ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۶۴۹۳-۲۳۴۵، شاپا(الکترونیکی): ۶۵۰۷-۲۳۴۵
جلد ۳، شماره ۱ (۱۳۹۷)، صص. ۳۹-۲۵
© ۱۳۹۷ دانشگاه اصفهان

http://www.ui.ac.ir
http://math-sci.iranjournals.ir

کاربرد جبر خطی در سیستم موقعیت‌یاب جهانی یا GPS

سید وحید قاسم‌زاده، سلمان برومند و رقیه خسروی*

چکیده. سیستم موقعیت‌یاب جهانی GPS یک سیستم ناوبری است که از مجموعه‌ای از ماهواره‌ها که به دور زمین در گردش هستند، تشکیل شده است. این سیستم با دریافت سیگنال از حداقل ۳ ماهواره قادر خواهد بود موقعیت مکانی، سرعت و اطلاعات زمانی را محاسبه و در قالب‌های کاربردی نمایش دهد. جالب است بدانید که در این سیستم از محاسبات ریاضی نسبتا ساده‌ای استفاده شده است. این مقاله به منظور آشنایی علاقه‌مندان جوان به نحوه‌ی کارکرد و معادلات استفاده شده در GPS، به‌طور خاص به مسائل جبری استفاده شده در GPS پرداخته است. در این راستا ابتدا به محاسبه‌ی موقعیت به کمك اصل مثلث‌بندی و تأثیر و تصحیح خطای زمان برای گیرنده‌ی GPS اشاره شده است. در مرحله بعد مفهوم شبه فاصله، حل معادلات شبه فاصله و نحوه استخراج خطای تخمین موقعیت و زمان، بیان شده است. سپس انواع خطاها در GPS بررسی شده است. در پایان یک مساله‌ی جالب در GPS مطرح و حل شده است.

۱. مقدمه

ناوبری، دانش هدایت و راه‌یابی وسایل نقلیه بین دو نقطه است. ناوبری به دو دسته کلی تقسیم می‌شود: ([۴])

- ناوبری با هدایت رادیویی که یک ایستگاه رادیویی به طور مرتب سیگنال‌هایی را به اطراف می‌فرستد، این سیگنال‌ها شامل مختصات دقیق آن ایستگاه است. امروزه عالی‌ترین شکل هدایت رادیویی، سامانه GPS[1] است.
- ناوبری اینرسی که در این نوع ناوبری، به کمك حسگرهای ژیروسکوپ و شتاب‌سنج، به ترتیب سرعت‌های زاویه‌ای وسیله و شتاب‌های خطی آن اندازه‌گیری و سپس به کمک معادلات ریاضی اویلر، سرعت، موقعیت و وضعیت وسیله به‌دست می‌آید.

با روی کار آمدن GPS، تمام سیستم‌های قبلی تعیین موقعیت ماهواره‌ای از قبیل دوربین‌های بالستیك، SLR، $N.N.S.S$، $SEcd$ و ... به‌تدریج از دور خارج شدند. امروزه GPS یك سیستم عملیاتی و همیشه در حال آماده باش است که تقریبا در تمام شرایط آب و هوایی کارایی دارد.

اولین ماهواره GPS در سال ۱۹۷۸ با اهداف نظامی، با موفقیت به فضا پرتاب شد. اما از سال ۱۹۸۰ به بعد برای استفاده‌های غیرنظامی نیز در دسترس قرار گرفت. در سال ۱۹۹۴ تمامی ۲۴ ماهواره در مدار زمین قرار گرفت ([۵]). عمر هر ماهواره حدود ۱۰ سال است که پس از آن جایگزین می‌شود. هر ماهواره حدود ۲۰۰۰ پوند وزن دارد و طول باتری‌های خورشیدی آن ۵,۵ متر است.

عبارات و کلمات کلیدی. GPS، محاسبه موقعیت، اصل مثلث‌بندی، خطی‌سازی روابط شبه فاصله .
دبیر تخصصی رابط: سعید اعظم
*نویسنده مسئول
تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۱۰/۰۲ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۹/۲۵
DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2017.101224.1209

[1]Global Positioning system

GPS سامانه‌ای کاملاً فعال و منظومه‌ای از ۲۴ تا ۳۲ ماهواره است که در اطراف زمین می‌گردد و توسط وزارت دفاع ایالات متحده پشتیبانی می‌شود. ماهواره‌های GPS، روزی دو بار در یك مدار دقیق دور زمین می‌گردند و سیگنال‌های حاوی اطلاعات را به زمین می‌فرستند. مدارها به شکلی تنظیم شده‌اند که در تمام ساعات شبانه‌روز و تقریبا از تمام نقاط سطح زمین، حداقل ۶ ماهواره در خط دید باشند. برای تحقق این موضوع فاصله‌ی یکسانی برای ماهواره‌های موجود در مدار مشترك در نظر گرفته نشده است ([۵، ۶]). گیرنده‌های GPS، این اطلاعات را دریافت کرده و با انجام محاسبات هندسی، محل دقیق گیرنده را نسبت به زمین محاسبه می‌کنند. در واقع گیرنده، زمان ارسال سیگنال توسط ماهواره را با زمان دریافت آن مقایسه می‌کند. از اختلاف این دو زمان فاصله گیرنده از ماهواره تعیین می‌گردد. آنگاه این عمل را با داده‌های دریافتی از چند ماهواره دیگر تکرار می‌کند و بدین ترتیب محل دقیق گیرنده را با اختلافی ناچیز، معین می‌کند.

گیرنده به‌دریافت اطلاعات همزمان از حداقل ۳ ماهواره برای محاسبه ۲ بعدی (یافتن طول و عرض جغرافیایی)، همچنین دریافت اطلاعات حداقل ۴ ماهواره، برای یافتن مختصات سه بعدی نیازمند است. با ادامه‌ی دریافت اطلاعات از ماهواره‌ها، گیرنده اقدام به محاسبه سرعت، جهت، مسیر پیموده شده، فاصله‌ی باقی‌مانده تا مقصد، زمان طلوع و غروب خورشید و بسیاری اطلاعات مفید دیگر می‌نماید.

در حقیقت دستگاه گیرنده GPS، یك رایانه‌ی کوچك است که جهت انجام امور خاصی برنامه‌ریزی شده است. این رایانه با داشتن مختصات و با کمك روابط ریاضی حاکم، می‌تواند محاسبات دیگری را هم انجام دهد. به عنوان نمونه زمان طلوع و غروب خورشید و ماه به کمك موقعیت، قابل محاسبه هستند. شاید خیلی جالب باشد ولی GPS می‌تواند زمان باقیمانده برای رسیدن به مقصد مورد نظر را با توجه به سرعت شما محاسبه کند. همچنین میانگین سرعت، بیشترین سرعت، میانگین سربالایی و سرازیری مسیر، سرعت عمودی، موقعیت منطقه از نظر شکار و ماهی‌گیری، محاسبه‌ی مساحت یك منطقه‌ی ناشناخته و برگرداندن شما از مسیر آمده را نیز می‌تواند انجام دهد.

گیرنده‌ها به دو دسته تقسیم می‌شوند که عبارتند از گیرنده‌های غیرنظامی که فقط می‌توانند امواج ارسالی روی کد C/A با دقت در حدود ۳ تا ۵ متر را دریافت کنند و گیرنده‌های نظامی که قادرند از کدهای P و Y علاوه بر C/A برای دریافت پارامترهای دقیق استفاده کنند، تقسیم می‌شوند ([۶]).

گفتنی است که از سال ۲۰۰۰ دقت سیستم GPS با حذف خطای SA [۲] که وزارت دفاع آمریکا آن را عمداً همراه سایر موج‌ها از ماهواره به سمت گیرنده‌های غیرنظامی می‌فرستاد، به ۳ تا ۵ متر کاهش یافته است.

