http://math-sci.iranjournals.ir

ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۶۴۹۳-۲۳۴۵، شاپا(الکترونیکی): ۶۵۰۷-۲۳۴۵
جلد ۳، شماره ۱ (۱۳۹۷)، صص. ۱۷-۹
© ۱۳۹۷ دانشگاه اصفهان
http://www.ui.ac.ir

نظریه گروه‌ها: سرگذشت و سرنوشت

سید محسن قریشی شهرکی

چکیده. در پی تلاش چندین هزار ساله بشر برای حل معادلات چندجمله‌ای مفهوم گروه در قرن نوزدهم میلادی شکل گرفت و بلافاصله مشاهده شد که گروه‌ها در دیگر شاخه‌ها از جمله نظریه اعداد، هندسه، معادلات دیفرانسیل، فیزیک و ... نیز حضور دارند. کشف کاربردهای گروه‌ها در علوم مختلف، روز به روز بر اهمیت مطالعه‌ی آنها افزود و رده‌بندی گروه‌های متناهی به یکی از اهداف بزرگ ریاضیدانان تبدیل شد. بالاخره در اوایل هزاره سوم رده‌بندی گروه‌های ساده متناهی تکمیل شد. اما این هدف چنان سایه‌ی سنگینی بر سر نظریه‌ی گروه‌ها در قرن بیستم انداخته بود که برخی تکمیل رده‌بندی را پایان کار این نظریه فرض کردند. این نوشته به طور مختصر اشاره‌ای دارد به نحوه شکل‌گیری نظریه گروه‌ها، قضیه‌ی رده‌بندی گروه‌های ساده متناهی و مسایل پیش روی گروه‌دانان پس از تکمیل رده‌بندی.

۱. جبر کلاسیک و شکل‌گیری مفهوم گروه

مهم‌ترین مساله‌ی جبر، تا اواخر قرن ۱۸ میلادی، حل معادلات چندجمله‌ای بوده است. یک معادله چندجمله‌ای از درجه‌ی n، معادله‌ای به‌صورت

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (1)$$

می‌باشد و منظور از حل جبری آن یا حل آن به‌وسیله‌ی رادیکال‌ها، بیان صریح ریشه‌هایش برحسب ضرایب a_i با استفاده از اعمال جمع، ضرب، تفریق، تقسیم معمولی و ریشه‌گیری است.

بابِلی‌ها، حدود ۱۶۰۰ سال قبل از میلاد مسیح قادر به حل هندسی معادلات درجه دوم بودند. محمدبن‌موسی خوارزمی (۷۸۰ تا ۸۵۰ م) به‌عنوان اولین شخصی شناخته شده است که روشی غیر هندسی و کلی برای حل معادلات درجه دوم و یافتن ریشه‌های مثبت آنها ارایه کرده است. حکیم عمر خیام (۱۰۴۸ تا ۱۱۲۲ م) برای نخستین بار معادلات درجه سوم را به طور سازمان‌یافته دسته بندی نمود و راه حل هندسی برای به‌دست آوردن ریشه‌های آنها ارایه کرد. روش جبری‌حل معادلات درجه سوم در سال ۱۵۴۰ م ارایه شد و تقریباً یک قرن زمان لازم بود تا معادلات درجه‌ی ۴ به کمک رادیکال‌ها حل شوند. در اواسط قرن ۱۸ میلادی مشخص شده بود که معادله‌ی (۱) را می‌توان به‌صورت

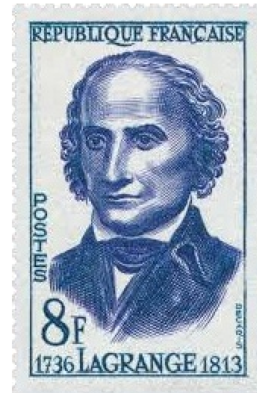
$$(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) = 0 \qquad (2)$$

عبارات و کلمات کلیدی. گروه‌های متناهی، گروه‌های ساده، رده‌بندی گروه‌ها.
دبیر تخصصی رابط: علیرضا عبدالهی
تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۳/۰۳ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۸/۰۵

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2017.104332.1226

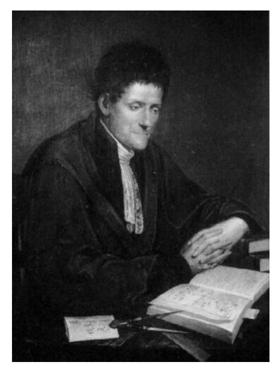
نوشت، جایی‌که $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ ریشه‌های حقیقی یا مختلط معادله‌ی (۱) می‌باشند. همچنین اهمیت جایگشت‌های ریشه‌های یک چند جمله‌ای روشن شده بود. معلوم شده بود که ضرایب یک چندجمله‌ای توابعی متقارن از ریشه‌های آن چند جمله‌ای می‌باشند (یعنی جایگشت روی ریشه‌ها تغییری در مقدار آن توابع ایجاد نمی‌کند). برای مثال به‌وضوح می‌دانیم که

