $B = 0$، در نتیجه

$$A \otimes B = 0 = B \otimes A.$$

اگر $c \neq 0$، کافیست حالت $A = cB$ را بررسی کنیم زیرا $B = c^{-1}A$. اگر $A = cB$، آن‌گاه

$$A \otimes B = (cB) \otimes B = B \otimes (cB) = B \otimes A.$$

اکنون فرض کنید $A \otimes B = B \otimes A$. طبق تعریف ضرب کرونکر که در مقدمه به آن اشاره شد:

$$a_{ij}B = b_{ij}A \qquad i = 1, \ldots, m \quad j = 1, \ldots, n.$$

اگر $A = 0$ آن‌گاه به ازای $c = 0$ داریم $A = cB$. اگر $A \neq 0$ برای هر درایه ناصفر a_{ij} داریم $B = \frac{b_{ij}}{a_{ij}}A$، بنابراین با انتخاب $c = \frac{b_{ij}}{a_{ij}}$ داریم $B = cA$. توجه داریم که در این صورت برای تمام مقادیر ناصفر a_{ij}، $\frac{b_{ij}}{a_{ij}}$ یک مقدار ثابت خواهد بود.

□

۳.۱. جمع کرونکر. جمع کرونکر ماتریس‌های مربع $A \in \mathbb{C}^{n_A \times n_A}$ و $B \in \mathbb{C}^{n_B \times n_B}$ به‌صورت $A \oplus B$ نمایش داده می‌شود و برابر است با:

$$A \oplus B = A \otimes I_{n_B} + I_{n_A} \otimes B. \tag{4}$$

به‌عنوان مثال ماتریس‌های $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ را در نظر بگیرید که

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \tag{5}$$

در این صورت

$$A \otimes I_{n_B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad I_{n_A} \otimes B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

بنابراین

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

ضرب کرونکر روی بردارها خواص جالبی دارد که در ادامه برخی از آن‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم [۷].
فرض کنید $X \in \mathbb{C}^m$ و $Y \in \mathbb{C}^n$ باشند، در این صورت داریم:

$$X \otimes Y = \begin{pmatrix} x_1 Y \\ \vdots \\ x_m Y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{mn}, \qquad X \otimes Y^t = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & \cdots & x_1 y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m y_1 & \cdots & x_m y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times n}. \tag{8}$$

با توجه به این‌که ضرب کرونکر دو بردار، برداری در فضای با ابعاد بالاتر و یا یک ماتریس می‌شود، بنابراین با استفاده از این خاصیت می‌توان پایه فضای با ابعاد پایین‌تر را به پایه فضای با ابعاد بالاتر تعمیم داد.

پایه‌ی استانده فضای $\mathbb{R}^2$، $S = \{e_1, e_2\}$ که $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ را در نظر بگیرید. با استفاده از ضرب کرونکر روی این بردارها داریم:

$$e_1 \otimes e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad e_1 \otimes e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad e_2 \otimes e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad e_2 \otimes e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

در نتیجه $S = \{e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2\}$ پایه استانده و فضای بردارهای $\mathbb{R}^4$ را ایجاد می‌کند، همچنین:

$$e_1^t \otimes e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad e_1^t \otimes e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad e_2^t \otimes e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad e_2^t \otimes e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

که نشان می‌دهد $S = \{e_1^t \otimes e_1, e_1^t \otimes e_2, e_2^t \otimes e_1, e_2^t \otimes e_2\}$ پایه استانده فضای ماتریس‌های $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ است. به‌علاوه

$$(e_1^t \otimes e_1) + (e_2^t \otimes e_2) = I_{2 \times 2} \tag{11}$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.104599.1227

حال مجموعه‌ی $S=\{u,v\}$ که

$$u=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\quad,\quad v=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}$$

را در نظر بگیرید . دراین صورت $||u||_2=||v||_2=1$ و $\langle u,v\rangle=u^*v=0$ یعنی یک پایه متعامد یکه برای فضای هیلبرت $\mathbb{C}^2$ تشکیل می‌دهند؛ اکنون با استفاده از مجموعه‌ی S و تعریف ضرب کرونکر برای آن‌ها داریم:

$$u\otimes u=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ i\\ i\\ -1\end{pmatrix}\quad,\quad u\otimes v=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ -i\\ i\\ 1\end{pmatrix}\quad,\quad v\otimes u=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ i\\ -i\\ 1\end{pmatrix}\quad,\quad v\otimes v=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ -i\\ -i\\ -1\end{pmatrix}. \tag{۱۲}$$

