**Research in Production and Operations Management**
**University of Isfahan E-ISSN: 2981-0329**
Vol. 17, Issue 3, No. 46, 2026
**DOI: 10.22108/pom.2026.148184.1650**

**(Research paper)**

# Economic Production Quantity (EPQ) Model with Preventive Maintenance in a Three-Echelon Supply Chain with Defective Items

**Anahita Sarafrazi**
Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering, University of Kashan, Kashan, Iran,
anahita.sarafrazi82@gmail.com
**Hadi Mokhtari** *
Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering, University of Kashan, Kashan, Iran,
mokhtari_ie@kashanu.ac.ir

**Purpose:** This study develops an integrated analytical Economic Production Quantity (EPQ) model for a three-echelon supply chain comprising a manufacturer, a buyer of defective items, and a buyer of non-defective items. Production, inspection, and preventive maintenance decisions are coordinated simultaneously to minimize the total system cost. Unlike previous studies, the proposed framework jointly incorporates the reverse flow of repaired items, heterogeneous parallel machines, and both Type I and Type II inspection errors.

**Design/methodology/approach**: An analytical mathematical model is developed for a three-echelon supply chain in which the manufacturer operates heterogeneous parallel machines with different production rates, defective rates, inspection error rates, and setup costs. All produced items undergo 100% inspection, considering both Type I and Type II errors. Defective items are transferred to the repair echelon, while repairable items are recovered and returned to the consumption echelon. The objective function incorporates production, inventory holding, inspection, repair, disposal, and inspection error-related costs. The model is solved analytically using differentiation, and the convexity of the cost function is established. A sensitivity analysis is also conducted by varying key parameters within a range of ±50%.

**Findings:** The results yield an optimal cycle length of (T*=0.1901395) and a minimum total system cost of (TCU=154,267.73). Machines with higher production rates and better quality are allocated larger portions of the optimal production quantity. Preventive maintenance helps control the defective rate and reduce overall system costs. The sensitivity analysis indicates that increases in the defective rate and Type I inspection error lead to

* Corresponding author, 0000-0002-5297-5841 2981-0329 / © University of Isfahan
This is an open access article under the CC-BY-NC-ND 4.0 License (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/)
How to cite: Sarafrazi, A. and Mokhtari, H. (2026). Economic Production Quantity (EPQ) Model with Preventive Maintenance in a Three-Echelon Supply Chain with Defective Items. *Research in Production and Operations Management*, 17(3), 22 - 48. doi: 10.22108/pom.2026.148184.1650

higher total costs and shorter optimal cycle lengths. Moreover, the holding cost at the consumption echelon has the greatest impact on the optimal cycle length.

**Research implications**: The findings assist managers in determining production cycle lengths, allocating production among heterogeneous machines, planning preventive maintenance activities, and managing inspection errors. The current model assumes deterministic parameters and a single-product system and does not explicitly consider capacity constraints or random machine failures. Future research may therefore incorporate uncertainty, capacity limitations, multi-product systems, and stochastic machine failures.

**Originality/value:** The main contribution of this study is the development of an integrated three-echelon model that simultaneously incorporates the reverse flow of repaired items, heterogeneous parallel machines, preventive maintenance, and both Type I and Type II inspection errors. The comprehensive cost structure, convexity proof, and analytical derivation of the optimal cycle length provide a rigorous framework for integrated production and supply chain decision-making.

**Keywords:** Non-defective and Defective Items, Three-echelon Supply Chain; Economic Production Quantity (EPQ); Preventive maintenance; Type I and Type II inspection errors

پژوهش در مدیریت تولید و عملیات، دوره ۱۷، شماره ۳، پیاپی ۴۶، ۱۴۰۵
دریافت: ۱۴۰۴/۱۱/۲۷، بازنگری: ۱۴۰۵/۰۶/۰۴ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۷/۰۴ ص ۲۲-۴۸
DOI: 10.22108/pom.2026.148184.1650

(مقالهٔ پژوهشی)

# مدل مقدار اقتصادی تولید با در نظر گرفتن نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه در یک زنجیرهٔ تأمین سه‌سطحی با اقلام معیوب

آناهیتا سرافرازی[۱]؛ هادی مختاری*[۲]

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد گروه مهندسی صنایع دانشکده مهندسی دانشگاه کاشان کاشان ایران، anahita.sarafrazi82@gmail.com
۲- دانشیار گروه مهندسی صنایع دانشکده مهندسی دانشگاه کاشان کاشان ایران، mokhtari_ie@kashanu.ac.ir

**چکیده:** در سیستم‌های تولیدی واقعی، تصمیم‌گیری هم‌زمان دربارهٔ تولید، کنترل کیفیت و نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه در زنجیره‌های تأمین چند سطحی با اقلام معیوب، یکی از چالش‌های اساسی مدیریت عملیات است. بررسی پیشینه نشان می‌دهد که با وجود توسعهٔ گستردهٔ مدل‌های مقدار اقتصادی تولید، شکاف پژوهشی مهمی در مدل‌سازی یکپارچهٔ زنجیرهٔ تأمین سه‌سطحی وجود دارد؛ به‌گونه‌ای که بیشتر پژوهش‌ها تنها بخشی از واقعیت‌های صنعتی نظیر اقلام معیوب، خطاهای بازرسی یا نگهداری پیشگیرانه را به‌صورت جداگانه در نظر گرفته و از تحلیل هم‌زمان این عوامل در یک چارچوب تحلیلی جامع، غفلت کرده‌اند. نوآوری اصلی در این مقاله، در ارائهٔ یک مدل یکپارچهٔ EPQ برای زنجیرهٔ تأمین سه‌سطحی شامل تولیدکننده، خریدار اقلام معیوب و خریدار اقلام سالم است که به‌طور هم‌زمان تولید چندماشینه، بازرسی صددرصدی با خطاهای نوع اول و دوم، نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه و تفکیک اقلام معیوب به تعمیرپذیر و تعمیرناپذیر را لحاظ می‌کند. در مدل پیشنهادی، هزینه‌های تولید، نگهداری اقلام سالم و معیوب، بازرسی، تعمیر، امحا، توقف تولید ناشی از نت و جریمهٔ خطاهای بازرسی به صورت صریح در تابع هدف وارد شده‌اند. هدف مدل، حداقل‌سازی هزینهٔ کل سیستم ازطریق تعیین بهینهٔ طول چرخهٔ تولید، مقدار تولید هر ماشین و سطح موجودی در هر لایهٔ زنجیره است. مدل به‌صورت تحلیلی حل و مقدار بهینهٔ چرخهٔ تولید ازطریق مشتق‌گیری مستقیم از تابع هزینه استخراج شده است. دستاوردهای کلیدی این پژوهش نشان می دهد که ادغام هماهنگ سیاست های تولید، بازرسی و نگهداری پیشگیرانه، به کاهش معنادار هزینهٔ کل سیستم، بهبود تخصیص تولید بین ماشین ها و جلوگیری از انتقال نادرست اقلام معیوب در زنجیرهٔ تأمین منجر می‌شود. یک مثال عددی با داده‌های واقعی نیز، کارایی و قابلیت کاربرد مدل پیشنهادی را تأیید می‌کند.