$$a_۰ = (-۱)^n x_۱ x_۲ \cdots x_n, \quad a_{n-۱} = -(x_۱ + x_۲ + \cdots x_n).$$



در سال ۱۷۷۰ لاگرانژ حل معادلات با درجه‌ی بیشتر از ۴ را هدف خود قرار داد. وی به‌منظور کشف الگویی کلی به مطالعه دقیق جواب‌های معادلات درجه دو، سه و چهار پرداخت. او به این مطلب پی برد که شرط لازم برای آنکه یک معادله‌ی چندجمله‌ای به‌وسیله‌ی رادیکال‌ها حلپذیر باشد، وجود یک معادله‌ی کمکی است به‌طوری‌که ضرایب آن توابعی گویا بر حسب ضرایب معادله‌ی اصلی می‌باشند و درجه‌ی آن کمتر از درجه‌ی معادله‌ی اصلی است. هر چند وی موفق به‌حل معادلات چندجمله‌ای نشد، اما کار او برجسته بود، زیرا بین حل یک معادله و جایگشت‌های ریشه‌های آن معادله ارتباط برقرار نمود. او مشاهده کرد که اگر در یک تابع nـ‌متغیره $f(x_۱, \ldots, x_n)$، متغیرها در تمامی $n!$ طریق مختلف جابه‌جا شوند، تعداد چندجمله‌ای‌های مختلف بدست آمده همیشه شمارنده‌ی $n!$ است. به‌عنوان مثال اگر چندجمله‌ای $x - y + z$ را در نظر بگیریم و متغیرها را در همه ۶ حالت ممکن با هم جابه‌جا کنیم، تنها سه چندجمله‌ای مختلف $x - y + z$، $x - z + y$ و $y - x + z$ بدست می‌آید. (دقت کنید که ۳ مقسوم علیه ۶ است). لاگرانژ در نهایت حدس زد که در حالت کلی معادلات درجه‌ی پنج حل نمی‌شوند ولی توفیقی در اثبات آن نداشت [۷].

در این زمان کم‌کم تفکری جالب شکل می‌گیرد. فرض کنید شخصی بتواند مساله‌ای را در حالتی خاص حل کند اما برای حل مساله در حالت کلی، مشابه آنچه که برای حالت خاص به‌دست آورده است، دچار مشکل باشد. او به جای آنکه کورکورانه به دنبال راه حلی برای حالت کلی باشد، باید از خود بپرسد که اصلاً آیا چنین جوابی بدین‌صورت می‌تواند وجود داشته باشد. حتی می‌تواند تلاش کند تا نشان دهد راه حلی کلی مشابه با آن راه حل در حالت خاص نمی‌تواند وجود داشته باشد!



اولین کسی که ادعا کرد معادلات درجه‌ی ۵ را نمی‌توان به طور جبری حل کرد، رافینی[۱] (۱۷۶۵ تا ۱۸۲۲) بود. کار او بر مبنای کار لاگرانژ بود ولی یک گام فراتر از لاگرانژ برداشت و آن مطالعه‌ی خواص خود جایگشت‌ها بود. او بود که اولین بار به مفهوم گروه جایگشت‌ها پی برد: مجموعه‌ای از جایگشت‌ها روی تعداد متناهی حرف که تحت عمل ترکیب بسته باشد. رافینی در یک کتاب دو جلدی مشتمل بر ۵۱۶ صفحه، تمام گروه‌های جایگشتی روی پنج حرف را ارایه کرد و نشان داد که هیچ یک نمی‌تواند دارای ۳۰ یا ۴۰ عضو باشد. او بر اساس تحقیقاتش نتیجه گرفت که در حالت کلی معادله کمکی برای معادلات چندجمله‌ای از درجه‌ی ۵ وجود ندارد و به این ترتیب حل ناپذیری معادلات چندجمله‌ای از درجه‌ی بیشتر از ۴ را اثبات نمود [۲ و ۳]. اثبات طولانی رافینی که عاری از اشکال هم نبود به مذاق هم‌عصرانش خوش نیامد. زیرا آنها به دنبال حل معادلات بودند و این عجیب می‌نمود که کسی ادعا کند اصلاً راه حلی کلی وجود ندارد. رافینی در سال ۱۸۰۱ یک نسخه از کتابش را برای لاگرانژ فرستاد و از وی با فروتنی خواهش کرد که اگر اشتباهی در اثبات دارد، یا اگر چیزی که ادعا کرده جدید است، جدید نیست و یا اگر اصلا کتابش مفید نیست، به او اعلام کند. ولی پاسخی دریافت نکرد. سال بعد هم نامه‌ی دیگری فرستاد که همچنان بی‌جواب ماند. در سال‌های بعد او سعی کرد تا اثبات‌هایی ساده تر و دقیق‌تر ارایه کند، ولی آنها نیز تفاوت چندانی با اثبات اولیه نداشتند. از حق نگذریم چند ریاضیدان هم اثبات رافینی جدی گرفتند. یکی از آنها آباتی[۲]، دوست رافینی بود. او در سال ۱۸۰۲ اولین اثبات دقیق از این مطلب که مرتبه‌ی هر زیرگروه مرتبه‌ی گروه را می‌شمارد [آنچه که امروزه به قضیه‌ی لاگرانژ معروف است] را ارایه کرد و پیشنهاداتی به رافینی برای بهبود اثبات‌هایش

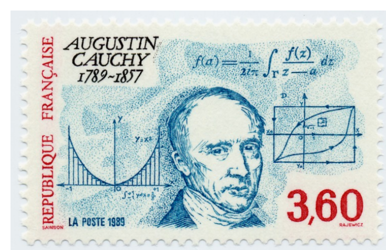
[1]Ruffini [2]Abatti

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2017.104332.1226

عرضه کرد. ریاضیدان دیگر، کوشی بود که در سال ۱۸۲۱ تلاش رافینی را ارزشمند دانست و تصدیق کرد که کار وی اثباتی برای حل ناپذیری معادلات چندجمله‌ای از درجه ۵ و بالاتر است [۱۱].

آبل در سال ۱۸۲۴ اولین اثبات قابل قبول از حل ناپذیری معادلات درجه ۵ را ارایه نمود. وی برای این منظور همان ایده‌های موجود در نظریه‌ی جایگشت‌ها را مورد استفاده قرار داد و سهمی اندک در توسعه نظریه‌ی گروه‌ها داشت. او در سال ۱۸۲۸ با توجه به راه حلی که گاوس در نظریه‌ی اعداد برای حل معادلات دایره‌بر $x^n - ۱ = ۰$ ارایه کرده بود، برنامه‌ای تحقیقاتی بر اساس دو موضوع مطرح ساخت: (۱) یافتن همه‌ی معادلات چندجمله‌ای که به‌وسیله‌ی رادیکال‌ها حل پذیرند و (۲) تصمیم‌گیری درباره‌ی اینکه آیا یک معادله‌ی چندجمله‌ای داده شده به‌وسیله‌ی رادیکال‌ها حل پذیر است یا نه. مرگ زود هنگام آبل در فقر کامل درست دو روز قبل از دریافت اطلاعیه‌ای که اعلان می‌کرد آبل به عنوان استاد دانشگاه برلین منصوب شده است، مانع از انجام این برنامه‌ی تحقیقاتی و دیگر برنامه‌هایی شد که او در سر داشت.