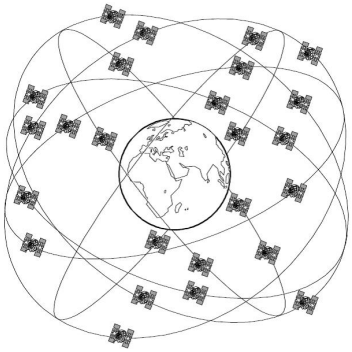
با توجه به کاربرد روزافزون سیستم GPS، امروزه تحقیقات وسیعی در این رابطه انجام شده است. به‌عنوان مثال در مرجع [۱] به‌بررسی ایده‌هایی جهت افزایش دقت سیستم تعیین موقعیت با استفاده از شبه ماهواره‌ها در سطح زمین پرداخته شده است. همچنین در مرجع [۲] به‌منظور استفاده در سامانه‌های ناوبری دریایی به ارائه روش جدید برای آشکارسازی ضریب GPS مبتنی بر اندازه گیری شبه‌فاصله انجام شده است. تلفیق سیستم ناوبری GPS و سیستم ناوبری اینرسی با استفاده از تئوری SLAM در محیط ناشناس، موضوع پژوهشی است که در مرجع [۳] بررسی شده است.

هدف اصلی این مقاله چگونگی استفاده ریاضیات در سیستم‌های ناوبری GPS خواهد بود. یک ریاضی‌دان جوان با مطالعه‌ی این مقاله، با مسائل پایه‌ای ریاضی مرتبط با GPS و چگونگی عملکرد آن آشنا می‌شود، و می‌تواند یک درک اساسی از نظریه GPS فراهم آورد. در این مقاله با محاسبه‌ی موقعیت به کمك اصل مثلث‌بندی و نحوه‌ی استخراج موقعیت در سیستم ناوبری ، انواع خطاهای GPS و روش‌های تصحیح خطای موقعیت و محاسبات موقعیت به تفصیل بیان خواهد شد. به‌همین منظور در قسمت ۲ با اساس محاسبه موقعیت به کمك اصل مثلث بندی GPS آشنا می‌شویم. در قسمت ۳، به‌کاربرد جبر خطی و روش محاسبه موقعیت خواهیم پرداخت و با مفهوم شبه فاصله و ایده خطی‌سازی معادلات موقعیت و نحوه استخراج پارامترهای خطا آشنا خواهیم شد. در قسمت ۴ انواع خطاها در GPS بحث کرده، همچنین لزوم استفاده از چهار ماهواره برای کاهش خطا خواهیم پرداخت. در پایان به بیان یک مساله در GPS و حل آن با استفاده از روشی ساده در جبر خطی می‌پردازیم.

[2] Selective Availability

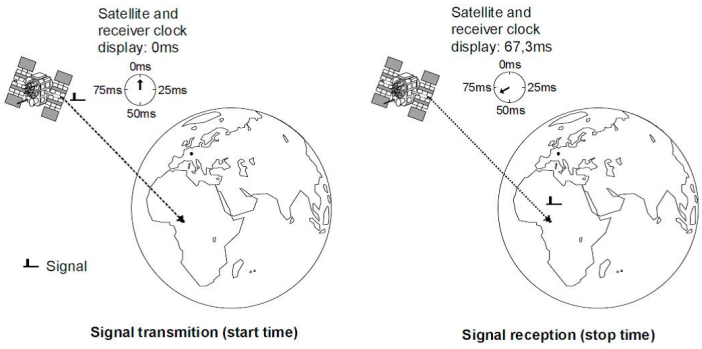
۲. اساس اندازه‌گیری موقعیت‌یابی به کمک GPS

مطابق شکل ۱، ماهواره های GPS در مدارهایی که با محوراستوا زاویه‌ی ۵۵ درجه دارند و در فاصله‌ی ۲۰۱۸۰ کیلومتر از زمین واقعند، در حال گردش هستند. این ماهواره‌ها در ۶ مدار بیضوی با زاویه‌ی میل ۵۵ درجه نسبت به خط استوا قرار دارند و هر ۱۱ ساعت و ۵۸ دقیقه یکبار به دور زمین می‌چرخند. هر ماهواره، ۴ ساعت اتمی بسیار دقیق دارد. این ساعت‌ها، دقیق‌ترین تجهیزاتی هستند که تاکنون ساخته شده‌اند و هر ۳۰۰۰۰ تا ۱۰۰۰۰۰ سال طول می‌کشد تا حداکثر به اندازه‌ی ۱ ثانیه خطا داشته باشند. به منظور این که ساعت‌ها دقیق بمانند، ماهواره‌هااز نقاط کنترلی متفاوتی از روی زمین، تنظیم و سنکرون می‌شوند. مسیر حرکت ماهواره ها، آنهارا بین عرض جغرافیایی ۶۰ درجه‌ی شمالی و ۶۰ درجه‌ی جنوبی قرار می دهد. این بدان معنی است که در هر نقطه از زمین و در هر زمان می‌توان سیگنال‌های ماهواره را دریافت کرد.



شکل ۱: مدارهای ماهواره‌های GPS

هر ماهواره، موقعیت دقیق و ساعت دقیق خود را با فرکانس ۱۵۷۵,۴۲ مگاهرتز به زمین ارسال می‌کند. این سیگنال‌ها با سرعت نور (۳۰۰ هزار کیلومتر بر ثانیه) از ماهواره‌ها ارسال می‌شود و مدت زمان تقریبی ۶۷,۳ میلی ثانیه طول می‌کشد که به یك نقطه روی سطح زمین که به‌طور مستقیم در زیر ماهواره قرار گرفته است، برسد. سیگنال‌ها برای هر کیلومتر حرکت اضافی، نیاز به زمان تقریبی ۳,۳ میکرو ثانیه دارند. با مقایسه زمان ورود سیگنال ماهواره‌ها و زمان دریافت سیگنال این امکان موجود است که زمان عبور سیگنال $(transit\ time)$ مشخص شود. (شکل ۲)



شکل ۲: زمان ارسال و دریافت سیگنال‌های GPS

فاصله‌ی ماهواره (s) با استفاده از رابطه $s = c.\tau$ قابل محاسبه است که در این رابطه، s فاصله ماهواره از سطح زمین می‌باشد که با زمان عبور (τ) و سرعت نور (c) در ارتباط است.

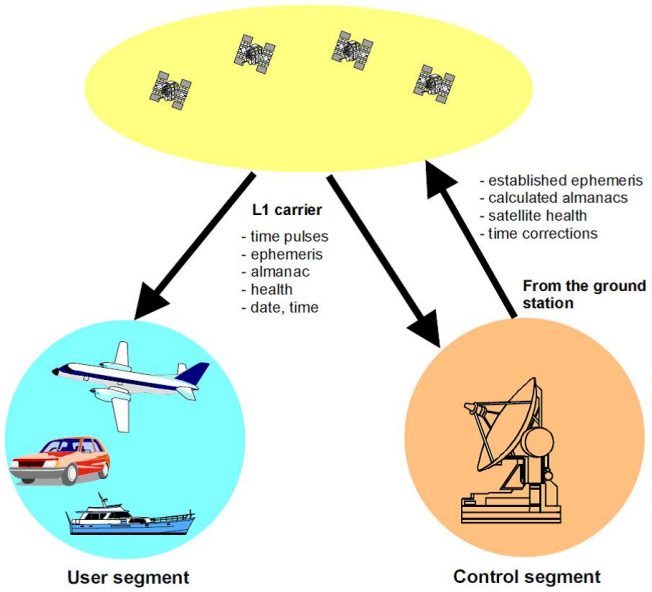
DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2017.101224.1209

تنها دانستن یك زمان عبور و فاصله ماهواره برای تعیین موقعیت سه‌بعدی وسیله کافی نیست. جهت رسیدن به این هدف و تعیین دقیق موقعیت، نیاز به اندازه‌گیری ۴ زمان عبور می‌باشد و این دلیلی است که برای موقعیت‌یابی دقیق، نیاز به ارتباط با ۴ ماهواره می‌باشد که این موضوع در بخش‌های بعد توضیح داده خواهد شد. به وسیله‌ی گیرنده‌های سیستم GPS می‌توان هم به روش مطلق و هم به روش نسبی موقعیت را تعیین کرد. برای هر کدام از این دو روش می‌توان از روش‌های ایستا، متحرک و نیمه متحرک استفاده کرد. در روش مطلق، موقعیت نسبی نقطه نسبت به یک نقطه‌ی مختصات‌دار معلوم به‌دست می‌آید. این در حالی است که در روش نسبی دو گیرنده GPS به‌طور همزمان برای مشاهده ماهواره مشترک و اندازه‌گیری استفاده می‌شود و این روش به دلیل حذف خطاهای سیستماتیک موجود در اندازه‌گیری‌های GPS از اهمیت خاصی برخوردار است.