**واژه های کلیدی:** اقلام سالم و معیوب، سیستم زنجیرهٔ تأمین سه‌سطحی، مدل مقدار اقتصاد تولید (**EPQ**)، نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه، خطای بازرسی نوع اول و دوم

* نویسنده مسئول، 0000-0002-5297-5841

2981-0329 / © University of Isfahan
This is an open access article under the CC-BY-NC-ND 4.0 License (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/)

استناد به این مقاله: سرافرازی، آناهیتا و مختاری، هادی . (۱۴۰۵). مدل مقدار اقتصادی تولید با درنظرگرفتن نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه در یک زنجیره تأمین سه سطحی با اقلام معیوب .*پژوهش در مدیریت تولید و عملیات* ۱۷(۳). ۲۲-۴۸ doi: 10.22108/pom.2026.148184.1650

## ۱- مقدمه

زنجیره‌های تأمین، چارچوبی کارآمد برای مدیریت پیچیدگی سیستم‌های تولید و موجودی در محیط‌های صنعتی واقعی‌اند که وجود هم‌زمان اقلام سالم و معیوب، فرایندهای بازرسی، تعمیر و امحا در آنها اجتناب‌ناپذیر است. این ساختارها در مدل های کلاسیک مدیریت تولید و موجودی، به ویژه مدل مقدار اقتصادی تولید[۱]، ریشه دارند که هدف اصلی آنها ایجاد تعادل میان هزینه های تولید، نگهداری موجودی و راه‌اندازی سیستم است. با این حال، مفروضات ساده کنندهٔ مدل های کلاسیک، مانند سالم‌بودن تمامی اقلام تولیدی و نادیده‌گرفتن اثر کیفیت و نگهداری تجهیزات، کاربرد آنها را در بسیاری از صنایع محدود کرده است. با افزایش پیچیدگی زنجیره‌های تأمین، پیشرفت فناوری‌های بازرسی و اهمیت فزایندهٔ نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه، نیاز به مدل‌های یکپارچه‌ای بیش از پیش احساس می‌شود که تصمیمات تولید، بازرسی و نگهداری را به‌صورت هم‌زمان لحاظ کنند. بررسی پیشینه نشان می‌دهد که اگرچه برخی پژوهش‌ها اقلام معیوب، بازرسی و نگهداری پیشگیرانه را به‌طور جداگانه بررسی کرده‌اند، شکاف پژوهشی درخور توجهی در ادغام هم‌زمان این عوامل در قالب یک زنجیرهٔ تأمین سه‌سطحی وجود دارد. شواهد صنعتی نیز اهمیت این موضوع را تأیید می‌کند و گزارش‌های منتشرشده در مجلات معتبر نشان می‌دهند که هزینه‌های ناشی از کیفیت ضعیف، شامل ضایعات، دوباره‌کاری و بازرسی‌های اضافی، در بسیاری از صنایع تولیدی بین ۲۰ تا ۴۰درصد از هزینه‌های عملیاتی کل را تشکیل می‌دهد. علاوه بر این، نبود سیاست‌های نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه به افزایش خرابی تجهیزات، رشد نرخ اقلام معیوب و توقف های ناخواسته تولید منجر می‌شود و هزینهٔ کل سیستم را به‌طور معناداری افزایش می‌دهد (Alsyouf, 2007). به‌طور کلی، مدل‌های تحلیلی موجود عمدتاً تولید، کیفیت و نگهداری را به‌صورت مجزا بررسی کرده‌اند و ادغام هم‌زمان این عوامل در یک زنجیرهٔ تأمین سه‌سطحی، همچنان با شکاف پژوهشی مواجه است.

## ۲- پیشینهٔ پژوهش

سلامه و جابر[۲] (۲۰۰۰) با گسترش مدل‌های کلاسیک EPQ/EOQ، تولید با کیفیت نامطلوب را همراه با غربالگری صددرصدی و فروش اقلام معیوب را به‌صورت یک دسته با قیمت تخفیفی در نظر گرفتند. مانسون و روزنبلات[۳] (۲۰۰۱) بر هماهنگی تصمیمات خرید و تولید با هدف تعیین اندازهٔ بهینهٔ سفارش‌ها تحت تخفیف‌های حجمی تمرکز کردند. یو و همکاران[۴] (۲۰۰۹) نشان دادند که علاوه بر تولید، ممکن است فرایندهای بازرسی نیز ناقص باشند و مدل EPQ با کیفیت تولید و بازرسی ناقص را ارائه دادند. کرنج و تان[۵] (۲۰۱۱) مدل تولیدی با نرخ محدود و اقلام معیوب شامل ضایعات و اقلام باکیفیت ناقص را تحت سیاست اعتبار تجاری دوسطحی بررسی کردند. جابر و همکاران[۶] (۲۰۱۴) سیاست تولید–موجودی را برای تولیدکننده‌ای در زنجیرهٔ تأمین غیر رهبر تحلیل کردند که در آن ادامهٔ تولید با وجود بروز نقص و پذیرش هزینهٔ بازسازی به عنوان تصمیم بهینه در نظر گرفته می‌شود. ژو و همکاران[۷] (۲۰۱۵) مدل‌هایEPQ را برای تصمیمات ساخت یا خرید تحت تخفیف‌های یک‌باره توسعه دادند که در آن اقلام معیوب پس از غربالگری کامل، به‌صورت یک دسته امحا می‌شوند. مختاری و رضوان[۸] (۲۰۲۰) مدل EPQ چندمحصوله و چند خریدار را در چارچوب سیاست موجودی مدیریت‌شده از سوی فروشنده ارائه کردند. کومار و ماهاتا[۹] (۲۰۱۹) شبکهٔ زنجیرهٔ تأمین سه‌سطحی را تحت عدم‌قطعیت کیفیت مواد اولیه و

یادگیری در تصمیم‌گیری فازی بررسی کردند؛ به‌گونه‌ای که کشف نقص در یک دسته به رد کامل آن منجر می‌شود. درنهایت، مختاری و همکاران[۱۰] (۲۰۲۱) مدل‌های تولید–موجودی را با تولید معیوب توسعه دادند که در آن بخشی از اقلام ناقص قابلیت دوباره‌کاری دارند و پس از اصلاح، به چرخهٔ مصرف بازمی‌گردند.