در نتیجه $S=\{u\otimes u,u\otimes v,v\otimes u,v\otimes v\}$ یک پایه متعامد یکه برای فضای هیلبرت $\mathbb{C}^4$ تشکیل می‌دهد. همچنین

$$u^*\otimes u=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{pmatrix}\quad ,u^*\otimes v=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -i\\ -i & 1\end{pmatrix}, \tag{۱۳}$$

$$v^*\otimes u=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & i\\ i & -1\end{pmatrix}\quad ,v^*\otimes v=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & i\\ -i & -1\end{pmatrix}. \tag{۱۴}$$

که $S=\{u^*\otimes u,u^*\otimes v,v^*\otimes u,v^*\otimes v\}$ یک پایه متعامد یکه برای $\mathbb{C}^{2\times 2}$ ایجاد می‌کند.

قضیه بعد ارتباط ضرب معمولی و ضرب کرونکر ماتریس‌ها را بیان می‌کند.

۴.۱. قضیه. فرض کنید $A\in\mathbb{C}^{m_A\times n_A}$ ،$B\in\mathbb{C}^{m_B\times n_B}$ ،$C\in\mathbb{C}^{m_C\times n_C}$ ،$D\in\mathbb{C}^{m_D\times n_D}$ به‌طوری‌که $n_A\times n_B=m_C\times m_D$، آن‌گاه

$$(A\otimes B)(C\otimes D)=(AC)\otimes(BD). \tag{۱۵}$$

اثبات: فرض کنید

$$A=(a_{ik})\quad i=1,\ldots,m_A,$$

$$C=(c_{kj})\quad j=1,\ldots,n_C,$$

برای $k=1,\ldots,n_A=m_C$ که a_{ik} عنصر ikاُم ماتریس A و c_{ik} عنصر kjاُم ماتریس C باشد. بنابر تعریف ضرب کرونکر

$$(A\otimes B)_{ik}=a_{ik}B,$$

$$(C\otimes D)_{kj}=c_{kj}D;$$

که $a_{ik}B$ بلوک ikاُم ماتریس $(A\otimes B)$ و $c_{kj}D$ بلوک kjاُم ماتریس $(C\otimes D)$ هستند. بنابراین ijاُمین بلوک از ماتریس $(A\otimes B)(C\otimes D)$ عبارت است از

$$\sum_{k=1}^{n_A}(a_{ik}B)(c_{kj}D)=\sum_{k=1}^{n_A}(a_{ik}c_{kj})(BD)=(\sum_{k=1}^{n_A}a_{ik}c_{kj})(BD)=(AC)_{ij}(BD);$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.104599.1227

به‌طور مشابه ijامین بلوک از $(AC)\otimes(BD)$ عبارت است از :

$$(AC)_{ij}(BD),$$

پس

$$(A\otimes B)(C\otimes D)=(AC)\otimes(BD).$$

□

۲. خواص اساسی

در این قسمت به بیان برخی از خواص ضرب کرونکر روی ماتریس ها می‌پردازیم[۱]،[۷]،[۹].

- ضرب اسکالر $(\alpha A)\otimes B=A\otimes(\alpha B)=\alpha(A\otimes B)$

- شرکت‌پذیری $A\otimes(B\otimes C)=(A\otimes B)\otimes C$

- توزیع پذیری ضرب روی جمع $A\otimes(B+C)=A\otimes B+A\otimes C$

- ماتریس همانی $I_m\otimes I_n=I_n\otimes I_m=I_{mn}$

- pـ نرم $\|A\otimes B\|_p=\|A\|_p\|B\|_p$

  یادآوری می‌شود که برای بردار $x\in\mathbb{C}^n$، pـ نرم به‌صورت

  $$\|x\|_p:=(\sum_{i=۱}^{n}|x_i|^p)^{\frac{۱}{p}}$$

  و برای ماتریس $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$، pـ نرم به‌صورت

  $$\|A\|_p:=\max_{x\neq ۰}\frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$$

  تعریف می‌شود.