یك سیستم GPS از سه قسمت کلی تشکیل شده است:

- بخش فضا (شامل مجموعه ماهواره‌ها)
- بخش کنترل (شامل همه ایستگاه‌های کنترل و مانیتورینگ زمینی)
- بخش کاربری (شامل همه گیرنده‌های نظامی و غیرنظامی)

در شکل ۳ این سه مجموعه نشان داده شده است.



شکل ۳: قسمت‌های مختلف سیستم GPS

در بخش فضایی، ماهواره‌های GPS سیگنال‌های حاوی اطلاعات را به زمین می‌فرستند. بخش زمینی سیستم شامل ایستگاه‌های کنترل زمینی است که دارای مختصات معلوم هستند و موقعیت آنها از طریق روش‌های کلاسیك تعیین موقعیت نظیر روش $VLBI$ و روش SLR به‌دست آمده است. این ایستگاه‌ها وظیفه تعقیب چندجمله‌ای ریاضی مربوط به پارامترهای مداری و موقعیت ماهواره‌ها را بر اساس معیار کمترین مربعات خطا دارند ([۶]). تعداد این ایستگاه‌های زمینی ۵ عدد است که ایستگاه اصلی با نام کلرادو اسپرینگ در آمریکا قرار دارد و ۴ ایستگاه فرعی دیگر در نقاط دیگر کره زمین مستقر هستند. بخش کاربری نیز از صدها هزار کاربر نظامی آمریکایی و متحدان آن برای تعیین موقعیت دقیق و صدها میلیون کاربر مدنی، عمومی یا علمی تشکیل شده است که از امکانات موقعیت‌یابی استاندارد استفاده می‌کنند. قسمت کاربران سیستم خود شامل

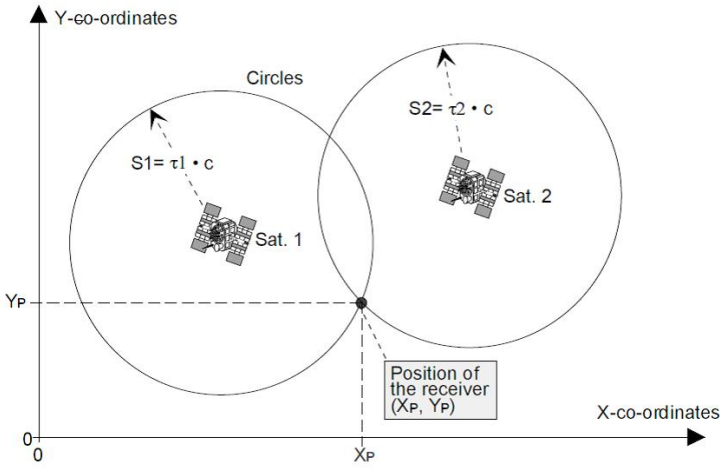
دو بخش است: آنتن دریافت‌کننده اطلاعات ارسالی از ماهواره‌ها و گیرنده (پردازش‌کننده اطلاعات دریافتی و تعیین‌کننده موقعیت محل آنتن).

نرم‌افزار و ریزپردازنده داخل گیرنده فاصله بین آنتن زمینی تا ماهواره‌های مرتبط با گیرنده را تعیین می‌کند. سپس با استفاده از حداقل ۴ ماهواره موقعیت X، Y و Z محل استقرار آنتن یا همان گیرنده تعیین می‌شود. یک گیرنده موقعیت‌یاب می‌تواند با تبادل اطلاعات سیگنال با تعداد چهار (و یا بیشتر) ماهواره، موقعیت مکانی خود را شامل طول و عرض جغرافیایی و ارتفاع از سطح زمین را تعیین می‌نماید. با انجام پشت سر هم این محاسبات، موقعیت‌یاب می‌تواند سرعت و جهت حرکت خود را نیز به دقت مشخص نماید. امروزه در بعضی مکان‌های ایران قادر به دریافت اطلاعات تا ۱۰ ماهواره می‌باشیم و حداقل به ۴ تا ۵ ماهواره در هر زمان از شبانه‌روز و در هر مکان دسترسی داریم. هر قدر تعداد ماهواره‌های قابل مشاهده بیشتر شود معادلات اساسی تعیین موقعیت بیشتر خواهند شد و بنابراین زمان لازم برای تعیین موقعیت یك نقطه کاهش یافته و دقت تعیین موقعیت نیز افزایش خواهد یافت.

۱.۲. محاسبه موقعیت به کمك اصل مثلث‌بندی. سیستم GPS از اصل مثلث‌بندی [۳] ریاضیات برای تعیین موقعیت کاربر استفاده می‌کند. مفهوم مثلث‌بندی به معنای موقعیت از سه فاصله می‌باشد. در واقع، مثلث‌بندی یك مفهوم هندسی ساده است که بر روی پیدا کردن موقعیت یك فرد بر روی زمین تمرکز می‌کند وقتی که فاصله آن فرد از مکان‌های مشخصی داده شده باشد. برای به‌دست آوردن آن، محل دقیق ماهواره‌های GPS و فاصله هر کدام از آنها از موقعیت فرد لازم می‌باشد.

در واقع سیستم GPS به‌طور مداوم با استفاده از امواج رادیویی که از ماهواره‌ها دریافت و تجزیه و تحلیل می‌کند فاصله هر ماهواره را محاسبه می‌کند. در اینجا ابتدا به‌محاسبه موقعیت در فضای دوبعدی می‌پردازیم.

فرض کنید تعیین موقعیت در یك صفحه وسیع مدنظر باشد. دو ماهواره نیز در فواصل دور اطلاعات شامل ساعت دقیق و موقعیت خود را ارسال می‌کنند. با اندازه‌گیری زمان عبور سیگنال هر ماهواره می‌توان دو دایره به شعاع‌های S_1 و S_2 مرکز هر ماهواره ترسیم نمود. اگر موقعیت بالایی ماهواره‌ها را حذف کنیم، موقعیت گیرنده GPS در محل برخورد دو دایره ترسیم شده می‌باشد. (شکل ۴)



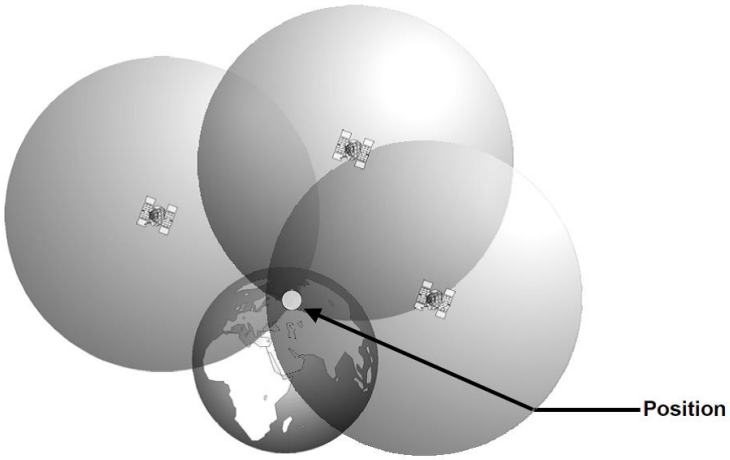
شکل ۴: موقعیت‌یابی به کمك GPS در فضای ۲ بعدی

بنابراین تنها ۲ ماهواره برای تعیین موقعیت در فضای دوبعدی X و Y کافی است. اما در عمل، موقعیت واقعی بایستی در یك فضای سه بعدی مشخص شود. از آنجایی که تفاوت فضای دو بعدی و سه بعدی، در بعد سوم و اضافه شدن محور

[3] Tirlateration

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2017.101224.1209

Z (محور ارتفاع) است، بنابراین جهت تعیین واقعی موقعیت، نیاز به سه ماهواره می‌باشد. در واقع ابتدا فاصله ماهواره اول را محاسبه کرده و کره‌ای به شعاع این فاصله و مرکز ماهواره ترسیم می‌کنیم در این صورت موقعیت کاربر بر روی محیط کره است. سپس همین کار را برای ماهواره ۲ انجام می‌دهیم که موقعیت مورد نظر، تقاطع دو کره می‌باشد و تقاطع دو سطح کره محیط دایره است. حال اگر فاصله تا ماهواره ۳ را محاسبه کنیم اشتراك ۳ سطح کره، در واقع اشتراك دایره و یك کره ۲ نقطه می‌باشد که یکی از آن روی زمین و دیگری در فضا است. نقطه‌ای که روی زمین می‌باشد موقعیت کاربر است. (شکل ۵)



شکل ۵: موقعیت‌یابی به کمك ۳ ماهواره در فضای ۲ بعدی

نکته مهم: تمام عبارات قبلی در صورتی معتبر است که ساعت زمینی و ساعت‌های اتمی ماهواره‌ها کاملاً همزمان و سنکرون باشند تا محاسبه زمان عبور سیگنال به طور صحیح و دقیق انجام پذیرد.