سنا[۱۱] (۲۰۱۱) یک مدل یکپارچهٔ تولید–موجودی را در یک زنجیرهٔ تأمین سه‌سطحی با اقلام سالم و معیوب ارائه داد. وانگ و همکاران[۱۲] (۲۰۱۱) سیاست‌های بهینل موجودی را برای محصولات با نرخ خرابی وابسته به زمان در چارچوب زنجیرهٔ تأمین سه‌سطحی و اتحادهای استراتژیک توسعه دادند. الدیهانی و درویش[۱۳] (۲۰۱۵) زنجیره‌ای با فرایند تولید ناقص را بررسی کردند که در آن نگهداری و تعمیرات پیشگیرانهٔ دوره‌ای، سیستم را به وضعیت عملیاتی مطلوب بازمی‌گرداند. لیااو[۱۴] (۲۰۱۵) یک مدل EPQ یکپارچه را با در نظر گرفتن برنامه‌های تولید، نگهداری، بازرسی و گارانتی تعمیر رایگان برای فرایندهای ناپایدار ارائه و مدت‌زمان بهینهٔ تولید را با هدف حداقل‌سازی هزینهٔ کل تعیین کرد. مختاری و اسدخانی[۱۵] (۲۰۲۰) مدل کلاسیک EPQ را با لحاظ نگهداری و تعمیرات پیشگیرانهٔ دوره‌ای در محیط تولید معیوب توسعه دادند و ساختار زیرچرخه‌های تولید را بهینه‌سازی کردند. اسدخانی و همکاران[۱۶] (۲۰۲۲) سیاست‌های مدیریت موجودی در زنجیرهٔ فروشنده–خریدار را با دسته‌بندی اقلام معیوب به بازیافتی، تعمیرپذیر، اسقاطی و ردشده تحلیل کردند. درنهایت، دینگ و همکاران[۱۷] (۲۰۲۳) مدلی را برای تعیین مقدار بهینهٔ تولید با تفکیک اقلام معیوب به بازسازی‌پذیر و بازسازی‌ناپذیر ارائه دادند که در آن اقلام تعمیرپذیر به چرخهٔ تولید بازمی‌گردند و باقی اقلام به‌عنوان ضایعات حذف می‌شوند.

جابر و گویال[۱۸] (۲۰۰۸) هماهنگی کمیت‌های سفارش را در یک زنجیرهٔ تأمین سه‌سطحی با تصمیم‌گیری متمرکز بررسی کردند. دینگ و چن[۱۹] (۲۰۰۸) مسئلهٔ هماهنگی در زنجیره‌های سه‌سطحی با محصولات دارای چرخهٔ عمر کوتاه را با طراحی سیاست‌های بازگشت و قیمت‌گذاری انعطاف‌پذیر تحلیل کردند. هیونگ و هیونگ[۲۰] (۲۰۱۰) نشان دادند که ساختار رهبری و هماهنگی قیمت، نقش تعیین‌کننده‌ای در سودآوری زنجیرهٔ تأمین سه‌سطحی دارد. چن[۲۱] (۲۰۱۱) کنترل موجودی در یک سیستم تولید سه‌سطحی با تقاضای نامطمئن را تحت توزیع نرمال مدل‌سازی کرد. جابر و همکاران (۲۰۱۴) سیاست موجودی فروشنده–خریدار را با لحاظ خطاهای بازرسی کیفیت و یادگیری تولید، توسعه دادند. طالعی‌زاده و نوری دریان[۲۲] (۲۰۱۶) زنجیرهٔ تأمین سه‌سطحی غیرمتمرکز را با استفاده از تعادل استکلبرگ–نش[۲۳] هماهنگ کردند. درنهایت، بادی و همکاران[۲۴] (۲۰۲۴) یک رویکرد یکپارچه و سه‌مرحله‌ای را برای بهینه‌سازی سیستم توزیع سه‌سطحی با هدف کاهش هم‌زمان هزینه‌های حمل‌ونقل و موجودی، ارائه دادند.

گلاک و جابر[۲۵] (۲۰۱۳) مدلی را با بازرسی صددرصدی اقلام معیوب و فروش آنها به‌صورت یک دسته با قیمت تخفیفی ارائه کردند که در آن امکان تأمین جایگزین از منبع محلی یا بازسازی ازطریق مراکز تعمیر شخص ثالث در نظر گرفته شده است. بازان و همکاران[۲۶] (۲۰۱۴)، سیستم‌های موجودی مدیریت‌شده از سوی فروشنده را با تمرکز بر مالکیت موجودی و تصمیمات مربوط به دوباره‌کاری اقلام معیوب بررسی کردند. پال و همکاران[۲۷] (۲۰۱۶) مدل یکپارچهٔ زنجیرهٔ تأمین سه‌سطحی را برای اقلام با تقاضای تصادفی و کیفیت ناقص توسعه دادند که در آن اقلام معیوب پس از بازرسی کامل بازکاری می‌شود و خرده‌فروش تنها اقلام سالم دریافت می‌کند. آلفارس و آتیا[۲۸] (۲۰۱۷) تعامل کنترل کیفیت و کنترل موجودی را با در نظر گرفتن خطاهای بازرسی در سیستم‌های موجودی مدیریت‌شده از سوی تأمین‌کننده تحلیل کردند. السلامه[۲۹] (۲۰۱۸) سیستم تولید–موجودی با اقلام ناقص، خرابی

ماشین و کمبودهای احتمالی را بررسی کرد و برای حل مدل پیچیده، یک الگوریتم فراابتکاری را پیشنهاد داد. کاردناس بارون و همکاران[۳۰] (۲۰۲۱) مدل EOQ را برای اقلام سالم و معیوب با ارسال اقلام نامناسب به کارگاه تعمیر و بازگشت آنها به موجودی توسعه دادند. حاجی و رضایی زینالی[۳۱] (۲۰۲۲) زنجیرهٔ تأمین دوسطحی را با بازگشت اقلام معیوب، پس از بازرسی کامل و لحاظ خطاهای نوع اول و دوم تحلیل کردند. اسدخانی و همکاران (۲۰۲۲) مدل‌های EOQ را برای انواع مختلف اقلام ناقص، با بازرسی کامل و یادگیری در خطاهای بازرسی توسعه دادند. سبت‌جانی و آدتونجی[۳۲] (۲۰۲۴) زنجیرهٔ تأمین چهارمرحله‌ای صنایع غذایی را با عدم‌قطعیت کیفیت و خطاهای بازرسی مدل‌سازی کردند. نوبیل و همکاران[۳۳] (۲۰۲۴) سیستم‌های تولید–موجودی با بازرسی سخت را تحت سناریوهای مختلف دورریز، بازسازی و کسری بررسی کردند. سبت‌جانی (۲۰۲۴) مدل تولید پایدار در زنجیرهٔ تأمین سه‌سطحی محصولات فاسدشدنی را با لحاظ اقتصاد چرخشی و مقررات کربنی توسعه داد. نمنبات و همکاران[۳۴] (۲۰۲۵) مدل‌های EOQ/EPQ واقع‌گرایانه‌ای را ارائه کردند که در آن موفق‌نشدن تعمیر، تلفات در فرایند بازسازی و خطاهای بازرسی لحاظ شده است. درنهایت نوبیل و همکاران (۲۰۲۵)، بهینه‌سازی EPQ را تحت نرخ‌های متغیر بازرسی و سطوح متفاوت کفایت بازرسی، بررسی کردند.

### ۲-۱- مقایسهٔ پژوهش‌های پیشین با مدل پیشنهادی

بررسی پیشینه نشان می‌دهد که اگرچه مطالعات گذشته موضوعاتی مانند مدل‌های EPQ، مدیریت موجودی چندسطحی، اقلام معیوب، خطای بازرسی و نگهداری پیشگیرانه را به‌طور جزئی بررسی کرده‌اند، ترکیب یکپارچه این عناصر در قالب یک مدل تحلیلی چندماشینه با رویکرد هم‌زمان امحا و تعمیر به‌صورت تحلیلی تاکنون انجام نشده است. جدول (۱)، ویژگی‌های اصلی پیشینهٔ تحقیق را در بستر زنجیرهٔ تأمین نمایش می‌دهد.