گالوا در سال ۱۸۳۰ تنها ۱۹ سال داشت. وی از نتایج پیشینان خود درباره‌ی حل معادلات درجه ۵ آگاه بود ولی آنها را آشفته و پریشان می‌دید. بینش او عمیق و فوق‌العاده بود. او به ارتباط بین میدان‌ها و گروه‌ها که امروزه نظریه گالوا نامیده می‌شود، پی برد و به عنوان یک کاربرد از آن برای حل معادلات چندجمله‌ای استفاده نمود. گالوا برای اولین بار از کلمه‌ی «گروه»[۳] برای نامگذاری مجموعه‌ای از جایگشت‌ها که تحت عمل ترکیب بسته باشد، استفاده کرد. او به این مطلب پی برد که بیشتر خواص یک معادله‌ی چندجمله‌ای در خواصی مشخص از گروهی به نام «گروه معادله» که به‌طور یکتا به آن معادله نظیر می‌گردد، منعکس می‌شود. او برای تشریح این خواص، مفهوم بنیادی زیرگروه نرمال را ابداع کرد و آن را به‌طور مؤثری به‌کار برد. در حالی که معادله کمکی، لاگرانژ، رافینی و آبل را درگیر خود ساخته بود، ایده اصلی گالوا عبور از آن بود. زیرا برای ساخت معادله‌ی کمکی مهارتی زیاد نیاز بود که آن هم بر روشی روشن استوار نبود. گالوا متوجه شد که وجود معادله کمکی متناظر با وجود زیرگروهی نرمال از اندیس اول در گروه آن معادله است. درحقیقت او شرطی لازم و کافی برای حل‌پذیری معادلات چندجمله‌ای از هر درجه‌ای که باشند، ارایه کرد. مفهوم گروه ساده از دست آوردهای گالواست. همچنین او نشان داد که کوچکترین گروه ساده ناآبلی[۴] دارای مرتبه ۶۰ است. او علاوه بر عمق مطالب ریاضی، کنج زندان را نیز در پی فعالیت‌هایی سیاسی درک نمود. در سال ۱۸۳۲، تحت تاثیر یک نارفیق دلداده‌ی یک هرزه‌ی خیابانی شد. در این ماجرا به یک دوئل احمقانه تن در داد و جان سپرد[۵].



کوشی نقشی عمده در توسعه نظریه‌ی گروه‌های جایگشتی داشته است. اولین مقاله او در این باره در سال ۱۸۱۵ منتشر شد که از جایگشت‌های ریشه‌های معادلات چندجمله‌ای انگیزه می‌گرفت و در مقایسه با کارهای بعدی او اهمیت چندانی نداشت. اما در سال ۱۸۴۴ اثری را منتشر می‌سازد که در آن نظریه گروه‌های جایگشتی را به عنوان موضوعی مستقل معرفی می‌نماید و در مقالاتی که در سال‌های ۱۸۴۵ تا ۱۸۴۶ می‌نویسد، این نظریه را گسترش می‌دهد. او مفاهیم توان‌های مثبت و منفی جایگشت‌ها، دور، ترانهش، حاصلضرب مستقیم گروه‌ها و ... را معرفی نموده است. به عنوان نمونه یکی از نتایج وی این است که اگر عدد اول p مرتبه یک گروه را بشمارد، آنگاه آن گروه زیرگروهی از مرتبه p دارد. این نتیجه امروزه به عنوان قضیه‌ی کوشی معرف است و گفته می‌شود که گالوا این مطلب را بدون اثبات در یادداشت‌هایش آورده است.

کار گالوا ناشناخته ماند تا آنکه در سال ۱۸۴۶ لیوویل[۶] مقالات وی را منتشر کرد. لیوویل ارتباط بین نظریه جایگشت‌های کوشی و نتایج گالوا را فهمید ولی در درک اهمیت کار گالوا در مفهوم گروه توفیقی نداشت.

[۴] آبل در سال ۱۸۲۹، به زبان امروزی، نشان داد که اگر گروه یک معادله‌ی چندجمله‌ای تعویض‌پذیر باشد، آنگاه آن معادله‌ی چندجمله‌ای به‌وسیله‌ی رادیکال‌ها حل‌پذیر است. بدین علت است که گروه‌های تعویض‌پذیر را آبلی و دیگر گروه‌ها را ناآبلی می‌خوانند.

[۵] مرگ گالوا راز و رمزها و داستان پردازی‌های زیادی دارد. در این نوشته خود را درگیر سرگذشت گالوا یا دیگران نمی‌کنیم، زیرا قرار بر این است که سرگذشت نظریه‌ی گروه‌ها را مرور کنیم نه سرگذشت ریاضیدانان را.