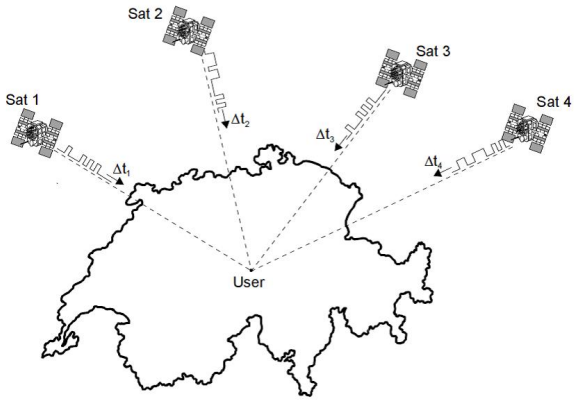
برای تعیین دقیق سه پارامتر مدنظر در سیستم موقعیت‌یابی GPS شامل طول جغرافیایی، عرض جغرافیایی و ارتفاع به یك سری معادلات مکانی و همچنین زمانی نیاز است. که در هر معادله، موقعیت دقیق ماهواره و زمان عبور سیگنال آن وجود دارد. ۲۸ ماهواره در مدارات خود به گونه‌ای قرار گرفته‌اند که در هر نقطه از زمین و در هر زمانی، حداقل چهار ماهواره قابل رویت هستند. در این حالت با وجود خطای ساعت، دقت تخمین موقعیت می‌تواند به حد چندین متر و حتی کمتر از یك متر برسد.

۳. محاسبات موقعیت در سیستم GPS

هر چند سیستم GPS در ابتدا، کاربردهای نظامی داشت اما امروزه این سیستم در بسیاری از زمینه‌های ناوبری، تحقیقات، موقعیت‌یابی، اندازه‌گیری سرعت و زمان و ... کاربردهای زیادی پیدا کرده است. با بکارگیری روش‌هایی چون $DGPS$[۴] و تکنیك‌های خاص اندازه‌گیری (اندازه‌گیری فاز) و... دقت این سیستم‌ها در تعیین موقعیت و محاسبه زمان به ترتیب تا حد چندین سانتی‌متر و در حد چندین نانو ثانیه افزایش یافته است.

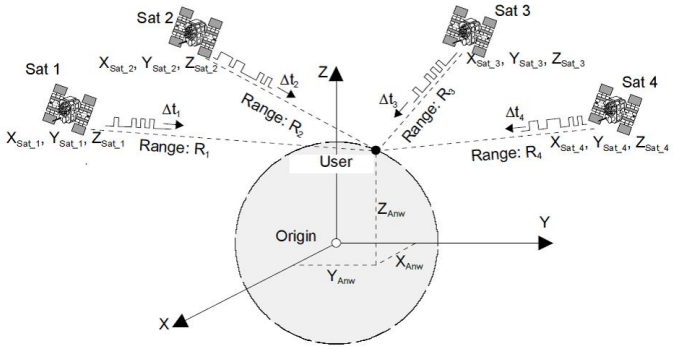
۱.۳. محاسبه‌ی شبه فاصله. به‌منظور اینکه گیرنده GPS قادر به اندازه‌گیری موقعیت باشد لازم است، سیگنال‌های زمانی ماهواره‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ را دریافت کند تا بتواند زمان‌های عبور Δt_1، Δt_2، Δt_3 و Δt_4 را محاسبه نماید. (شکل ۶)

[4] Differential GPS



شکل ۶: زمان عبور سیگنال ۴ ماهواره تا محل کاربر

فاصله‌ی کاربر از ماهواره‌ها (R_1, R_2, R_3, R_4) با استفاده از زمان‌های عبور سیگنال‌های بین گیرنده GPS و ماهواره‌ها $(\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3, \Delta t_4)$ قابل اندازه‌گیری است. در صورتی که موقعیت $(X_{sat}, Y_{sat}, Z_{sat})$ مربوط به هر ماهواره کاملاً مشخص باشد آنگاه موقعیت کاربر $(X_{Anw}, Y_{Anw}, Z_{Anw})$ می‌تواند محاسبه شود. از آنجایی که ساعت‌های اتمی ماهواره‌ها بسیار دقیق هستند درنتیجه زمان ارسال سیگنال توسط ماهواره‌ها به‌طور کاملاً دقیق، مشخص است. همه ساعت‌های ماهواره‌ها با یکدیگر ودستگاه جهانی زمان (UTC)[5] کاملاً همزمان و سنکرون هستند. اما در مقابل، ساعت گیرنده GPS با مختصات UTC سنکرون نبوده و دارای تفاوت زمانی Δt_0 است و از آن جهت که ساعت کاربر سریعتر از ساعت UTC است علامت آن مثبت می‌باشد. خطای زمانی منتج Δt_0 باعث خطا در مقادیر زمان عبور و فاصله R می‌شود.



شکل ۷: محاسبه شبه فاصله از ۴ ماهواره تا محل کاربر

فاصله غیردقیق به عنوان شبه فاصله $(pseudo - Range)$ یا اختصاراً PSR شناخته می‌شود و از رابطه (۱.۳) به‌دست می‌آید:

$$\Delta t_{measural} = \Delta t + \Delta t_0$$
$$PSR = \Delta t_{measural}.c = (\Delta t + \Delta t_0).c$$
$$PSR = R + \Delta t_0.c \qquad (۱.۳)$$

[5] Universal Time Coordinated

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2017.101224.1209

در این رابطه پارامترها به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

R: فاصله‌ی کاربر تا ماهواره

c: سرعت نور

Δt: زمان عبور سیگنال از ماهواره تا کاربر

$\Delta t_{\circ}$: اختلاف زمانی بین ساعت ماهواره و ساعت کاربر

PSR: شبه فاصله

فاصله‌ی ماهواره تا کاربر در دستگاه مختصات دکارتی از رابطه (۲.۳) به‌دست می‌آید:

$$R = \sqrt{(x_{sat} - X_{User})^{۲} + (Y_{sat} - Y_{User})^{۲} + (Z_{sat} - Z_{User})^{۲}} \qquad (۲.۳)$$

با جایگذاری رابطه (۲.۳) در رابطه (۱.۳)، شبه فاصله از رابطه (۳.۳) قابل محاسبه خواهد بود.

$$PSR = \sqrt{(X_{sat} - X_{User})^{۲} + (Y_{sat} - Y_{User})^{۲} + (Z_{sat} - Z_{User})^{۲}} + c.\Delta t_{\circ} \qquad (۳.۳)$$

برای محاسبه‌ی موقعیت سه‌بعدی وسیله Z_{Anw}، Y_{Anw} و X_{Anw} و اختلاف زمانی $\Delta t_{\circ}$ به چهار معادله مستقل نیاز است که در ادامه به آن‌ها اشاره می‌شود.

شبه فاصله برای هر ماهواره از طریق رابطه ((۴.۳)) می‌تواند محاسبه شود که در این رابطه $i = ۱, ۲, ۳$ است.

$$PSR_i = \sqrt{(X_{sat_i} - X_{User})^{۲} + (Y_{sat_i} - Y_{User})^{۲} + (Z_{sat_i} - Z_{User})^{۲}} + c.\Delta t_{\circ} \qquad (۴.۳)$$

یکی دیگر از روش‌های حل معادلات شبه فاصله استفاده از ابزار جبری پایه گروبنر [۶] می‌باشد که در آن معادلات شبه فاصله که غیرخطی هستند به فرم یك سیستم از چندجمله‌ای‌های جبری چند متغیره که دارای یك متغیر نامشخص می‌باشد تبدیل کرده، سپس این سیستم را به چندجمله‌ای‌های یك متغیره کاهش می‌دهد. بنابراین با استفاده از یك روش جبری و حل معادلات درجه دوم می‌تواند معادلات شبه فاصله را حل نماید. برای مشاهده دقیق این روش مرجع [۸] را مشاهده نمایید.