**جدول ۱- مرور پیشینهٔ تحقیق در بستر زنجیرهٔ تأمین**

**Table 1- Research literature review in supply chain**

| مقاله | مدل موجودی | | خطای بازرسی | نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه | چند ماشین تولیدی | اقلام معیوب | سیاست برخورد با اقلام معیوب | | | رویکرد حل | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | EOQ | EPQ | | | | | امحا | تعمیر | دقیق | ابتکاری |
| مانسون و رزونبلات (۲۰۰۱) | | □ | | | | | | | | | □ |
| جابر و همکاران (۲۰۰۸) | | | □ | | | | | | □ | | |
| سنا (۲۰۱۱) | | □ | | □ | | □ | | □ | | | □ |
| پال و همکاران (۲۰۱۶) | | □ | | | | □ | | □ | | | □ |
| کومار و ماهاتا (۲۰۱۹) | | □ | | | | □ | | | | | □ |
| سبت‌جانی (۲۰۲۴) | | □ | | | | □ | □ | | | | □ |
| **مدل پیشنهادی** | | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | | |

### ۲-۲-تحلیل انتقادی پیشینهٔ پژوهش و شکاف‌های پژوهشی

مرور نظام‌مند پیشینه نشان می‌دهد که پژوهش‌های پیشین با وجود تنوع درخور توجه، به‌دلیل تقلیل‌گرایی در مواجهه با پیچیدگی‌های صنعتی، دچار سه شکاف اساسی در سطوح ساختاری، عملیاتی و کیفی-بازرسی‌اند که تاکنون در هیچ مدل یکپارچه‌ای به‌صورت هم‌زمان پوشش داده نشده است.

اگرچه پژوهشگرانی مانند سنا (۲۰۱۱) و پال و همکاران (۲۰۱۶) زنجیره‌های سه‌سطحی را مدل‌سازی کرده‌اند، تمام این مدل‌ها تنها بر یک جریان خطی و یک‌طرفه از تولیدکننده به مصرف‌کننده متمرکز بوده‌اند. درواقع هیچ‌یک از آنها، جریان معکوس اقلام معیوب را به‌صورت یک حلقهٔ بازخوردی پویا بین لایه‌های تولید، تعمیر و مصرف طراحی نکرده‌اند؛ در حالی که در اقتصاد چرخشی و سیستم‌های تولید پایدار، بازگشت اقلام بازیابی‌پذیر به چرخهٔ مصرف، یک ضرورت عملیاتی و زیست‌محیطی انکارناپذیر است. این شکاف ساختاری، اولین نقطهٔ تمایز مدل حاضر محسوب می‌شود.

تقریباً تمام مدل‌های EPQ مرورشده (از جمله Sana, 2011; Ding et al., 2023; Liao, 2015) براساس فرض تک‌ماشینه یا چند ماشین کاملاً یکسان توسعه یافته‌اند؛ در حالی که در محیط‌های صنعتی واقعی، ماشین‌های موازی دارای نرخ‌های تولید، درصد اقلام معیوب، خطاهای بازرسی و هزینه‌های راه‌اندازی متفاوتی‌اند. نادیده‌گرفتن این ناهمگونی، به تخصیص غیر بهینهٔ تولید منجر می‌شود و هزینه‌های پنهانی را به سیستم تحمیل می‌کند. مدل پیشنهادی با معرفی پارامترهای مستقل $P_i$، $\theta_i$، $\alpha_i$ و $\beta_i$ برای هر ماشین و تخصیص بهینهٔ تقاضا $(D_i)$، این شکاف عملیاتی را برای اولین بار در یک چارچوب تحلیلی پوشش می‌دهد.

در حالی که پژوهشگرانی مانند جابر و همکاران (۲۰۱۴) و یو و همکاران (۲۰۰۹)، خطای نوع دوم (عبور اقلام معیوب از سیستم بازرسی) را بررسی کرده‌اند، خطای نوع اول (تشخیص اشتباه اقلام سالم به‌عنوان معیوب) در بیشتر مدل‌های پیشین نادیده گرفته شده است. این خطا علاوه بر تحمیل هزینه‌های نگهداری و تعمیر غیرضروری، گلوگاه جدی در لایهٔ تعمیر ایجاد می‌کند؛ به‌گونه‌ای که تحلیل حساسیت مدل حاضر نشان می‌دهد سهم ورودی ناشی از خطای نوع اول برای برخی ماشین‌ها، تا ۳۳٪ از کل ورودی لایهٔ تعمیر است. مدل پیشنهادی با واردکردن هم‌زمان هر دو نوع خطا و ساختار هزینه‌ای مجزا برای آنها، این شکاف کیفی را پوشش می‌دهد.

علاوه بر سه شکاف فوق، یک تمایز روش‌شناختی نیز مدل حاضر را از پژوهش‌های پیشین متمایز می‌کند: در حالی که بسیاری از مطالعات (Salameh & Jaber, 2000; Sebatjane, 2024) به‌دلیل پیچیدگی مدل، به الگوریتم‌های ابتکاری یا فراابتکاری متکی بوده‌اند، مدل پیشنهادی با بهره‌گیری از روابط ریاضی مشتق‌پذیر و اثبات تحدب تابع هزینه، مقادیر بهینه را به‌صورت تحلیلی و دقیق استخراج و امکان تحلیل حساسیت شفاف و تفسیر مدیریتی عمیق‌تر را فراهم می‌کند.

## ۳- مدل‌سازی مسئله

### ۳-۱- تعریف مسئله

مدل EPQ در یک زنجیرهٔ تأمین سه‌سطحی شامل یک تولیدکننده و دو خریدار (اقلام سالم و معیوب) بررسی می‌شود. تولیدکننده محصولی را با چند ماشین موازی تولید می‌کند و نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه (نت) بر هر ماشین، به‌صورت متوالی انجام می‌شود؛ سپس در حین نت، تولید ماشین مربوطه متوقف می‌شود و تولید ماشین‌های دیگر ادامه می‌یابد. پس از تولید، بازرسی ۱۰۰درصد بر اقلام انجام و اقلام سالم به خریدار لایهٔ سوم و اقلام معیوب به خریدار لایهٔ دوم ارسال می‌شود. با وجود بازرسی کامل، خطای نوع اول (اقلام سالم از روی اشتباه معیوب محسوب می‌شوند) و خطای نوع دوم (اقلام معیوبی که از روی اشتباه سالم محسوب می‌شوند) رخ می‌دهد که هزینه‌هایی برای لایهٔ اول ایجاد می‌کنند.

### ۳-۲- تعریف نمادها و مدل‌سازی

در این بخش، نمادها و تعاریف مربوط به مسئله معرفی می‌شوند و براساس نمادها و مفروضات، مدل فرموله و با استفاده از روش‌های تحلیلی مبتنی بر مشتق، سیاست بهینه محاسبه خواهد شد.