[3] groupe [6] Liouveille

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2017.104332.1226

تا سال ۱۹۵۴ نظریه گروه‌ها به عنوان نظریه جایگشت‌ها[7] شناخته می‌شد تا آنکه آرتور کیلی مفهوم گروه مجرد را معرفی نمود:

مجموعه‌ای متناهی از نمادهای $1, \alpha, \beta, \ldots$ که همگی متمایزند به همراه یک عمل ضرب به طوری که حاصلضرب هر دو تای آنها از هر مرتبه‌ای، یا حاصل ضرب هر عضو در خودش به همان مجموعه متعلق باشد و عمل ضرب نیز شرکت‌پذیر باشد، گروه نامیده می‌شود. وی سپس مثال‌هایی از قبیل گروه چهارگان‌ها با عمل جمع، گروه ماتریس‌های وارون‌پذیر تحت عمل ضرب، گروه جایگشت‌ها، گروه فرم‌های درجه دوم گاوس و گروه‌های حاصل از نظریه توابع بیضوی ارایه نمود. کیلی همچنین نشان داد که هرگروه مجرد با یک گروه جایگشتی یکریخت است، آنچه که امروزه به قضیه کیلی معروف است. وی جدول ضرب گروه‌های متناهی را معرفی کرد و ادعا نمود که هر گروه مجرد با جدول ضربش مشخص می‌شود [۴].

در کتاب‌های امروزی جبر، گروه مجموعه‌ای است مانند G به همراه عمل دوتایی $*$ که در شرایط زیر صدق کند.

(۱) عمل دوتایی $*$ شرکت‌پذیر است، یعنی به ازای هر سه عضو a, b, c از G،

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

(۲) عضو e متعلق به G موجود است به‌طوری‌که $e * x = x * e = x$، برای هر $x \in G$ (e عضو همانی عمل $*$ بر G نامیده می‌شود).

(۳) برای هر $a \in G$ عضو $a' \in G$ موجود باشد به‌طوری‌که $a' * a = a * a' = e$ (عضو a' وارون a نسبت به عمل $*$ بر G نامیده می‌شود).

دقت کنید، خاصیت بسته بودن که الحق خاصیت اصلی در تعریف گروه‌های جایگشتی بوده است، زیر سایه شرط عمل دوتایی در تعریف مجرد گروه پنهان شده است!

۲. سرچشمه‌های دیگر نظریه گروه‌ها

با آغاز روند مجردسازی مشاهده شد که نظریه گروه‌ها دیگر شاخه‌ها را نیز در بر می‌گیرد. گاوس در سال ۱۸۰۱ نظریه اعداد پیشینان خود را در کتابی تحت عنوان «تحقیقات حساب»[8] خلاصه و جمع‌آوری کرد. اثر او مسیرهای جدیدی را پیشنهاد نمود که ریاضیدانان را در سراسر آن قرن سرگرم ساخت. کتاب تحقیقات حساب وی را می‌توان سرآغاز نظریه گروه‌های آبلی به شمار آورد. در حقیقت گاوس بسیاری از خواص برجسته این گروه‌ها را بدون استفاده از واژگان تخصصی نظریه گروهی به‌دست آورد. گروه‌ها به چهار صورت مختلف در این کتاب ظاهر شده‌اند: گروه جمعی اعداد صحیح به پیمانه m، گروه ضربی اعداد صحیحی که نسبت به m اولند، به پیمانه‌ی m، گروه کلاس‌های هم‌ارزی فرم‌های درجه دوم دودویی و گروه ریشه‌های nاُم واحد. هر چند این مثال‌ها در متون نظریه اعداد نیز ظاهر شده بودند، ولی گاوس آنها را همچون گروه‌هایی آبلی مورد بحث قرار داد و نمونه‌های اولیه‌ی اثبات‌هایی در جبر مدرن را به کار برد. برای مثال، با در نظر گرفتن اعداد صحیح ناصفر به پیمانه‌ی عدد اول p، وی نشان داد که همگی توان‌هایی از یک عضو هستند. یعنی گروه $\mathbb{Z}_p^*$ حاصل از این اعداد صحیح، دوری است. او همچنین تعداد مولدهای این گروه را مشخص نمود و نشان داد که برابر با $\varphi(p-1)$ می‌باشد، جایی‌که φ تابع اویلر است. او مرتبه‌ی اعضای $\mathbb{Z}_p^*$ را تعریف نمود (بدون استفاده از این واژه) و نشان داد که مرتبه‌ی هر عضو شمارنده‌ی $p-1$ است. وی سپس این نتیجه را برای اثبات «قضیه‌ی کوچک فرما» به‌کار برد، یعنی $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$، هرگاه p عدد a را عاد نکند (پس ایده‌ای نظریه گروهی را برای اثبات نتایجی در نظریه اعداد به‌کار برد). همچنین نشان داد که اگر t یک مقسوم علیه $p-1$ باشد، آنگاه عضوی در $\mathbb{Z}_p^*$ موجود است که مرتبه‌ی آن t است (یعنی عکس قضیه لاگرانژ برای گروه‌های دوری

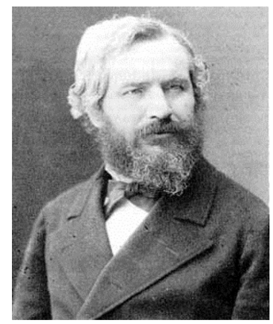
[7] Substitution Theory [8] Arithmetical Investigations

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2017.104332.1226

برقرار است). گاوس ریشه‌های nام واحد را، در ارتباط با معادلات دایره‌بر، در نظر گرفت و نشان داد که آنها هم، گروهی دوری را تشکیل می‌دهند. وی در ارتباط با این گروه سوالات بسیاری شبیه به آنچه که در مورد $\mathbb{Z}_p^*$ مطرح بود را طرح کرد و پاسخ گفت.

مساله‌ی نمایش اعداد صحیح با فرم‌های درجه دوم دودویی به فرما در اوایل قرن هفدهم بازمی‌گردد. قضیه‌ی فرما را به یاد آورید که هر عدد صحیح به فرم $4n+1$ را می‌توان به‌صورت مجموع دو مربع، x^2+y^2، نوشت. گاوس قسمت زیادی از کتاب تحقیقات خود را به مطالعه خسته کننده‌ی فرم‌های درجه دوم دودویی اختصاص داد. یک فرم درجه دوم دودویی عبارتی به‌صورت $ax^2+bxy+cy^2$، با اعداد صحیح a,b,c است. گاوس ترکیبی بر این فرم‌ها تعریف کرد و نشان داد که اگر K_1 و K_2 دو فرم درجه دو باشند آنگاه ترکیبشان را می‌توانیم با K_1+K_2 نشان دهیم. این ترکیب شرکت‌پذیر و جابه‌جایی است. عضو همانی موجود است و هر فرم دارای وارون است. بنابراین مجموعه همه فرم‌های درجه دوم دودویی تمام خواص یک گروه آبلی را داراست [۸، صص ۱۹۸–۱۹۷].