۲.۳. مدل تیلور برای خطی‌سازی روابط GPS. روابط GPS که برای تعیین موقعیت به‌کار می‌روند، روابطی غیرخطی هستند. جهت حل چهار معادله و چهار مجهول، تابع رادیکال با استفاده از بسط تیلور و از مرتبه یك خطی‌سازی می‌شود. با تعریف $\Delta x = x - x_{\circ}$ بسط سری تیلور به صورت رابطه (۵.۳) نوشته می‌شود.

$$f(x) = f(x_{\circ}) + \frac{f'(x_{\circ})}{۱!}\Delta x + \frac{f''(x_{\circ})}{۲!}\Delta x^{۲} + \frac{f'''(x_{\circ})}{۳!}\Delta x^{۳} + \cdots \qquad (۵.۳)$$

با ساده‌سازی رابطه فوق و در نظر گرفتن قسمت اول بسط تیلور، رابطه (۵.۳) به رابطه (۶.۳) تبدیل می‌شود.

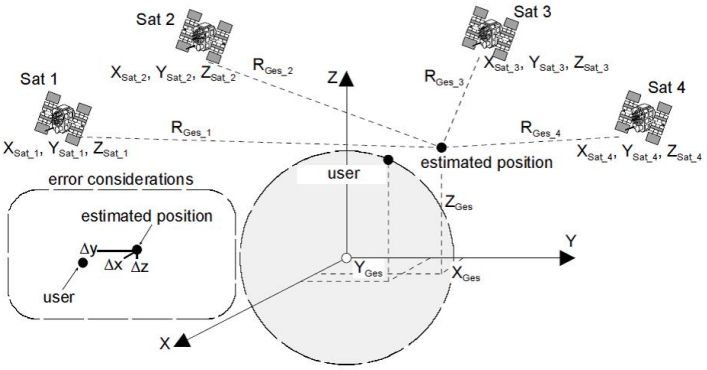
$$f(x) = f(x_{\circ}) + \frac{f'(x_{\circ})}{۱!}\Delta x \qquad (۶.۳)$$

جهت خطی‌سازی روابط شبه فاصله بایستی یك نقطه دلخواه x. در نزدیکی x در نظر گرفته شود. برای سیستم GPS این کار بدین مفهوم است که به جای محاسبه‌ی دقیق موقعیت وسیله $(X_{Anw}, Y_{Anw}, Z_{Anw})$ در ابتدا یك تخمین از موقعیت وسیله $(X_{Ges}, Y_{Ges}, Z_{Ges})$ انجام شود. موقعیت تخمینی شامل خطاهای مجهول Δx، Δy و Δz است. (رابطه (۷.۳))

$$\begin{aligned} X_{Anw} &= X_{Ges} + \Delta x \\ Y_{Anw} &= Y_{Ges} + \Delta y \\ Z_{Anw} &= Z_{Ges} + \Delta z \end{aligned} \qquad (۷.۳)$$

[6] Grobner

فاصله‌ی R_{Ges} از ماهواره‌ها تا موقعیت تخمینی می‌تواند به طریق مشابهی مطابق شکل ۸ و رابطه (۸.۳) انجام شود.



شکل ۸: محاسبه‌ی موقعیت کاربر بر اساس یك موقعیت تخمینی

$$R_{Ges_i} = \sqrt{(X_{sat_i} - X_{Ges})^2 + (Y_{sat_i} - Y_{Ges})^2 + (Z_{sat_i} - Z_{Ges})^2} \qquad (۸.۳)$$

با ترکیب این رابطه و رابطه شبه فاصله و رابطه بسط تیلور، رابطه (۹.۳) حاصل می‌شود.

$$PSR_i = R_{Ges_i} + \frac{\partial(R_{Ges_i})}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial(R_{Ges_i})}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial(R_{Ges_i})}{\partial z}\Delta z + c.\Delta t_{\circ} \qquad (۹.۳)$$

بعد از انجام مشتق‌گیری جزیی و ساده‌سازی رابطه اخیر، چهار رابطه برحسب $(i = ۱, ۲, ۳, ۴)$ برای شبه‌فاصله مطابق رابطه (۱۰.۳) به‌دست می‌آید.

$$PSR_i = R_{Ges_i} + \frac{X_{Ges} - X_{Sat_i}}{R_{Ges_i}}\Delta x + \frac{Y_{Ges} - Y_{Sat_i}}{R_{Ges_i}}\Delta y + \frac{Z_{Ges} - Z_{Sat_i}}{R_{Ges_i}}\Delta z + c.\Delta t_{\circ} \qquad (۱۰.۳)$$

۳.۳. حل معادلات شبه‌فاصله موقعیت تخمینی. بعد از مرتب‌سازی چهار رابطه شبه فاصله برای $(i = ۱, \ldots ۴)$ و بر اساس رابطه (۱۱.۳)، چهار مجهول $\Delta t_{\circ}$، Δz، Δy و Δx با استفاده از چهار معادله خطی زیر قابل محاسبه خواهد بود.

$$\begin{bmatrix} PSR_{۱} - R_{Ges_۱} \\ PSR_{۲} - R_{Ges_۲} \\ PSR_{۳} - R_{Ges_۳} \\ PSR_{۴} - R_{Ges_۴} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X_{Ges}-X_{Sat_۱}}{R_{Ges_۱}} & \frac{Y_{Ges}-Y_{Sat_۱}}{R_{Ges_۱}} & \frac{Z_{Ges}-Z_{Sat_۱}}{R_{Ges_۱}} & c \\ \frac{X_{Ges}-X_{Sat_۲}}{R_{Ges_۲}} & \frac{Y_{Ges}-Y_{Sat_۲}}{R_{Ges_۲}} & \frac{Z_{Ges}-Z_{Sat_۲}}{R_{Ges_۲}} & c \\ \frac{X_{Ges}-X_{Sat_۳}}{R_{Ges_۳}} & \frac{Y_{Ges}-Y_{Sat_۳}}{R_{Ges_۳}} & \frac{Z_{Ges}-Z_{Sat_۳}}{R_{Ges_۳}} & c \\ \frac{X_{Ges}-X_{Sat_۴}}{R_{Ges_۴}} & \frac{Y_{Ges}-Y_{Sat_۴}}{R_{Ges_۴}} & \frac{Z_{Ges}-Z_{Sat_۴}}{R_{Ges_۴}} & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \Delta t_{\circ} \end{bmatrix} \qquad (۱۱.۳)$$

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2017.101224.1209

درنتیجه با معکوس‌گیری از این روابط، خطاهای موقعیت و اختلاف زمانی بین ساعت ماهواره و ساعت کاربر از رابطه (۱۲.۳) به‌دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \Delta t_{\circ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X_{Ges}-X_{Sat_۱}}{R_{Ges_۱}} & \frac{Y_{Ges}-Y_{Sat_۱}}{R_{Ges_۱}} & \frac{Z_{Ges}-Z_{Sat_۱}}{R_{Ges_۱}} & c \\ \frac{X_{Ges}-X_{Sat_۲}}{R_{Ges_۲}} & \frac{Y_{Ges}-Y_{Sat_۲}}{R_{Ges_۲}} & \frac{Z_{Ges}-Z_{Sat_۲}}{R_{Ges_۲}} & c \\ \frac{X_{Ges}-X_{Sat_۳}}{R_{Ges_۳}} & \frac{Y_{Ges}-Y_{Sat_۳}}{R_{Ges_۳}} & \frac{Z_{Ges}-Z_{Sat_۳}}{R_{Ges_۳}} & c \\ \frac{X_{Ges}-X_{Sat_۴}}{R_{Ges_۴}} & \frac{Y_{Ges}-Y_{Sat_۴}}{R_{Ges_۴}} & \frac{Z_{Ges}-Z_{Sat_۴}}{R_{Ges_۴}} & c \end{bmatrix}^{-۱} \cdot \begin{bmatrix} PSR_{۱} - R_{Ges_۱} \\ PSR_{۲} - R_{Ges_۲} \\ PSR_{۳} - R_{Ges_۳} \\ PSR_{۴} - R_{Ges_۴} \end{bmatrix} \qquad (۱۲.۳)$$

به این ترتیب با کمك رابطه اخیر و همچنین روابط بخش‌های قبل موقعیت تخمینی وسیله به‌دست خواهد آمد. این پارامترهای مکانی در دستگاه مختصات زمینی $ECEF$ [۷] بیان شده‌اند همچنین جهت بیان موقعیت وسیله برحسب پارامترهای دیگر شبیه طول و عرض جغرافیایی می‌توان از رابطه‌های مربوطه در دستگاه مختصات جغرافیایی محلی یا NED [۸] استفاده کرد که البته این موضوع از حوصله این مقاله خارج است.