**اندیس‌ها**

$i$: اندیس ماشین‌ها در لایهٔ تولیدکننده $i = ۱,۲,۳, \dots, I$

**پارامترهای ورودی**

$D_i$: نرخ تقاضا (کالا / زمان) ماشین $i$_ام

$P_i$: نرخ تولید (کالا / زمان) ماشین $i$_ام

$\theta_i$: درصد اقلام معیوب ماشین $i$_ام

$\alpha_i$: خطای بازرسی نوع اول ماشین $i$_ام

$\beta_i$: خطای بازرسی نوع دوم ماشین $i$_ام

$tp_i$: زیرچرخهٔ تولید (زمان) ماشین $i$_ام

$tm$: زیرچرخهٔ نگهداری و تعمیرات (زمان)

M: تعداد دوره‌های موجود برای صدور درخواست تولید

$x$: سرعت بازرسی (واحد کالا به واحد زمان)

D: نرخ تقاضای کل سیستم، به‌صورت $D = \sum_{i=1}^{I} D_i$

$\lambda$ : درصد اقلام معیوب تعمیرپذیر

$\lambda'$ : درصد اقلام امحاشده

**هزینه‌ها**

$U$: هزینهٔ جریمهٔ خطای بازرسی نوع دوم لایهٔ اول

$r$: هزینهٔ تعمیر (هزینه/کالا)

$G$: هزینهٔ امحا (هزینه/کالا)

$C_1$: هزینهٔ خرید (هزینه/کالا) لایهٔ اول

$C_2$: هزینهٔ خرید (هزینه/کالا) لایهٔ دوم

$C_3$: هزینهٔ خرید (هزینه/کالا) لایهٔ سوم

$A_1$: هزینهٔ راه‌اندازی لایهٔ اول

$A_2$: هزینهٔ سفارش‌دهی (هزینه/ مقدار سفارش) لایهٔ دوم

$A_3$: هزینهٔ سفارش‌دهی (هزینه/ مقدار سفارش) لایهٔ سوم

$h_1$: هزینهٔ نگهداری اقلام سالم (هزینه/کالا/زمان) لایهٔ اول

$h_2$: هزینهٔ نگهداری (هزینه/ کالا/ زمان) لایهٔ دوم

$h_3$: هزینهٔ نگهداری (هزینه/ کالا/ زمان) لایهٔ سوم

$h'$: هزینهٔ نگهداری اقلام معیوب تا انتهای سیکل (هزینه/کالا/زمان)

$O_1$: هزینهٔ بازرسی (هزینه/ کالا) لایهٔ اول

$O_2$: هزینهٔ بازرسی (هزینه/ کالا) لایهٔ دوم

**متغیرهای تصمیم**

**متغیرهای مستقل**

$T$: طول هر چرخهٔ تولید (زمان)

**متغیرهای وابسته**

$Q_i$: مقدار اقتصادی تولید موجودی (سفارش/ تولید) ماشین $i$_ام

$$Q_i = \frac{TD_i}{1-\theta_i} \quad (۱)$$

$q_i$: مقدار تولید در هر زیرچرخه برای ماشین $i$ام (کالا)

$$q_i = P_i tp_i \quad (۲)$$

$n_i$ : تعداد دفعات تولید ماشین $i$ در هر چرخه (عدد صحیح)

$$n_i = \frac{Q_i}{q_i} = \frac{TD_i}{P_i tp_i(1-\theta_i)} \quad (۳)$$

$Tp_i$: طول زیرچرخهٔ تولید ماشین i_ام (زمان)

$$Tp_i = n_i(t_m + tp_i) = \frac{TD_i}{P_i tp_i(1-\theta_i)}(t_m + tp_i) \quad (۴)$$

$TD_i$: طول زیرچرخهٔ پاسخ به تقاضای ماشین i_ام (زمان)

$$T_{Di} = T - Tp_i = T - \frac{TD_i}{P_i tp_i(1-\theta_i)}(t_m + tp_i) \quad (۵)$$

$t_{1i}$ : زمان بازرسی محصولات ماشین i_ام (زمان)

$$t_{1i} = \frac{Q_i}{x} = \frac{TD_i}{x(1-\theta_i)} \quad (۶)$$

$t_{2i}$: زمان چرخهٔ تعمیر ماشین i_ام (زمان)

$$t_{2i} = T_{Di} - t_{1i} = T - Tp_i \quad (۷)$$
$$-t_{1i} = T - \frac{TD_i}{P_i tp_i(1-\theta_i)}(t_m + tp_i) - \frac{TD_i}{x(1-\theta_i)}$$

رابطهٔ (۸) به‌ترتیب نرخ تقاضای کل سیستم و نرخ تولید کل را در لایهٔ تولیدکننده تعریف می‌کنند. با توجه به اینکه سیستم شامل ماشین موازی است و هر ماشین به‌صورت مستقل بخشی از تقاضا را پوشش می‌دهد، نرخ تقاضای کل برابر با جمع نرخ‌های تقاضای تخصیص‌یافته به هر ماشین است.

$$D = \sum_{i=1}^{I} D_i \quad (۸)$$

### ۳-۳- نمودارهای سه لایه

در این بخش، نمودارهای موجودی خالص سه لایه از زنجیرهٔ تأمینِ در نظر گرفته شده، ارائه و توصیف می‌شوند. نمودارها بر مبنای مفروضات و نوآوری توصیف‌شده در بخش‌های قبلی توسعه داده شده‌اند و تأییدکنندهٔ تغییرات هم‌زمان سطح موجودی در سه لایه از مسئله‌اند.

#### ۳-۳-۱- تحلیل تغییرات موجودی لایهٔ تولید

شکل (۱) براساس روابط (۵) تا (۸) ترسیم شده است و تغییرات موجودی ناشی از تولید، توقف برای نگهداری پیشگیرانه، بازرسی و پاسخ به تقاضا را نمایش می‌دهد.

**ارتباط با مدل ریاضی**

- **نقطهٔ $t_{p_i}$**: زمان توقف ماشین برای نگهداری پیشگیرانه. این پارامتر در رابطهٔ (۵) $(T_{p_i} = n_i(t_m + t_{p_i}))$ برای محاسبهٔ طول زیرچرخهٔ تولید استفاده می‌شود.
- **نقطهٔ $t_{1i}$**: زمان بازرسی. این پارامتر در رابطهٔ (۷) $(t_{1i} = \frac{Q_i}{x})$ براساس حجم تولید و سرعت بازرسی محاسبه می‌شود.
- **نقطهٔ $T_{D_i}$**: زمان پاسخ به تقاضا. این پارامتر در رابطهٔ (۶) $(T_{D_i} = T - T_{p_i})$، به‌عنوان باقی‌ماندهٔ طول چرخه و زمان تولید محاسبه می‌شود.
- **نقطهٔ $T$**: طول کل چرخه که متغیر تصمیم اصلی مدل است و در رابطهٔ (۴) $(T = T_{p_i} + T_{D_i})$ تعریف شده است.

**شیب‌ها و نرخ‌ها**

- شیب صعودی در زمان تولید: معادل $P_i - D$ (نرخ تولید منهای نرخ تقاضا). این شیب در بازه‌های $[0, t_{p_i}]$ و $[t_m, t_{1i}]$ مشاهده می‌شود.
- شیب نزولی در زمان پاسخ به تقاضا: معادل $-D$ (نرخ تقاضا). این شیب در بازه‌های $[t_{p_i}, t_m]$ و $[t_{1i}, T]$ مشاهده می‌شود.
- شیب صفر در زمان توقف برای PM: در بازهٔ $[t_{p_i}, t_{p_i} + t_m]$ که تولید متوقف است و فقط مصرف اتفاق می‌افتد.