علی رغم همه‌ی این بینش‌ها، نمی‌توان گفت که گاوس تصوری کلی از گروه مجرد یا حتی گروه آبلی متناهی داشته است. زیرا وی تمام این ساختارها را به‌طور جداگانه مورد مطالعه قرار داده است و هیچ روش نظریه گروهی یکپارچه‌ای که برای همه‌ی حالات به‌کار برده شود، در کار وی وجود ندارد.



ژردان در سال ۱۸۷۰ رساله‌ای درباره‌ی جایگشت‌ها و معادلات جبری نوشت. هدف او از تدوین این اثر توسعه روش گالوا و مساعد ساختن آن به‌عنوان زمینه‌ای برای مطالعه بود، بدین وسیله که نشان دهد چگونه آن روش به‌سهولت می‌تواند مسایل اساسی نظریه‌ی معادلات جبری را مرتفع سازد. قصد او گردآوری زمینه‌هایی از ریاضی بود که در آن نظریه‌ی گروه‌های جایگشتی به‌کار برده شده بود یا به‌نظر قابل استفاده می‌رسید. او بیش از ۳۰ مقاله در سال‌های ۱۸۶۰ تا ۱۸۸۰ نوشت و مفاهیمی چون همریختی و یکریختی گروه‌ها، گروه‌های حلپذیر و سریهای ترکیبی و ... را معرفی نمود. وی قضیه‌ی ژردان ـ هولدر را برای جایگشت‌ها اثبات کرد. این قضیه را هولدر در ۱۸۸۹ برای گروه‌های مجرد اثبات کرد [۸، ص ۲۰۳].

کلاین در سال ۱۸۷۲ برای پذیرش در دانشگاه اِرلانگِن[۹] سخنرانی‌ای تحت عنوان «مروری قیاسی بر تحقیقات اخیر در هندسه» ارایه کرد. هدف آن سخنرانی ـ که برنامه ارلانگن نامیده شد ـ دسته‌بندی هندسه به عنوان مطالعه ناورداها تحت گروه‌های مختلفی از عملگرها بود. در آن گروه‌هایی چون گروه تصویری، گروه حرکات صلب، گروه تجانس‌ها، گروه هذلولوی، گروه‌های بیضوی و هندسه‌های وابسته به آنها حضور داشتند. قرن نوزدهم شاهد رشدی عظیم در هندسه بوده است، هم در گوناگونی مطالب و هم در عمق. در آن زمان هندسه‌هایی جدید ظاهر شدند: هندسه تصویری، هندسه نااقلیدسی، هندسه دیفرانسیل، هندسه جبری، هندسه nـبعدی و هندسه توسیعی گراسمان. همچنین روش‌های هندسی بر سر قدرت بیشتر مبارزه می‌کردند: روش سنتز در برابر روش آنالیزی و روش متریک در برابر روش تصویری. در اواسط قرن نوزده مسأله‌ای اساسی با نام رده‌بندی روابط و پیوندهای داخلی میان هندسه‌های مختلف و روش‌های هندسی مطرح شد. این مطلب منجر به‌مطالعه‌ی روابط هندسی با تمرکز بر مطالعه‌ی خواص شکل‌های پایا تحت تبدیلات شد. به سرعت تمرکز بر مطالعه‌ی خود تبدیلات معطوف گردید. بنابراین مطالعه‌ی روابط هندسی بین اشکال مختلف به مطالعه‌ی تبدیلات وابسته شد. استفاده کلاین از نظریه‌ی گروه‌ها، مرحله‌ی نهایی هماهنگ‌سازی هندسه بود.

[9] Erlangen

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2017.104332.1226

در سال ۱۸۷۴ لی نظریه‌ی کلی خود درباره‌ی گروه تبدیلات پیوسته ـ آنچه که امروزه گروه‌های لی نامیده می‌شوند ـ را معرفی نمود. لی خود را خلف آبل و گالوا می‌دانست تا آنچه که آنها در مورد معادلات جبری انجام دادند را برای معادلات دیفرانسیل انجام دهد. کار او از این مشاهده ناشی می‌شد که همه‌ی معادلات دیفرانسیلی که با روش‌های قدیمی انتگرال‌گیری شده بودند، تحت گروه‌هایی پیوسته که به سادگی ساخته می‌شوند، پایا می‌مانند. او در ادامه بر آن شد تا به‌طور عمومی معادلات دیفرانسیلی که تحت گروه‌های پیوسته مفروضی پایا می‌مانند را در نظر بگیرد و به جستجوی ساده سازی‌هایی در این معادلات بپردازد که از خواص گروهی مفروض نتیجه می‌شوند. هر چند لی موفقیتی در صورت‌بندی حقیقی «نظریه گالوا برای معادلات دیفرانسیل» به دست نیاورد، اما کار او در صورت‌بندی ثانویه‌ی چنین نظریه‌ای که توسط پیکارد[10] (۱۸۸۳–۱۸۸۷) و وِسیوت[11] (۱۸۹۲) صورت گرفت، اساسی بود [۸، ص ۲۰۰].

نظریه‌ی گروه‌ها با کتاب نظریه‌ی گروه‌های متناهی مرتبه‌ی برنساید در ۱۸۹۷ و نیز کتاب جبر دو جلدی وبر که در سال‌های ۱۸۹۶ و ۱۸۹۷ منتشر شدند، به عنوان نظریه‌ای اساسی در قرن بیستم مطرح شد.