۴. منابع خطا در GPS

انواع خطاهایی که در GPS ممکن است رخ دهد عبارتند از:

- خطای ماهواره: که شامل خطای مداری و خطای ساعت ماهواره می‌باشد.

خطای مداری: ماهواره‌های GPS به‌دلیل وجود برخی تاثیرات فیزیکی مانند جاذبه زمین و سایر سیارات و جاذبه خورشید، تاثیر تشعشعات خورشیدی و ... دقیقا در مدار پیش‌بینی شده حرکت نمی‌کنند و بنابراین مدار واقعی اختلافی با مدار حاصل از $Ephemeris$ دارد که این مسئله خطایی را در شبه فاصله‌ها و اندازه‌گیری‌های نهایی ایجاد می‌کند.

خطای ساعت ماهواره یا سنجش زمان: ماهواره‌های GPS دارای نوسان‌سازهای بسیار دقیقی از نوع سدیم و ربدیم هستند، لذا دارای ساعت بسیار دقیقی می‌باشند و همچنین این ساعت‌ها همواره با ساعت اصلی سیستم GPS کنترل می‌شوند و پارامترهای تصحیح آن به صورت ضرایب یک چند جمله‌ای درجه دو به کاربر ارسال می‌شود. درحالت فعال نبودن خطای S/A میزان خطای ساعت ماهواره در حد زیر ۱ میکرو ثانیه یا معادل با ۳۰۰ متر می‌باشد.

- خطای گیرنده: که شامل خطای چند مسیری، خطای ساعت گیرنده و نویز گیرنده می‌باشد.

خطای چند مسیری: این خطا به‌دلیل انعکاس سیگنال رادیویی به علت وجود موانع است. فرض GPS بر این است که سیگنال‌های ارسالی در مسیر مستقیم حرکت کنند. اما عملاً تحت تاثیر پدیده‌های جوی بخشی از این سیگنال‌ها تغییر مسیر می‌دهند یا پس از برخورد با سایر اجسام دوباره منعکس می‌شوند و سپس به گیرنده می‌رسند. به عبارتی خطای چند مسیری شدن به دلیل دریافت غیر مستقیم امواج توسط گیرنده ایجاد می‌شود. در مناطقی مانند کنار رودخانه‌ها، مجاورت اتومبیل‌ها و ... امواج GPS منعکس شده و ممکن است توسط گیرنده دریافت شوند. دریافت این امواج سبب حصول شبه فاصله‌های اشتباه می‌شود. این خطا با انتخاب مکان مناسب، انتخاب نوع آنتن و انتخاب مناسب زاویه قابل رفع است.

خطای ساعت گیرنده: به دلیل ارزان‌تر کردن گیرنده‌های GPS معمولا از نوسان‌سازهای کوارتز نسبتا ارزان قیمت استفاده می‌شود و بنابراین پایداری ساعت آنها بسیار پایین‌تر از ساعت سیستم GPS است. لیکن با استفاده از زمان ارسالی ماهواره‌ها این ساعت قابل کنترل است. همچنین با استفاده از روش‌های تفاضلی تاثیر خطای ساعت گیرنده قابل حذف شدن است.

[7] Earth Centered Earth Fixed [8] North-East-Down

نویز گیرنده: نویزهای تصادفی نویزهایی هستند که منبع مشخص ندارند و تحت فرمول خاصی به‌دست نمی‌آید و قابل پیش بینی نیستند.

- خطای اتمسفر یا خطای جوی: که شامل تاخیر یونیسفری و تروپوسفر می‌باشد.

یونیسفر لایه بالائی جو است وارتفاع آن از سطح زمین بین ۵۰ تا ۵۰۰ کیلومتر است. مواد تشکیل‌دهنده آن ذرات یونیزه شده‌اند که می‌توانند منجر به اغتشاش در سیگنال‌های سیستم GPS گردند. علی‌رغم آنکه بخش اعظم خطای حاصل از یونیسفر توسط مدل‌سازی قابل رفع است اما منشاء عمده خطاهای ایجاد شده تحت تاثیر این لایه است. با استفاده از مدل ریاضی که این مدل به ۸ ضریب که از فایل ناوبری ماهواره ارسال می‌گردد وابسته است. این مدل حداکثر ۵۰ درصد خطای یونیسفر را از بین می‌برد. مدل دوم روش دو فرکانسه می‌باشد که در این روش به کمک فرمول ساده‌ای با داشتن تفاوت ۲ طول و نیز تاخیر زمانی و یک ضریب که نسبت طول موج ۲ فرکانس می‌باشد عملاً خطای یونیسفر تا حد ۹۵ درصد حذف می‌گردد. برای انجام تصحیحات با استفاده از مدل‌های یونیسفر، ماهواره دائماً اطلاعات مورد نیاز در خصوص مختصات مورد نیاز در مدل را به گیرنده زمینی ارسال می‌نماید. گیرنده همچنین باید زاویه ورود هر سیگنال به جو را بداند. زیرا این زاویه تعیین کننده طول سفر سیگنال از درون اغتشاشات جوی است.

تروپوسفر پایین‌ترین لایه جو است و مقدار متنابهی بخار آب به صورت‌های مختلف در این لایه دیده می‌شود که مقدار و چگونگی آن تحت تاثیر تغییر فشار و حرارت دائماً تغییر می‌نماید. اما علیرغم آشفتگی این لایه بخش ناچیزی از خطا مربوط به این لایه است. با استفاده از مشاهدات تفاضلی بین گیرنده اختلاف اثر ترپوسفر دو انتهای خط مبنا مهم می‌باشد. گاهی فرض می‌شود که اثرات ترپوسفر در دو انتهای خط مبنا یکسان است و با روش‌های تفاضلی این اثر می‌تواند حذف یا به میزان زیادی کاهش یابد.

- خطای $cyclic\ slip$:

جهش فاز یا $cyclic\ slip$ اکثراً در نتیجه وجود موانع بین گیرنده‌ها و ماهواره به‌وجود می‌آید و به‌طور کلی وقتی ارتباط بین گیرنده و ماهواره قطع شود، اندازه‌گیری هم انجام نمی‌شود لذا در اندازه‌گیری فاز موج حامل، عدد ابهام فاز از دست خواهد رفت. پس از گذشت مدتی که سیگنال ماهواره مجدداً توسط گیرنده دریافت شود، اندازه‌گیری فاز نیز انجام خواهد شد و در این حالت مقدار ابهام فاز مانند شروع اندازه‌گیری مجهول است و باید تعیین گردد.

در خصوص عوامل موثر در دقت عمل GPS شکل قرار گرفتن ماهواره‌ها نسبت به یکدیگر می‌باشد. طرح و هندسه قرارگیری ماهواره‌ها هنگامی که گیرنده در نزدیکی ساختمان‌های بلند، کوه‌ها، دره‌ها یا در وسایل نقلیه قرار می‌گیرند نیز جزئ عوامل اثربخش است.

از روش‌های بهبود دقت در تعیین موقعیت استفاده از تکنیك مشاهدات تفاضلی GPS که به $DGPS$ معروف است می‌توان نام برد. از این روش که به عنوان تعیین موقعیت نسبی هم نام برده می‌شود اکثراً در کارهای نقشه برداری و ژئودزی استفاده می‌شود. در حقیقت این روش برای ارتقا مشاهدات تعیین موقعیت و زمان با استفاده از یك یا چند ایستگاه مرجع در موقعیت‌های معلوم است.

از روش‌های دیگر که برای تصحیح خطای ناوبری GPS به‌خصوص در کاربردهای نظامی و در مواجهه با اقدامات جنگ الکترونیك، استفاده از سیستم‌های ناوبری اینرسی [۹] به‌صورت تلفیقی با سیستم‌های ناوبری بر پایه داده‌های راداری است ([۷]). در روش ترکیب GPS و اینرسی اطلاعات به‌دست آمده از اینرسی با استفاده از GPS تصحیح می‌گردد. این کار به‌منظور جلوگیری از انباشته شدن خطای اینرسی صورت می‌گیرد. از فیلتر کالمن به‌عنوان پرکاربردترین ابزار در تصحیح خطای اینرسی GPS می‌توان نام برد.