### ۳-۳-۲- تحلیل تغییرات موجودی لایهٔ تعمیر

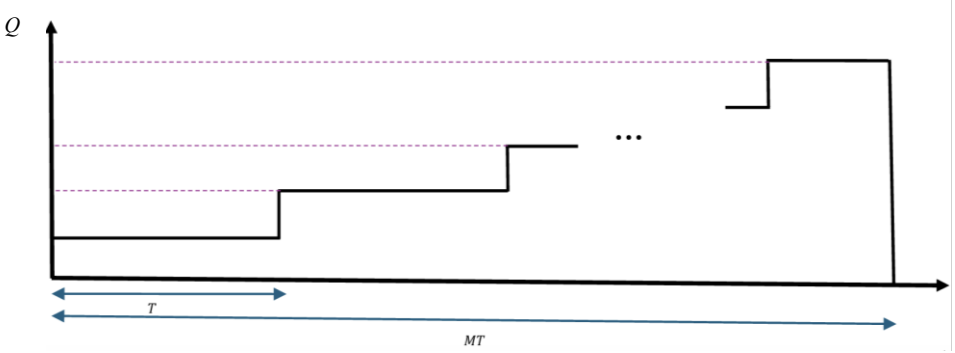
شکل (۲) نشان می‌دهد که در طول زمان، تعداد اقلام لایهٔ دوم چگونه تغییر و نوسان دارد. این شکل براساس روابط (۸) و (۲۰) ترسیم شده است و تغییرات موجودی ناشی از ورود دسته‌ای اقلام معیوب از طرف تولیدکننده، فرآیند تعمیر و امحا را نمایش می‌دهد.

لایهٔ دوم، لایهٔ تعمیر و بازکاری اقلام معیوب عمل می‌کند و نقش آن در زنجیرهٔ تأمین، تبدیل محصولات دارای نقص به اقلام استفاده‌شدنی و حذف اقلام اصلاح‌ناپذیر است. مطابق مدل، در پایان هر چرخهٔ تولید، محصولاتی به‌صورت یکجا وارد این مرحله می‌شوند که در لایهٔ اول تولید و پس از بازرسی دسته‌بندی شده‌اند. این محصولات شامل سه نوع کالا هستند:

۱) اقلام معیوب واقعی؛

۲) اقلامی که تعمیرپذیرند؛

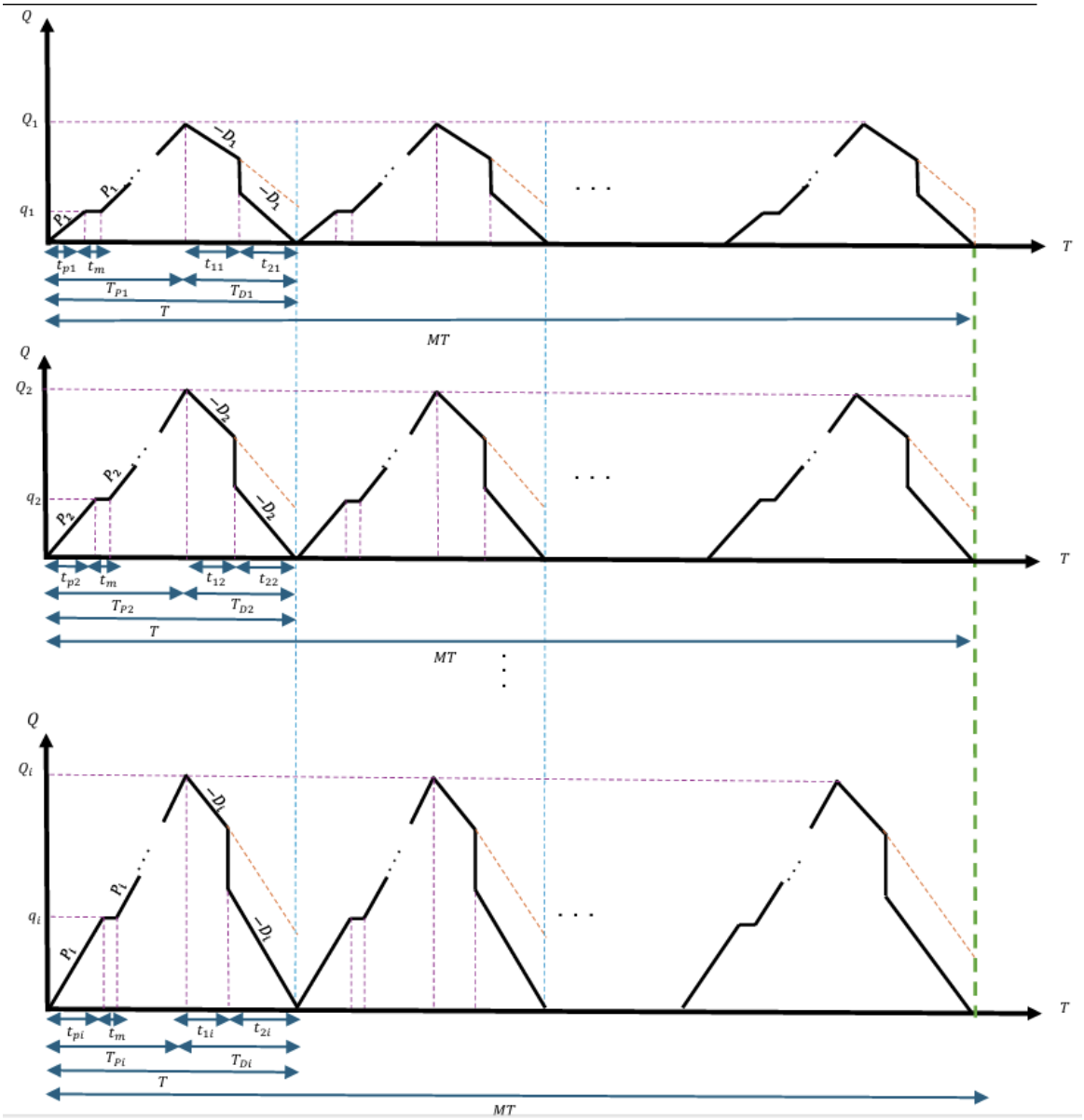
۳) کالاهایی که به‌دلیل خطای بازرسی، به‌اشتباه معیوب تصور شده‌اند.




$$\sum_{i=1}^{I} MQ_i(\theta_i+\propto_i-\propto_i \theta_i)$$
$$\vdots$$
$$\sum_{i=1}^{I} 3Q_i(\theta_i+\propto_i-\propto_i \theta_i)$$
$$\sum_{i=1}^{I} 2Q_i(\theta_i+\propto_i-\propto_i \theta_i)$$
$$\sum_{i=1}^{I} Q_i(\theta_i+\propto_i-\propto_i \theta_i)$$

**شکل ۱- نمودار لایه اول زنجیره**

**Fig. 1- First supply chain layer**




**شکل ۲- نمودار لایهٔ دوم زنجیره**

**Fig. 2- Second supply chain layer**

### ۳-۳-۳- تحلیل تغییرات موجودی لایهٔ مصرف

شکل (۳) نشان می‌دهد که در طول زمان، تعداد اقلام لایهٔ سوم زنجیره چگونه تغییر و نوسان دارد.