- نرم فروبنیوس $\|A\otimes B\|_F=\|A\|_F\|B\|_F$

  یادآوری می‌شود برای ماتریس $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{m\times n}$ نرم فروبنیوس به‌صورت

  $$\|A\|_F:=(\sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{n}|a_{ij}|^۲)^{\frac{۱}{۲}}$$

  تعریف می‌شود.

- رتبه $\operatorname{rank}(A\otimes B)=\operatorname{rank}(A)\operatorname{rank}(B)$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.104599.1227

• سازگاری با ترانهاده ماتریس $(A \otimes B)^t = A^t \otimes B^t$

• ماتریس $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ را متعامد یکه گویند هرگاه $A^{-۱} = A^t$. اگر A و B ماتریس‌های متعامد یکه باشند که $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ آنگاه

$(A \otimes B)^{-۱} = (A \otimes B)^t.$

• سازگاری با وارون ماتریس $(A \otimes B)^{-۱} = A^{-۱} \otimes B^{-۱}$

• سازگاری با ترانهاده مِزدوج ماتریس $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$
که $A^* = \bar{A}^t$ ترانهاده مِزدوج ماتریس A است.

• ماتریس $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ را یکانی گویند هرگاه $A^{-۱} = A^*$. اگر $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ و $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ماتریس‌های یکانی باشند آنگاه

$(A \otimes B)^{-۱} = (A \otimes B)^*.$

• سازگاری با شبه وارون ماتریس $(A \otimes B)^\dagger = A^\dagger \otimes B^\dagger$

یادآوری می‌کنیم که شبه‌وارون ماتریس $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ که با $A^\dagger$ نشان داده می شود، یک ماتریس $n \times m$ است که در چهار خاصیت زیر صدق می‌کند:

$$AA^\dagger A = A,$$

$$A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger,$$

$$(AA^\dagger)^* = AA^\dagger,$$

$$(A^\dagger A)^* = A^\dagger A.$$

• عدد حالت[۲]: برای نرم ماتریسی $\|.\|$، عدد حالت ماتریس وارون پذیر A که با $cond(A)$ نشان داده می‌شود به‌صورت $cond(A) = \|A\|\,\|A^{-۱}\|$ تعریف می شود. بنابراین

$$\begin{aligned} cond(A \otimes B) &= \|A \otimes B\|\|A \otimes B\|^{-۱} \\ &= \|A\|\|B\|\|A\|^{-۱}\|B\|^{-۱} \\ &= cond(A)cond(B). \end{aligned} \tag{۱۶}$$

---

[2]Condition Number

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.104599.1227

- اثر[3]: فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ و $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$، آنگاه

$$\operatorname{tr}(A\otimes B) = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{tr}(a_{ii}B) = \sum_{i=1}^{m} a_{ii}\operatorname{tr}(B) \tag{۱۷}$$

$$= \operatorname{tr}(B)\sum_{i=1}^{m} a_{ii} = \operatorname{tr}(B)\operatorname{tr}(A). \tag{۱۸}$$

همچنین $\operatorname{tr}(A\otimes B) = \operatorname{tr}(B\otimes A)$.

- مقادیر ویژه: فرض کنید λ یک مقدار ویژه ماتریس A و x بردار ویژه نظیر آن باشد، $Ax = \lambda x$. همچنین فرض کنید μ یک مقدار ویژه ماتریس B و y بردار ویژه نظیر آن باشد، $By = \mu y$. در این صورت بنابر قضیه ۴.۱ داریم:

$$\begin{aligned}(A\otimes B)(x\otimes y) &= (Ax)\otimes(By)\\ &= (\lambda x)\otimes(\mu y)\\ &= \lambda\mu(x\otimes y)\end{aligned} \tag{۱۹}$$

یعنی $\lambda\mu$ یک مقدار ویژه ماتریس $A\otimes B$ و $x\otimes y$ بردار ویژه نظیر آن است.