۳. قضیه‌ی بزرگ: رده‌بندی گروه‌های ساده‌ی متناهی

مساله‌ی مهمی که در زمینه‌ی گروه‌های متناهی، توسط کیلی در دهه ۱۸۷۰ مطرح شد و مورد توجه ژردان و هولدر قرار گرفت، پیدا کردن همه گروه‌های متناهی از مرتبه‌ای مفروض بود. کم‌کم معلوم شد که این مساله بسیار سخت است. لذا توجه ریاضیدانان به حالت‌های خاص‌تری معطوف گردید. به عنوان مثال تحت تاثیر نظریه گالوا ابتدا یافتن گروه‌های ساده یا حلپذیر و در نهایت رده‌بندی گروه‌های ساده متناهی که آن را قضیه‌ی بزرگ می‌نامیم، هدف اصلی گروه‌دانان شد.

در فوریه ۱۹۸۱ گرنشتاین[12] اعلام کرد که «رده‌بندی گروه‌های ساده متناهی کامل شد». آنچه که تا کنون بدون شک یکی از غیرمعمولترین قضایایی است که ریاضیات محض به خود دیده است. رویدادی که باید یکی از نقاط برجسته ریاضیات مدرن در نظر گرفته می‌شد، نتوانست توجه عمومی را به خود جلب کند و حتی بسیاری درباره‌ی موضوع مشکوک بودند. دلیل این مطلب هم ماهیت مرموز و بحث برانگیز اثبات قضیه بود. اثباتی در بیش از ۱۰۰۰۰ صفحه، پراکنده در حدود ۵۰۰ مقاله، با بیشتر از ۱۰۰ مولف در سرتاسر دنیا و بی هیچ نمونه قبلی که بزرگترین نمونه در طول تاریخ است.

کم‌کم معلوم شد که شک و شبهه‌ها به‌درستی وارد بوده‌اند. مسایل و اثبات آنها پشت سر هم کشف شدند. بزرگترین آنها تا حل شود هفت سال اشباخر[13] و اسمیت[14] را مشغول کرد و دو کتاب را به خود اختصاص داد. اشباخر در سال ۲۰۰۴ نوشت: «با توجه به اطلاعات من، قضیه اصلی مقاله‌ی ما آخرین مشکل از اثبات قضیه‌ی بزرگ را مرتفع می‌سازد. بنابراین رده‌بندی گروه‌های ساده متناهی را می‌توان به‌عنوان قضیه در نظر گرفت».

در این هنگامه بدیع از ریاضیات معاصر، شگفت‌آور آن است که شاید هیچ کسی نباشد که بتوا ند تمام قضیه را به طور کامل درک کند. شخصی که دورنمایی کلی از قضیه داشت گرنشتاین بود که در ۱۹۹۲ درگذشت. گرنشتاین به عنوان سرپرست کارگروهی برای اثبات قضیه بزرگ عمل می‌کرد. او بود که در دنباله‌ای از سمینارها در سال ۱۹۷۲ در شیکاگو، ایده جسورانه رفع لایه‌های ناهمخوان تحقیقاتی که از دهه‌ی ۱۹۵۰ پدیدار شده بودند و تبدیل آنها به یک برنامه‌ی رده‌بندی منسجم را مطرح نمود.

اهمیت گروه‌های ساده. اهمیت گروه‌های ساده در قضیه‌ای که ژردان ـ هولدر نام دارد نمایان می‌شود. این قضیه می‌گوید، همان گونه که مولکول‌ها از اتم‌ها ساخته می‌شوند و همان طور که اعداد طبیعی از اعداد اول ساخته می‌شوند، همه‌ی گروه‌های متناهی هم از گروه‌های ساده ساخته می‌شوند. هنگامی که شما گروه‌های ساده متناهی را بشناسید، مطالب زیادی را درباره‌ی گروه‌های متناهی درک خواهید نمود.