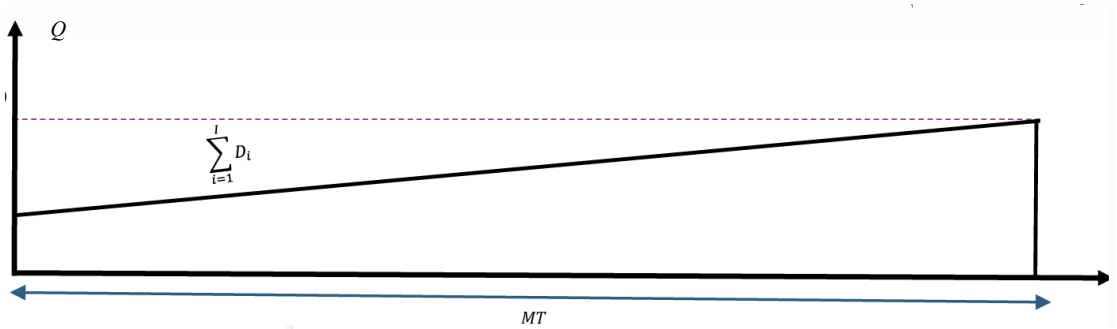
لایهٔ سوم، مقصد نهایی کالاهاست و شامل اقلام سالم از لایهٔ اول و اقلام تعمیرشده از لایهٔ دوم می‌شود.

**ورودی‌ها به لایهٔ مصرف**

- **ورودی از لایهٔ تولیدکننده:** اقلام سالم پس از بازرسی. مقدار آن برابر است با $Q_i(1-\theta_i)(1-\alpha_i)$ که پس از کسر اقلام معیوب و خطای نوع اول محاسبه می‌شود. این ورودی در پایان بازرسی، وارد لایهٔ مصرف می‌شود.
- **ورودی از لایهٔ تعمیر:** اقلام تعمیرشده. مقدار آن برابر است با $\lambda \times Q_i(\alpha_i+\theta_i-\alpha_i\theta_i)$ که در رابطهٔ (۱۶) محاسبه شده است. این ورودی در پایان چرخهٔ تعمیر وارد لایهٔ مصرف می‌شود.

**خروجی لایهٔ مصرف**

**مصرف مشتریان:** نرخ مصرف در لایهٔ مصرف برابر با نرخ تقاضای کل سیستم است.




$$M\sum_{i=1}^{I} Q_i(\theta_i+\propto_i-\propto_i \theta_i) - M\lambda'\sum_{i=1}^{I} Q_i(\theta_i+\propto_i-\propto_i \theta_i) + MT\sum_{i=1}^{I} D_i$$

$$M\sum_{i=1}^{I} Q_i(\theta_i+\propto_i-\propto_i \theta_i) - M\lambda'\sum_{i=1}^{I} Q_i(\theta_i+\propto_i-\propto_i \theta_i)$$

**شکل ۳- نمودار لایهٔ سوم زنجیره**

**Fig. 3- Third supply chain layer**

**۳-۴- تعریف هزینه‌ها**

***هزینهٔ جریمهٔ خطای بازرسی نوع دوم:*** خطای نوع دوم زمانی در فرایند بازرسی رخ می‌دهد که محصول واقعاً معیوب است، اما به‌اشتباه سالم تشخیص داده می‌شود و از سیستم کنترل عبور می‌کند. این خطا، منفی کاذب شناخته می‌شود.

***هزینهٔ خرید:*** هزینهٔ خرید در مدیریت زنجیرهٔ تأمین و موجودی به هزینه‌های مرتبط با تهیهٔ کالا یا مواد اولیه اشاره دارد. این هزینه شامل مبلغی است که برای خرید هر واحد کالا یا مواد اولیه صرف می‌شود.

***هزینهٔ راه‌اندازی:*** هزینهٔ راه‌اندازی لایهٔ اول شامل هزینه‌های ثابت سرمایه‌گذاری اولیه و هزینه‌های متغیر و عملیات اولیه است.

***هزینهٔ سفارش‌دهی:*** این هزینه شامل هزینه هایی است که برای ثبت، پردازش و انجام هر سفارش باید پرداخت شود.

***هزینهٔ نگهداری اقلام سالم و معیوب:*** هزینه‌های نگهداری اقلام سالم مربوط به نگهداری اقلام سالم است که ازنظر کیفیت و کارایی در حالت مطلوب‌اند. هزینه‌های نگهداری اقلام معیوب مربوط اقلام معیوب یا خراب‌اند؛ مانند هزینه‌های نگهداری، تعمیر یا دورریختن کالاهای معیوب.

***هزینهٔ بازرسی:*** در لایهٔ اول و دوم، هزینه های بازرسی به‌منظور کنترل کیفیت و اطمینان از وجودنداشتن اقلام معیوب و مطابقت استانداردهای کیفیت است.

***هزینهٔ تعمیر و امحا***: هزینه‌های تعمیر شامل مخارج مرتبط با بازسازی و اصلاح اقلام معیوب یا شکست‌خورده است. هزینه‌های امحا مربوط به دورانداختن اقلام معیوب یا اصلاح‌ناپذیر است که امکان بازسازی یا تعمیر آنها وجود ندارد.

### ۳-۵- مدل‌سازی ریاضی

#### ۳-۵-۱- محاسبهٔ تابع هزینه

تابع هزینهٔ کل این مدل عبارت است از:

$$TC = TC_1 + TC_2 + TC_3 \quad (۹)$$

این تابع هزینه شامل هزینه‌های مربوط به هر سه لایه است؛ به صورتی که:

$TC_1$ : مجموع هزینه‌های لایهٔ اول در هر دوره

$TC_2$ : مجموع هزینه‌های لایهٔ دوم در هر دوره

$TC_3$ : مجموع هزینه‌های لایهٔ سوم در هر دوره

رابطهٔ (۱۰)، تابع هزینهٔ کل لایهٔ اول (تولیدکننده) را در یک دورهٔ تولید (M بار تولید) نمایش می‌دهد.

$$MIA_1 - \frac{Mh_1}{2}\sum_{i=1}^{I}\left[-\left(\frac{D_i{}^2T^2(tm+tp_i)-D_iTt_mP_itp_i(\theta_i-1)}{P_itp_i(\theta_i-1)^2}\right)+\left(\frac{D_i{}^2T^2(D_i-X)}{x^2(\theta_i-1)^2}\right)+=TC_1\right.$$
$$\left.\left(\frac{TD_i}{\theta_i-1}\right)-\left(\frac{\left(D_iT^2(D_i-x+\alpha_ix+\theta_ix-\alpha_i\theta_ix)\left(D_iP_itp_i+D_it_mx+D_itp_ix-P_itp_ix+P_itp_ix\theta_i\right)\right)}{P_itp_ix^2(\theta_i-1)^2}\right)\right]$$
$$+\ Mh_1'\ \sum_{i=1}^{I}\left[\frac{D_iT^2(D_i-X)(D_iP_itp_i+D_itmX+D_itp_iX-P_itp_iX+P_itp_i\theta_iX)}{2P_itp_iX^2(\theta_i-1)^2}\right]-$$
$$MC_1\sum_{i=1}^{I}\frac{TD_i}{\theta_i-1}-\ MO_1\sum_{i=1}^{I}\frac{TD_i}{\theta_i-1}-UM\sum_{i=1}^{I}\left(\theta_i\beta_i\frac{TD_i}{\theta_i-1}\right) \quad (۱۰)$$