- توان: فرض کنید $k > 1$ و A و B ماتریس‌های مربعی باشند. در این صورت

$A^{\otimes 1} = A, \quad A^{\otimes k} = A\otimes A^{\otimes(k-1)}\ , \quad (A\otimes B)^k = A^k\otimes B^k\ .$

- دترمینان: فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ و $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ در این صورت

$\det(A\otimes B) = \det(A)^n\det(B)^m = \det(B\otimes A)$

اگر ماتریس‌های A و B وارون‌پذیر، متقارن، احتمال، متعامد، مثبت معین، نواری یا مثلثی باشند، آنگاه ماتریس $A\otimes B$ نیز چنین است[۷].

یکی از مهم‌ترین خواص ضرب کرونکر ارتباط آن با ضرب ماتریسی است.

۳. تجزیه ماتریس با استفاده از ضرب کرونکر

معادله (۱۵) ارتباط بین تجزیه $A\otimes B$ و تجزیه ماتریس‌های A و B را بیان می‌کند. فرض کنید ماتریس‌های A و B به ترتیب دارای تجزیه ماتریسی به فرم $A = E_AF_A$ و $B = E_BF_B$ باشند، تجزیه ماتریس $A\otimes B$ از تجزیه ماتریس‌های A و B به‌دست می‌آید[۷]. به‌عبارت دیگر داریم:

$$A\otimes B = (E_AF_A)\otimes(E_BF_B) = (E_A\otimes E_B)(F_A\otimes F_B) \tag{۲۰}$$

در ادامه برخی از این تجزیه‌ها را بیان می‌کنیم:

تجزیه مثلثی (LU) : اگر $A = L_AU_A$ و $B = L_BU_B$ که L_A و L_B ماتریس‌های پایین مثلثی و U_A و U_B ماتریس‌های بالا مثلثی می‌باشند به ترتیب تجزیه LU ماتریس‌های A و B باشند، آنگاه

$$A\otimes B = (L_A\otimes L_B)(U_A\otimes U_B)$$

[3] Trace

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.104599.1227

تجزیه LU ماتریس $A \otimes B$ است.

تجزیه مقدار منفرد (SVD) **:** فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ و $rank(A) = r$. در این صورت، ماتریس‌های یکانی $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ و $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ و ماتریس قطری $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$\Sigma = diag(\sigma_۱, \dots, \sigma_p),\ \sigma_۱ \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > ۰,\ \sigma_{r+۱} = \cdots = \sigma_p = ۰,\ p = min(m, n).$$

و

$$A = U\Sigma V^*.$$

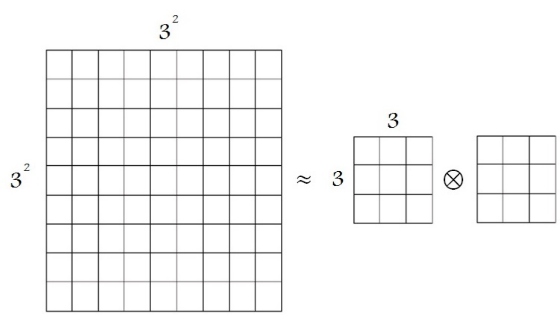
یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های تجزیه SVD محاسبه بهترین تقریب رتبه پایین است که در پردازش تصویر و صوت کاربرد دارد [۲]. اگر $A = U_A S_A V_A^*$ و $B = U_B S_B V_B^*$ به ترتیب تجزیه SVD ماتریس‌های A و B باشند، آن‌گاه

$$A \otimes B = (U_A \otimes U_B)(S_A \otimes S_B)(V_A \otimes V_B)^*$$

تجزیه SVD ماتریس $A \otimes B$ است.

۴. ضرب کرونکر و فشرده سازی

بسیاری از کاربردها منجر به تولید ماتریس‌هایی با ابعاد بالا می‌شوند. یکی از روش‌هایی که به‌منظور صرفه‌جویی در حافظه استفاده می‌شود، تجزیه ماتریس در ابعاد بالا به به ابعاد پایین‌تر است. به عنوان مثال در شکل ۱ سمت چپ یک ماتریس در ابعاد (۹×۹) را نشان می‌دهد که با استفاده از ضرب کرونکر تبدیل به دو ماتریس در ابعاد (۳×۳) می‌شود بنابراین فضای کمتری را برای ذخیره نیاز دارد.



شکل ۱: کاربرد ضرب کرونکر در فشرده سازی.