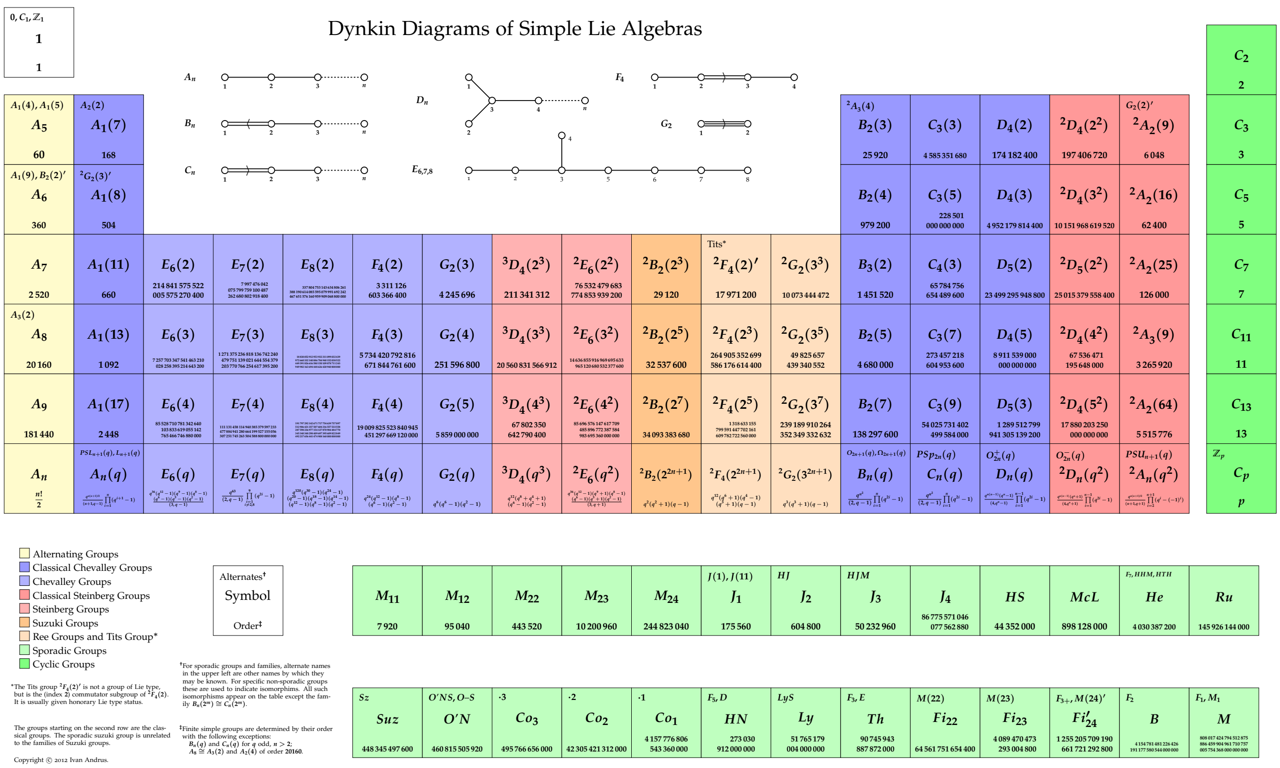
---

[10] Picard [11] Vessiot [12] Gorenstein [13] Aschbacher [14] Smith

رده‌بندی: همه چیز اما به طور ساده. رده‌بندی گروه‌های ساده متناهی، لیستی کامل از همه‌ی گروه‌های ساده را فراهم می‌آورد. اما این لیست نامتناهی است، زیرا تعدادی نامتناهی گروه ساده متناهی متمایز وجود دارد. ولی علی رغم تعداد نامتناهی‌شان، ریاضیدانان آنها را به خوبی شناخته‌اند. توصیف‌هایی دقیق از ۱۸ خانواده‌ی نامتناهی از گروه‌های ساده‌ی متناهی وجود دارد. تعاریف بسیار فنی و ظریف می‌باشند، اما اساسا از خانواده‌های گروه‌های خودریختی ساختارهای هندسی مشخصی به‌دست آمده‌اند. علاوه بر این ۱۸ خانواده، ۲۶ گروه منفرد نیز هستند که گروه‌های اسپورادیک (پراکنده) نامیده می‌شوند. بزرگترین این‌ها مانستر (هیولا) نام دارد که

$$۸۰۸,۰۱۷,۴۲۴,۷۹۴,۵۱۲,۸۷۵,۸۸۶,۴۵۹,۹۰۴,۹۶۱,۷۱۰,۷۵۷,۰۰۵,۷۵۴,۳۶۸,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰$$

عضو دارد. پس آنچه که از رده‌بندی گروه‌های ساده دریافتیم این است که هر گروه ساده متناهی یا به یکی از این ۱۸ خانواده تعلق دارد و یا یکی از ۲۶ گروه پراکنده است. ایوان اندروس به زیبایی و با ظرافت تمام گروه‌های ساده متناهی را در جدول زیر گرد آورده است [۱].



پس از رده بندی: حالا چه؟ وقتی که تکمیل رده‌بندی گروه‌های ساده متناهی اعلام شد، برخی سریعاً به‌این نتیجه رسیدند که نظریه‌ی گروه‌ها به انتهای کار خود رسیده است. اما امروزه همچنان بسیاری از ریاضیدانان در این شاخه کار می‌کنند. پس آنها چه می‌کنند؟ یکی از کارهایی که آنها انجام می‌دهند، ساده سازی اثبات است. هرچند صورت قضیه‌ی رده‌بندی برای بسیاری از حوزه های ریاضی مفید بوده است، اما اثبات طولانی و درک نشدنی آن، غیر قابل استفاده است. خطری واقعی وجود دارد و آن این است که تکنیک‌ها پیش از آنکه اثبات به یک صورت قابل فهم و دست یافتنی درآید، فراموش شوند. آنگاه به بیان گرنشتاین: «دنیای زنده ریاضیات رفته رفته به زوال می رود و در بین صفحات خاک خورده‌ی مجلات، فراموش شده و مدفون می‌گردد».

در حال حاضر چندین پروژه برای تحکیم و ساده سازی قسمت‌های مختلف اثبات در جریان است. شاید مهم‌ترین آنها برنامه‌ای باشد که توسط گرنشتاین و با همراهی لیونز و سُلومون شروع شده و هنوز در جریان است. هدف آن ارایه اثباتی مستقل، خلاصه و یکجا می‌باشد. این پروژه در یک دوره کتاب که توسط انجمن ریاضی آمریکا منتشر می‌شود در حال تکمیل است. انتظار می‌رود که کار مشتمل بر دوازده جلد و در ۳۰۰۰ تا ۴۰۰۰ صفحه جمع آوری گردد. تا سال ۲۰۰۶ شش جلد از آن منتشر شده است.

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2017.104332.1226

مساله مهم دیگر در نظریه گروه‌ها مساله‌ی توسیع است. اگر گروه‌های ساده متناهی شبیه اتم‌ها هستند، پس بسیار شایسته است متذکر شویم زمانی که برای اولین بار جدول تناوبی عناصر منتشر شد، علم شیمی تا تمام شدن بسیار فاصله داشت. حال هم‌ارزهای پیوندهای یونی و کووالانسی در گروه‌های متناهی چیست؟ چه محدودیت‌هایی بر ساختارهای ترکیبی که می‌توان ساخت وجود دارد؟ پاسخی کامل به‌این سوال رده‌بندی از همه گروه‌های متناهی را شامل خواهد شد. اما در حال حاضر این هدفی دست یافتنی و مناسب نیست. در حالت کلی این امر غیر قابل دسترسی خواهد بود. به هر حال حالت‌هایی متعدد از مساله‌ی توسیع توجه بسیاری از ریاضیدانان را به خود معطوف کرده است.