[9] INS (Inertial Navigation Systems)

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2017.101224.1209

۱.۴. معیار تعدیل دقت یا DOP در GPS. تعدیل دقت یا DOP [۱۰] مربوط به خطای ناشی از هندسه‌ی ماهواره‌ها می‌باشد. هندسه‌ی ماهواره‌ها در زمان دریافت سیگنال توسط گیرنده بر روی عوامل متعددی تأثیرگذار است از جمله دقت موقعیتی $PDOP$ که بیانگر ارتباط خطای موقعیت کاربران و خطای موقعیت ماهواره است، دقت ارتفاعی $HDOP$ دقت زمانی $TDOP$، دقت عمودی $VDOP$ و $GDOP$.

عدد DOP با توجه به‌وضعیت قرار گرفتن ماهواره‌هایی که در محاسبات منظور می‌گردند و وضعیت کاربر، به‌دست می‌آید. هر اندازه که این عدد کوچکتر باشد به تناسب آن تأثیر خطای فاصله کاربر تا ماهواره بر خطا در جهتی خاص (افقی، عمودی) کمتر می‌شود.

به عنوان مثال با فرض چهار اندازه‌گیری توسط چهار ماهواره مجزا در هر لحظه می‌توان ماتریس زیر را محاسبه کرد:

$$A=\begin{bmatrix} (x_۱-x)/R_۱ & (y_۱-y)/R_۱ & (z_۱-z)/R_۱ & -۱ \\ (x_۲-x)/R_۲ & (y_۲۲-y)/R_۲ & (z_۲-z)/R_۲ & -۱ \\ (x_۳-x)/R_۳ & (y_۳-y)/R_۳ & (z_۳-z)/R_۳ & -۱ \\ (x_۴-x)/R_۴ & (y_۴-y)/R_۴ & (z_۴-z)/R_۴ & -۱ \end{bmatrix} \tag{۱.۴}$$

که $[x_i,y_i,z_i]^T$ بردار مکان هر ماهواره و $[x,y,z]^T$ بردار مکان دریافت‌کننده سیگنال است

$$R_i=\sqrt{(x_i-x)+(y_i-y)^۲+(z_i-z)^۲}$$

اکنون با تعریف ماتریس Q داریم $Q=(A^TA)^{-۱}$ که به عنوان ماتریس کواریانس عمل می‌کند و می‌تواند در تعیین مقادیر $PDOP$، $GDOP$ و ... مورد استفاده قرار گیرد. اگر ماتریس Q را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$Q=\begin{bmatrix} \delta_{xx} & \delta_{xy} & \delta_{xz} & \delta_{xt} \\ \delta_{yx} & \delta_{yy} & \delta_{yz} & \delta_{yt} \\ \delta_{zx} & \delta_{zy} & \delta_{zz} & \delta_{zt} \\ \delta_{tx} & \delta_{ty} & \delta_{tz} & \delta_{tt} \end{bmatrix}$$

مقادیر مختلف DOP را چنین می‌توان محاسبه کرد:

$$PDOP=\sqrt{\delta_{xx}+\delta_{yy}+\delta_{zz}},\ GDOP=\sqrt{\delta_{xx}+\delta_{yy}+\delta_{zz}+\delta_{tt}},\ TDOP=\delta_t$$

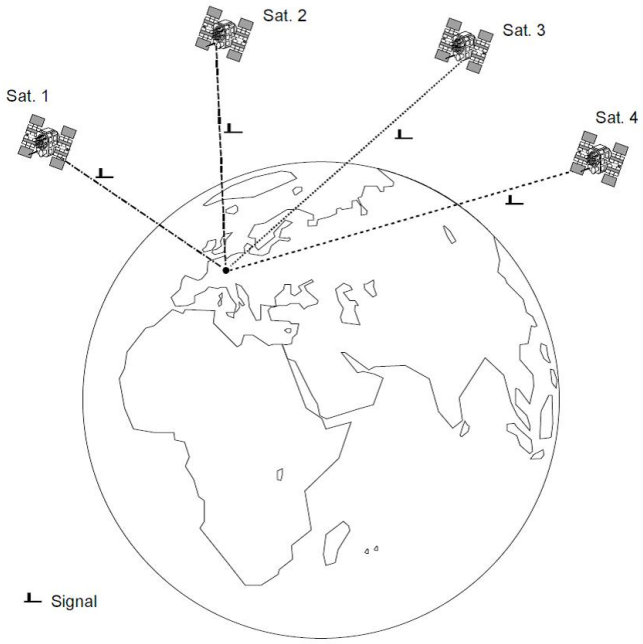
در مواردی که وضعیت ماهواره‌های در دید طوری نباشد که DOP سیستم از مقدار معینی کمتر شود می‌توان از شبه ماهواره‌ها کمك گرفت و با نصب آن‌ها در موقعیت مناسب، نتیجه را جبران کرد.

۲.۴. تأثیر و تصحیح خطای زمان. برای آنکه گیرنده GPS بتواند زمان دقیق عبور سیگنال از ماهواره‌ها را محاسبه کند همزمانی و سنکرون بودن ساعت آن و ساعت اتمی ماهواره‌ها امری لازم است. به‌عنوان مثال خطای زمانی ۱ میکرو ثانیه باعث خطای موقعیت در حد ۳۰۰ متر می‌شود! هر چند بین ساعت‌های اتمی ماهواره‌ها همزمانی وجود دارد اما به هر حال ناهمزمانی بین ساعت گیرنده و ساعت اتمی ماهواره‌ها همواره وجود دارد. به کمك ریاضیات هندسی، می‌توان این مشکل را حل نمود. به این طریق که پارامتر چهارمی به نام خطای ساعت گیرنده به سه پارامتر قبل (طول جغرافیایی، عرض جغرافیایی و ارتفاع) اضافه شود. به این ترتیب پارامترهای مجهول مساله عبارتند از:

- طول جغرافیایی: که به مولفه X دستگاه $ECEF$ مرتبط می‌شود.
- عرض جغرافیایی: که به مولفه Y دستگاه $ECEF$ مرتبط می‌شود.
- ارتفاع: که به مولفه Z دستگاه $ECEF$ مرتبط می‌شود.

[10] Dilution of precision

درنتیجه برای حل این چهار مجهول به چهار معادله نیاز است و این چهار معادله از طریق چهار ماهواره حاصل می‌شود و این دلیلی است که برای تعیین موقعیت سه‌بعدی به حداقل چهار ماهواره نیاز است. (شکل ۹)



شکل ۹: موقعیت‌یابی به کمك چهار ماهواره

۵. بیان وحل یك مسئله در GPS

در این قسمت به حل این مساله می‌پردازیم که فرض کنید شما روی یك قایق در دریا می‌باشید، هدف یافتن موقعیت گیرنده GPS است.

برای ساده کردن مساله، از مختصات سه بعدی xyz استفاده می‌کنیم که مبدأ آن مرکز زمین، جهت مثبت محور z به سمت قطب شمال و واحد اندازه‌گیری آن شعاع زمین می‌باشد. همچنین هر نقطه روی سطح دریا در معادله $x^2+y^2+z^2=1$ صدق می‌کند. واحد زمان یك هزارم ثانیه (10^{-3}) می‌باشد و ثابت سرعت نور c معادل ۰/۰۴۷ برحسب شعاع‌های زمین در هر میلی ثانیه می‌باشد. ($C\approx 0/047$)

گیرنده GPS روی قایق از ۴ ماهواره به طور همزمان موقعیت آنها را در مختصات xyz دریافت می‌کند و زمان سیگنال‌ها در یك هزارم ثانیه فرستاده شده است که اطلاعات داده شده در جدول زیر می‌باشد:

ماهواره	موقعیت در مختصات xyz	زمان سیگنال فرستاده شده
۱	$(1,2,0)$	۱۹/۹
۲	$(2,0,2)$	۲/۴
۳	$(1,1,1)$	۳۲/۶
۴	$(2,1,0)$	۱۹/۹