۱.۴. عملگر برداری کردن. فرض کنید $A = (a_۱ \cdots a_n) \in \mathbb{C}^{m\times n}$ که a_i ستون iام ماتریس A باشد. عملگر vec ماتریس A را به یک بردار mn تایی که از زیر هم چیدن ستون‌های آن به‌دست می‌آید، تبدیل می‌کند. به عبارت دیگر

$$\mathrm{vec}(A) = \begin{pmatrix} a_۱ \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}. \qquad (۲۱)$$

۲.۴. قضیه. فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{pr\times qs}$ آنگاه $A = B\otimes C$ اگر وتنها اگر $\operatorname{rank}[\operatorname{vec}(A_{11}), \ldots, \operatorname{vec}(A_{pq})] = 1$ باشد؛ که در آن ماتریس A برابر است با:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & \cdots & A_{pq} \end{pmatrix} \tag{۲۲}$$

و هر $A_{ij} \in \mathbb{C}^{r\times s}$ که $1 \leq i \leq p$ و $1 \leq j \leq q$ است.

در صورتی که ماتریس A را نتوان به حاصل‌ضرب کرونکر دو ماتریس تجزیه کرد، دو ماتریس B و C را طوری تعیین می‌کنیم که کم‌ترین فاصله را با ماتریس اولیه داشته باشند به عبارت دیگر $\| A-(B\otimes C) \|_F$ برای $B \in \mathbb{C}^{p\times q}$ و $C \in \mathbb{C}^{r\times s}$ کم‌ترین مقدار را داشته ب[۱۰].

۵. کاربردها

۱.۵. تبدیلات. تبدیل‌هایی مانند تبدیل فوریه، تبدیلات کسینوسی و موجک را می‌توان با استفاده از حاصل‌ضرب کرونکر، به یک فرم فشرده نمایش داد. به این ترتیب که ماتریس نظیر تبدیلات از مراتب بالاتر را می‌توان با استفاده از ضرب کرونکر و ماتریس تبدیل از مرتبه پایین‌تر محاسبه کرد. برای مثال تبدیلات موجک هار و هادامار را بررسی می‌کنیم. ماتریس نظیر موجک هار، با استفاده از حاصل‌ضرب کرونکر به‌صورت زیر قابل بیان است [۶]:

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, W_n = \begin{pmatrix} W_{n-1} \otimes (1 \quad 1) \\ I_2 \otimes I_{2^{n-2}} \otimes (1 \quad -1) \end{pmatrix}. \tag{۲۳}$$

که نشان می‌دهد ماتریس موجک از مرتبه n با استفاده از ضرب کرونکر و ماتریس موجک مرحله $n-1$ ساخته می‌شود. همچنین تبدیل هادامار را می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, H_{2^k} = \begin{pmatrix} H_{2^{k-1}} & H_{2^{k-1}} \\ H_{2^{k-1}} & -H_{2^{k-1}} \end{pmatrix} = H_2 \otimes H_{2^{k-1}}, \quad 2 \leq k \in \mathbb{N} \tag{۲۴}$$

که نشان می‌دهد تبدیل هادامار در هر مرحله با استفاده از ضرب کرونکر تبدیل هادامار مرحله قبل و H_2 ساخته می‌شود.

۲.۵. تولید فرکتال‌ها توسط الگوی اولیه. برخال یا فراکتال[۴]ساختاری هندسی است که با بزرگ کردن هر بخش از این ساختار به‌نسبت معین، همان ساختار نخستین به‌دست می‌آید، به این ویژگی خودهمانندی گویند.

بنابر خواص ذکر شده برای برخال با داشتن الگوی اولیه آن، با استفاده از ضرب کرونکر می‌توان به شکل کاملی از برخال رسید. فرض کنید ماتریس M الگوی اولیه برخال باشد، برنامه‌ی زیر در محیط نرم‌افزار متلب [۵] برخال نظیر را تولید کرده و آن را نمایش می‌دهد [۸].