درباره‌ی گروه‌های متناهی به اندازه کافی گفتیم. درباره گروه‌های نامتناهی چه؟ آیا می‌توان کاری مشابه را در مورد گروه‌های نامتناهی انجام داد؟ شاید بدون کلیت گروه‌های نامتناهی در تنوع گیج کننده‌ای از فرم‌ها ظاهر می‌شوند. این امر بسیاری از ریاضیدانان را به یافتن زیررده‌هایی رام‌تر از گروه‌های نامتناهی هدایت کرده است که ممکن است این تحلیل‌ها را پذیرا باشند. جریان غالبی که این زمینه وجود دارد، بر تقلید از فنون توانایی که در رده‌بندی گروه‌های ساده‌ی متناهی به کار رفته‌اند، وابسته است [۶].

متن را با بیان یک مثال که اهمیت توجه به توسیع گروه‌ها را نشان می‌دهد، به پایان می‌رسانیم. بِش، اُبراین و آیک نشان دادند که ۴۲۲ ۳۶۵ ۴۸۷ ۴۹ گروه از مرتبه‌ی $۱۰۲۴ = ۲^{۱۰}$ وجود دارد و تعداد دیگر گروه‌ها که مرتبه‌ی آنها حداکثر ۲۰۰۰ است برابر است با ۴۲۳ ۱۶۴ ۰۶۲ ۱۰۲۴. یعنی از حدود ۵۰ میلیارد گروهی که مرتبه شان حداکثر ۲۰۰۰ است، بیش از ۹۹ درصدشان دارای مرتبه ۱۰۲۴ می‌باشند [۵]. بین همه‌ی گروه‌هایی که مرتبه‌ی آنها ۲^n است، تنها گروه دوری از مرتبه‌ی ۲ ساده است. به وضوح رده‌بندی گروه‌های ساده متناهی هرگز به تنهایی نمی‌تواند بیان کند چگونه می‌توان از یک گروه ساده دو عضوی حدود ۵۰ میلیارد گروه از مرتبه $۲^{۱۰}$ تولید کرد.

قدردانی

از جناب آقای دکتر عبدالهی سردبیر محترم نشریه ریاضی و جامعه به خاطر راهنمایی‌هایشان کمال تشکر و قدردانی را دارم.

منابع و مراجع

مرجع [۸] منبعی مناسب برای مطالعه تاریخ نظریه گروه‌ها است که در قسمت‌های اول و دوم این مقاله مورد استفاده واقع شده است. مرجع [۲] به طور خلاصه به‌چگونگی تفکر پیشگامان نظریه گروه‌ها می‌پردازد. قسمت سوم مقاله برگرفته از مرجع [۶] می‌باشد. برای آگاهی از وقایع تاریخی و زندگی‌نامه ریاضیدانان در دوره پیدایش نظریه گروه‌ها خواننده را به فصل‌های ۶ و ۷ از کتاب [۱۱] ارجاع می‌دهیم. عکس‌ها و تمبرهای ریاضیدانان از مرجع [۹] انتخاب شده‌اند.

[1] I. Andrus, Periodic Table of Finite Simple Groups, (2012), Available at: https://www.linkedin.com/pulse/periodic-table-finite-simple-groups-keith-raskin.

[2] G. Birkhoff, Galois and Group Theory, *Osiris*, **3** (1937) 260–268.

[3] J. E. Burns, The foundation period in the history of group theory, *Amer. Math. Monthly*, **20** (1913) 141–148.

[4] A. Cayley, On the theory of groups, as depending on the symbolic equation $\theta^n = 1$, *Phil. Mag.*, **7** (1854) 40–47, and in The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley, **2** Cambridge University Press, Cambridge, 1889 123–130.

[5] B. H. Ulrich, E. Bettina and E. A. O'Brien, A millennium project: constructing small groups, *Internat. J. Algebra Comput.*, **12** (2002) 623–644.

[6] R. Elwes, An enormous theorem: the classification of finite simple groups, Plus Magazine, Issue 41, 2006.

[7] J. L. Lagrange Réflexions sur la résolution algébrique des équations J.-A. Serret (Ed.), Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, années 1770 et 1771, Oeuvres de Lagrange, **3**, Gauthier-Villars, Paris (1770) 205-421.

[8] I. Kleiner, The evolution of group theory: a brief survey, *Math. Magazine*, **6** (1986) 195–215.

[9] J. Miller, Images of Mathematicians on Postage Stamps, 2007, http://jeff560.tripod.com/.

[10] R. Roth, A history of Lagrange's theorem on groups, *Math. Magazine*, **74** (2001) 99–108.

[11] I. Stewart, *Why Beauty Is Truth*, A History of Symmetry, Basic Books, New York, 2007.

سید محسن قریشی شهرکی
خوزستان، اهواز، دانشگاه شهید چمران اهواز، گروه ریاضی
m.ghoraishi@scu.ac.ir

سید محسن قریشی شهرکی متولد فرودین ماه سال ۱۳۵۹ در شهر اصفهان می‌باشد. وی دوره کارشناسی ریاضی محض را در سال‌های ۸۲-۱۳۷۸ در دانشگاه اصفهان گذراند. در سال ۱۳۸۲ وارد مقطع کارشناسی ارشد دانشگاه تهران شد و ۱۳۸۵ از رساله خود در زمینه طرح‌های ترکیبیاتی تحت راهنمایی دکتر غلامرضا خسروشاهی دفاع نمود. سال ۱۳۸۷ دوره دکتری در گرایش نظریه گروه‌ها را در دانشگاه اصفهان و تحت نظر دکتر علیرضا عبدالهی و دکتر علی اکبر محمدی حسن آبادی آغاز نمود و در سال ۱۳۹۱ از پایان نامه خود دفاع نمود. وی از سال ۱۳۹۲ تا کنون عضو هیات علمی دانشگاه شهید چمران اهواز است.

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2017.104332.1226