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2017.101224.1209

فرض کنید (x,y,z) موقعیت گیرنده GPS روی زمین باشد و t زمان دریافت سیگنال‌ها برای ماهواره اول، داریم $d = ۰/۰۴۷(t - ۱۹/۹)$ و با استفاده از فرمول مسافت در فضا داریم:

$$d = \sqrt{(x-۱)^۲ + (y-۲)^۲ + (z-۰)^۲} = (۰/۰۴۷)(t - ۱۹/۹)$$

بنابراین

$$(x-۱)^۲ + (y-۲)^۲ + (z-۰)^۲ = (۰/۰۴۷)^۲(t - ۱۹/۹)^۲$$

در این صورت

$$\begin{aligned} ۲x + ۴y + ۰z - ۲(۰/۰۴۷)^۲(۱۹/۹)t &= ۱^۲ + ۲^۲ - (۰/۰۴۷)^۲(۱۹/۹)^۲ + (x^۲ + y^۲ + z^۲) \\ &\quad -(۰/۰۴۷)^۲t^۲ \end{aligned} \tag{۱.۵}$$

همین روند را برای بقیه ماهواره‌ها انجام می‌دهیم و معادلات $(E_۲)$، $(E_۳)$ و $(E_۴)$ به‌دست می‌آوریم توجه کنید که هر چهار معادله عبارت $(۰/۰۴۷)^۲t^۲) - ((۱x^۲ + y^۲ + z^۲)$ را در قسمت راست خود دارند قرار دهید $L_۳ = E_۴ - E_۱$ و $L_۲ = E_۳ - E_۱$ و $L_۱ = E_۲ - E_۱$ در این صورت یك دستگاه معادلات خطی بدست می‌آید که شامل سه معادله و چهار مجهول x,y,z,t می‌باشد و t متغیر آزاد است بعد از حل دستگاه با قرار دادن x,y,z در (۱.۵)، t نیز بدست می‌آید.

در اینجا موقعیت گیرنده GPS برحسب مختصات xyz بدست آمده که باید به طول و عرض جغرافیایی تبدیل شود. در واقع باید (x,y,z) به مختصات بیضوی (ϕ,λ,h) تبدیل شود که ϕ: عرض جغرافیایی، λ: طول جغرافیایی و h: ارتفاع بیضوی می‌باشد طول جغرافیایی به طور ساده با استفاده از $\lambda = arctan(\frac{y}{x})$ به‌دست می‌آید.

اما برای به‌دست آوردن عرض جغرافیایی به مراحل تکراری زیر نیاز داریم:

$$\phi_۰ = arctan\left(\frac{z}{p(۱-e)}\right), v_۰ = \frac{a}{\sqrt{۱ - e\sin^۲(\phi_۰)}}$$

$$\phi_i = arctan\left(\frac{z + ev_{i-۱}\sin(\phi_{i-۱})}{p}\right), i = ۱,۲,۳,...$$

$$\theta_i = \frac{a}{\sqrt{۱ - e\sin^۲(\phi_i)}}, i = ۱,۲,۳,...$$

جایی‌که $p = \sqrt{x^۲ + y^۲}$، $e = \frac{a^۲ - b^۲}{a^۲}$، $a = ۶,۳۷۷,۳۹۶$ و $b = ۶,۳۵۶,۲۵۶,۱۰$ در واقع a فاصله مرکز زمین از خط استوا و b فاصله مرکز زمین تا قطب شمال می‌باشد و بنابراین مختصات از x,y,z برحسب متر تبدیل می‌کنیم که همه این محاسبات با استفاده از نرم‌افزارهای مطلب، میپل یا متمتیکا به راحتی انجام می‌شود.

۶. بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله ضمن ارائه کلیاتی از سیستم ناوبری GPS و اهمیت و نقص‌های استفاده از این سیستم، با اساس اندازه‌گیری و نحوه استخراج موقعیت در GPS آشنا شدیم. همچنین با تعریف معیار شبه فاصله، محاسبات موقعیت به تفصیل بیان شد. همچنین سعی شد به دور از ریاضیات پیچیده ناوبری و تبدیل دستگاه‌های مختصات، خوانندگان با اصطلاحات ناوبری، نحوه خطی‌سازی معادلات و چگونگی استفاده ریاضیات در سیستم‌های ناوبری GPS و مفهوم خطای موقعیت و زمان، آشنا شوند. بنابراین بعد از مطالعه و درک مطالب گفته شده خواننده با اصول اولیه GPS و چگونگی موقعیت‌یابی آشنا شده است و آمادگی کافی جهت پرداختن به مسائل پیشرفته تر در GPS را دارا می‌باشد.

مراجع

[۱] س. فاضل پور، ر. مجری و م. چگینی، *ایده افزایش دقت سیستم تعیین موقعیت با استفاده از شبه ماهواره‌ها در سطح زمین*، اولین کنفرانس ملی ایده های نو در مهندسی برق، اصفهان، ۱۳۹۱.

[۲] ا. ر. بازیار، م. معاضری، س. م. ر. میرکلایی و س. ز. غفاری، GPS مبتنی بر اندازه گیری شبه‌فاصله به منظور استفاده در سامانه‌های ناوبری دریایی، *ارائه روش جدید برای آشکارسازی ضریب*، شماره ۲، ۱۳۸۵.

[۳] ح. ارغوان، م. ک. اکبری، *سیستم ناوبری INS/GPS با $SLAM$ در محیط‌های ناشناس*، چهاردهمین کنفرانس مهندسی برق ایران، دانشگاه صنعتی امیرکبیر.

[4] B. Hofmann-Wellenhof, H. Lichtenegger and E. Wasle,*GNSS-Global Navigation Satellite Sysrems: GPS, GLONASS, Galileo, and more*, Springer, 2008.

[5] E. D. Kaplan and C. J. Hegarty, *Understanding GPS Principles and Applications*, Second Edition, 2006.

[6] A. El-Rabbany, *Introduction to GPS The Global Positioning System*, 2002.

[7] B. Duong and V. Nguyen, *Development of a GPS/INS integrated navigation system for model aircraft*, 14th International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS), (2014) 201–206.

[8] J. L. Awange and E. W. Graferend, Algebraic solution of GPS pseuds-Ranging Equations, *GPS solution*, **5** (2002) 20–32.

[9] R. B. Thomsob, Global Positioning System: The mathematics of GPS Recievers, *Math. Magszine*, **71** (1998) 260–269.

سید وحید قاسم‌زاده
فسا، دانشگاه فسا، گروه مهندسی برق
v.ghasemzade@yahoo.com

مهندس سید وحید قاسم زاده، عضو هیات علمی گروه مهندسی برق دانشگاه فسا، کارشناسی خود را در رشته مهندسی برق با گرایش کنترل، در سال ۱۳۸۳ از دانشگاه شیراز اخذ کردند و در سال ۱۳۸۷ موفق به گذراندن مقطع کارشناسی ارشد از دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی در رشته مهندسی برق (گرایش کنترل) شدند.

سلمان برومند
فسا، دانشگاه فسا، گروه مهندسی برق
boroumand@fasau.ac.ir

دکتر سلمان برومند، عضو هیات علمی گروه مهندسی برق دانشگاه فسا، کارشناسی خود را در رشته مهندسی برق با گرایش کنترل، در سال ۱۳۸۲ از دانشگاه علوم هوایی تهران اخذ کردند و در سال ۱۳۸۴ موفق به گذراندن مقطع کارشناسی ارشد از دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی در رشته مهندسی برق (گرایش کنترل) شدند. سپس ایشان در سال ۱۳۹۲ از دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی در مقطع دکترای مهندسی برق گرایش کنترل فارغ‌التحصیل شدند.

رقیه خسروی
فسا، دانشگاه فسا، گروه ریاضی
khosravi@fasau.ac.ir

دکتر رقیه خسروی، عضو هیات علمی گروه ریاضی دانشگاه فسا، کارشناسی خود را در رشته دبیری ریاضی، در سال ۱۳۸۱ از دانشگاه شیراز اخذ کردند و در سال ۱۳۸۳ موفق به گذراندن مقطع کارشناسی ارشد از دانشگاه شیراز در رشته ریاضی (گرایش جبر وتوپولوژی جبری) شدند. سپس ایشان در سال ۱۳۸۹ از دانشگاه شیراز در مقطع دکترای ریاضی گرایش جبر فارغ‌التحصیل شدند.

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2017.101224.1209