[4]Fractal [5]Matlab

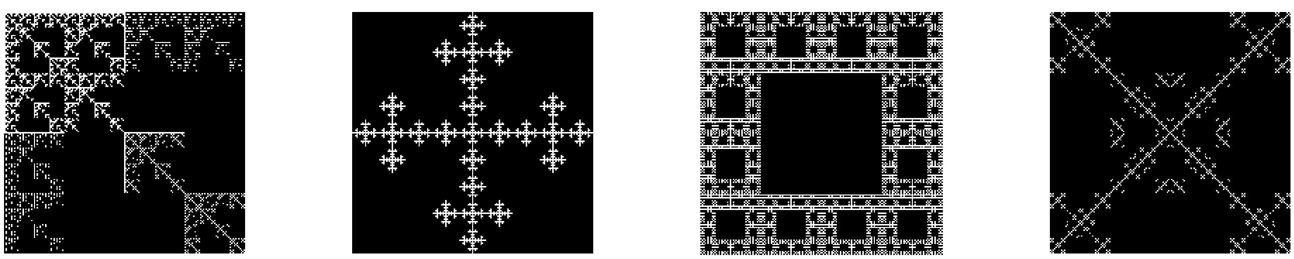
http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.104599.1227

```
N=kron(M,M)
 for  i=1:k
N=kron(M,N)
 end;
 imshow(N);
```

برای ماتریس‌های

$$M_{۱}=\begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix},\ M_{۲}=\begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{pmatrix},\ M_{۳}=\begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{pmatrix},\ M_{۴}=\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix};$$

فرکتال‌های نظیر عبارتند از:

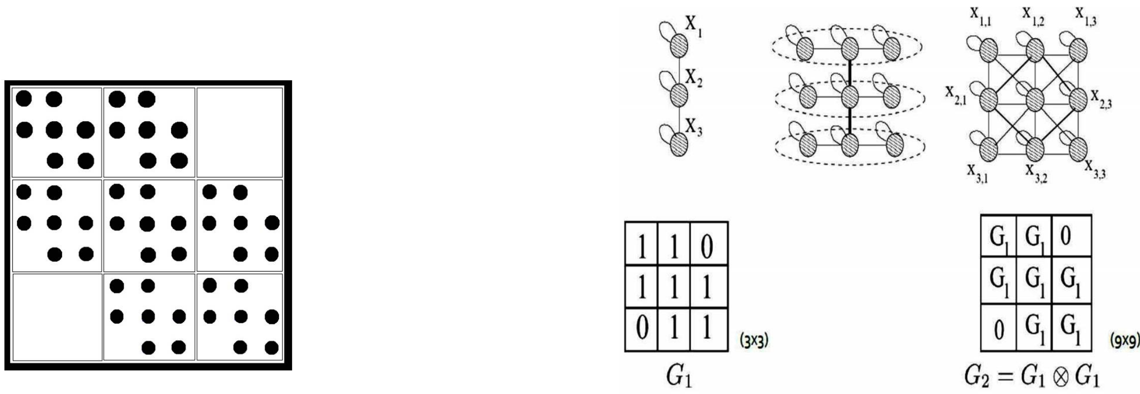


شکل ۲: برخال‌های نظیر $M_{۱},\cdots,M_{۴}$ به ترتیب ازچپ به راست.

۳.۵. گراف کرونکری. به هر گراف G یک ماتریس مربعی به نام ماتریس مجاورت که اندازه آن برابر تعداد رأس‌های گراف می‌باشد نسبت داده می‌شود، به‌طوری‌که درایه ijاُم آن برابر تعداد یال‌هایی است که رأس iاُم را به رأس jاُم متصل می‌کند.

گراف کرونکری از مرتبه n با ماتریس مجاورت $G_n=\underbrace{G_{۱}\otimes G_{۱}\otimes\cdots\otimes G_{۱}}_{\text{n بار}}$ گرافی است که از حاصل‌ضرب کرونکر ماتریس مجاورت اولیه $G_{۱}$ به‌دست می‌آید.

طبیعت خود متشابهی حاصل‌ضرب کرونکر واضح است. برای تولید G_i از $G_{i-۱}$ هر گره از $G_{i-۱}$ را با ماتریس مجاورت اولیه $G_{۱}$ جایگزین می‌کنیم. که در شکل ۳ به آن اشاره شده است [۴].



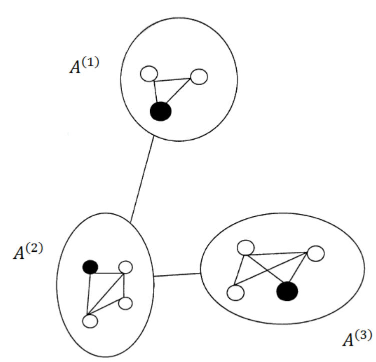
(ب) (الف)

شکل ۳: (الف) $G_۲$ ماتریس مجاورت ۹×۹ گراف مربوطه و (ب) برخال نظیر ماتریس مجاورت گراف [۴].

۴.۵. شبکه‌های خودکار تصادفی. شبکه‌های خودکار تصادفی، روشی برای ذخیره‌سازی اطّلاعات، به‌شکل فشرده با استفاده از ضرب کرونکر است و از چندین ماشین تصادفی تشکیل شده که مستقل از هم یا در مواردی، به‌هم وابسته هستند. شبکه در هر لحظه، ممکن است به دو صورتِ موضعی و هم‌زمان تغییر حالت بدهد؛ تغییرحالتِ موضعی فقط بر روی حالت یک ماشین اثرمی‌گذارد، درحالی‌که تغییر حالتِ هم‌زمان می‌تواند سبب تغییر حالت دو یا چند ماشین شود و هرکدام از این تغییر حالت‌ها، به دو صورتِ تابعی و ثابت انجام می‌شود. ماتریس حالات یک شبکه با N ماشین و E پیشامد هم‌زمان از رابطه (۲۵) به‌دست می‌آید:

$$Q = \sum_{j=۱}^{۲E+N} (\otimes_{i=۱}^{N} Q_j^{(i)}); \qquad (۲۵)$$

که هر $Q_j^{(i)}$ یک ماتریس تصادفی است که بیانگر حالت دستگاه می‌باشد [۳].



شکل ۴: تصویری از یک شبکه خودکار تصادفی [۳].

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.104599.1227

۵.۵. حل دستگاه معادلات ماتریسی. با استفاده از حاصل‌ضرب کرونکر می‌توان دستگاه معادلات ماتریسی، که در آن ماتریسی از مجهول‌ها (X) وجود دارد را به یک دستگاه معادلات خطی تبدیل کرد [۷].
از مهم‌ترین دستگاه‌های معادلات ماتریسی و دستگاه خطی نظیر آن‌ها، می‌توان به مواردی‌که در ادامه بیان می‌شود اشاره کرد:

$$\begin{gathered} AX = B \Longleftrightarrow (I \otimes A)\text{vec}(X) = \text{vec}(B), \\ AX + XB = C \Longleftrightarrow [(I \otimes A) + (B^t \otimes I)]\text{vec}(X) = \text{vec}(C), \\ AXB = C \Longleftrightarrow (B^t \otimes A)\text{vec}(X) = \text{vec}(C), \\ AX + YB = C \Longleftrightarrow (I \otimes A)\text{vec}(X) + (B^t \otimes I)\text{vec}(Y) = \text{vec}(C). \end{gathered} \tag{۲۶}$$

۶.۵. محاسبات کوانتومی. هدف اصلی از به‌کارگیری ضرب کرونکر در فیزیک، تولید فضای برداری با ابعاد بالا می‌باشد. محاسبه مقادیر ویژه و بردار ویژه دستگاه‌های بزرگ و محاسبات کوانتومی از جمله موارد استفاده از ضرب کرونکر است؛ به‌عنوان مثال یک دستگاه منطق کوانتومی که با استفاده از گیت‌های کوانتومی ساخته می‌شود، با ماتریس نشان داده می‌شود. گیت‌های موازی ممکن است منجر به تولید یک ماتریس بزرگ شوند که با استفاده از ضرب کرونکر به یک فرم فشرده قابل بیان است [۵].

۶. نتایج اصلی

در این مقاله تعریف و خواص اصلی ضرب کرونکر بیان شد. سپس به‌متداول‌ترین زمینه‌هایی که این ضرب مورد استفاده قرار می‌گیرد، پرداخته شد. خاصیت بلوکی ضرب کرونکر به ما اجازه می‌دهد که برخی ماتریس‌های بزرگ را به‌صورت فشرده با ضرب کرونکر دو ماتریس کوچکتر بیان کنیم که کاربردهای زیادی در نمایش فشرده اطلاعات دارد. برخی از تبدیلات هم‌چون موجک و هادامار که ماتریس تبدیل نظیر آن‌ها به‌صورت بازگشتی با استفاده از مراحل قبل تولید می‌شوند با ضرب کرونکر قابل بیان هستند. در این مقاله شرط لازم و کافی برای بیان یک ماتریس به‌صورت ضرب کرونکر دو ماتریس کوچک‌تر بیان شد. اگر نتوان یک ماتریس را به‌صورت ضرب کرونکر دو ماتریس دیگر بیان کرد با استفاده از مساله کمترین مربعات می‌توان یک تقریب مناسب برای آن محاسبه نمود. همچنین برخی کابردهای دیگر در نمایش گراف‌های بزرگ و تولید فرکتال بیان شد. یکی از مهم‌ترین زمینه‌های مورد استفاده ضرب کرونکر حل دستگاه‌های معادلات ماتریسی است. عملگر برداری کردن ارتباط بین دستگاه معادلات خطی و ماتریسی را بیان می‌کند و اجازه می‌دهد از تکنیک‌های حل دستگاه معادلات خطی برای حل معادلات ماتریسی استفاده شود.

مراجع

[1] G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, Johns Hopkins University Press, 1996.

[2] G. NAGY. James, K. NG. Michael and L. Perrone, Kronecker product approximations for image restoration with reflexive boundary conditions, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **2**5 (2004) 829–841.

[3] A. N. Langvillea and W. J. Stewart, The Kronecker product and stochastic automata networks, *J. Comput. Appl. Math.*, **1**67 (2004) 429–447.

[4] J. Leskovec, D. Chakrabarti, J. Kleinberg, Ch. Faloutsos and Z. Ghahramani, Kronecker graphs: an approach to modeling networks, *J. Mach. Learn. Res.*, **1**1 (2010) 985–1042.

[5] M. Nielsen and I. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, 2000.

[6] R. S. Stankovic and B. J. Falkowski, The Haar wavelet transform: its status and achievements, *Computers and Electrical Engineering*, **29** (2003) 25–44.

[7] W. H. Steeb, *Matrix calculus and Kronecker product with applications and C++ programs*, World scientific publishing, Singapore, 1997.

[8] W. H. Steeb, *Chaos, Fractals, Cellular Automata, Neural Networks, Genetic Algorithms*, World scientific publishing, Singapore, 2008.

[9] C. F. Van Loan, The Ubiquitous, Kronecker Product, *Journal of Computation and Applied Mathematics*, **1**23(2000) 85–100.

[10] C. F. Van Loan and N. Pitsianis, Approximation with Kronecker Product, *Linear Algebra for Large Scale and Real-Time Applications*, **1**23 (1993) 293–314.

[11] J. G. Zehfuss, Ueber eine gewisse Determinante, *Zeitschrift für Mathematik und Physik,* **3** (1858) 298–301.

حمیده افشاری ارجمند

قم– دانشگاه قم– دانشکده علوم پایه گروه ریاضی

afshariarjmand۷@gmail.com

حمیده افشاری ارجمند فارغ‌التحصیل دوره کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی از دانشگاه قم در سال ۱۳۹۶ است، ایشان دوره کارشناسی ریاضی کاربردی را نیز در همان دانشگاه در سال ۱۳۹۳ گذرانده‌اند.

عفت گلپر رابوکی

قم– دانشگاه قم– دانشکده علوم پایه گروه ریاضی

g.raboky@qom.ac.ir

عفت گلپر رابوکی عضو هیأت علمی دانشگاه قم، دانش آموخته رشته ریاضی کاربردی دانشگاه صنعتی شریف است که در سال ۱۳۹۰از رساله دکتری خود با عنوان فرمول کاهش رتبه تعمیم یافته و کاربرد آن در تجزیه های ماتریسی حقیقی و صحیح، تحت راهنمایی دکتر نظام الدین مهدوی امیری دفاع کرد. ایشان دوره کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی را در دانشگاه صنعتی شریف در سال ۱۳۷۵ و دوره کارشناسی ریاضی کاربرد در کامپیوتر را در دانشگاه صنعتی امیرکبیر در سال ۱۳۷۳ به اتمام رساند.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.104599.1227