رابطهٔ (۱۱)، هزینه‌های کل لایهٔ دوم (تعمیرکننده) را در افق زمانی مدنظر بررسی می‌کند. لایهٔ دوم، ورودی‌های خود را از لایهٔ اول دریافت می‌کند که شامل اقلام معیوب واقعی و اقلام سالمی است که به‌اشتباه (خطای نوع اول) به این لایه هدایت شده‌اند.

$$TC_2{=}MA_2 - h_2\sum_{i=1}^{I}\frac{D_iT^2M(M+1)(\propto_i+\theta_i-\propto_i\theta_i)}{2(\theta_i-1)} - MO_2\sum_{i=1}^{I}\left(\frac{TD_i}{\theta_i-1}(\alpha_i+\theta_i-\alpha_i\theta_i)\right)$$
$$-Mr\lambda\left(\sum_{i=1}^{I}\frac{TD_i}{\theta_i-1}(\alpha_i+\theta_i-\alpha_i\theta_i)\right) - MG\lambda'\left(\sum_{i=1}^{I}\frac{TD_i}{\theta_i-1}(\alpha_i+\theta_i-\alpha_i\theta_i)\right) \quad (۱۱)$$

رابطهٔ (۱۲)، هزینه‌های لایهٔ سوم یا همان لایهٔ مصرف‌کنندهٔ نهایی را در کل دورهٔ زمانی مدل با احتساب M بار تولید محاسبه می‌کند.

$$C_3MT\sum_{i=1}^{I}D_i - h_3\left(\sum_{i=1}^{I}\frac{D_iM^2T^2\left(2\alpha_i+\theta_i-2\alpha_i\theta_i-2\alpha_i\lambda'-2\theta_i\lambda'+2\alpha_i\theta_i\lambda'+1\right)}{2(\theta_i-1)}\right)+TC_3 = A_3 \quad (۱۲)$$

رابطهٔ (۱۳) در حقیقت حاصل جمع جبری سه تابع هزینه و نمایانگر هزینهٔ کل سیستم در طول یک دورهٔ تولیدی با M بار راه‌اندازی است. این فرمول، جامع‌ترین سطح از تجمیع هزینه‌ها در مدل است و تمامی تعاملات هزینه‌ای بین سه لایه را به‌صورت یکپارچه در خود جای داده است.

$$TC = \ MIA_1 - \frac{Mh_1}{2}\sum_{i=1}^{I}\left[-\left(\frac{D_i{}^2T^2(tm+tp_i)-D_iTt_mP_itp_i(\theta_i-1)}{P_itp_i(\theta_i-1)^2}\right)+\left(\frac{D_i{}^2T^2(D_i-X)}{x^2(\theta_i-1)^2}\right)+\left(\frac{TD_i}{\theta_i-1}\right)-\right.$$
$$\left.\left(\frac{\left(D_iT^2(D_i-x+\alpha_ix+\theta_ix-\alpha_i\theta_ix)\left(D_iP_itp_i+D_it_mx+D_itp_ix-P_itp_ix+P_itp_ix\theta_i\right)\right)}{P_itp_ix^2(\theta_i-1)^2}\right)\right] \quad (۱۳)$$

$$+ Mh_1' \sum_{i=1}^{I}\left[\frac{D_iT^2(D_i-X)(D_iP_itp_i+D_itmX+D_itp_iX-P_itp_iX+P_itp_i\theta_iX)}{2P_itp_iX^2(\theta_i-1)^2}\right] - MC_1\sum_{i=1}^{I}\frac{TD_i}{\theta_i-1} -$$
$$MO_1\sum_{i=1}^{I}\frac{TD_i}{\theta_i-1} \quad - UM\sum_{i=1}^{I}\left(\theta_i\beta_i\frac{TD_i}{\theta_i-1}\right) \quad + MA_2 \quad - h_2\sum_{i=1}^{I}\frac{D_iT^2M(M+1)(\propto_i+\theta_i-\propto_i\theta_i)}{2(\theta_i-1)}$$
$$- MO_2\sum_{i=1}^{I}(\frac{TD_i}{\theta_i-1}(\alpha_i+\theta_i-\alpha_i\theta_i)) \quad - Mr\lambda(\sum_{i=1}^{I}\frac{TD_i}{\theta_i-1}(\alpha_i+\theta_i-\alpha_i\theta_i))$$
$$- MG\lambda'(\sum_{i=1}^{I}\frac{TD_i}{\theta_i-1}(\alpha_i+\theta_i-\alpha_i\theta_i)) \quad + A_3 \quad + C_3MT\sum_{i=1}^{I}D_i$$
$$-h_3\left(\sum_{i=1}^{I}\frac{D_iM^2T^2(2\alpha_i+\theta_i-2\alpha_i\theta_i-2\alpha_i\lambda'-2\theta_i\lambda'+2\alpha_i\theta_i\lambda'+1)}{2(\theta_i-1)}\right)$$

### ۳-۵-۲- هزینه‌های لایهٔ تولید

***هزینهٔ راه‌اندازی***: برای محاسبهٔ هزینهٔ سفارش‌دهی باید به کل خط تولید توجه داشت؛ به این صورت که تعداد کل ماشین‌ها I واحد است و برای کل سیکل بایدM بار تولید داشت. این مقدار در یک هزینهٔ ثابت $A_1$ ضرب می‌شود.

***هزینهٔ نگهداری اقلام سالم***: برای محاسبهٔ این هزینه ابتدا مساحت زیر نمودار محاسبه و سپس در مقدار ثابت $h_1$ ضرب می‌شود. برای کل سیکل بایدM بار تولید داشت؛ بنابراینM بار هزینهٔ نگهداری برای اقلام سالم لحاظ می‌شود.

***هزینهٔ نگهداری اقلام معیوب***: برای محاسبهٔ این هزینه ابتدا مساحت زیر نمودار محاسبه و سپس در مقدار ثابت $h_1'$ ضرب می‌شود. برای کل سیکل ما باید M بار تولید داشت؛ بنابراین M بار هزینهٔ نگهداری برای اقلام معیوب لحاظ می‌شود.

***هزینهٔ خرید***: مقادیر مورد نیاز در هزینهٔ خرید عبارت‌اند از:

- $Q_i$: حجم تولید

$$Q_i = \frac{TD_i}{1-\theta_i} \qquad (۱۴)$$

این مقدار به این صورت محاسبه شده است: در حالت عادی $T = Q_iD_i$ است؛ اما در این مدل $Q_i\theta_i$ از اقلام ما معیوب و $\theta_i$ درصد اقلام معیوب هستند؛ بنابراین در حال حاضر $T = \frac{Q_i-Q_i\theta_i}{D_i}$ و با توجه به آن $Q_i = \frac{TD_i}{1-\theta_i}$ است.

- $C_2$: هزینهٔ واحد خرید

برای محاسبهٔ هزینه خرید ما، این دو مقدار در هم ضرب می‌شود. با توجه به آنکه در کل سیکل بایدM بار فرایند تولید انجام شود، بنابراینM بار هزینهٔ خرید لحاظ می‌شود.

***هزینهٔ بازرسی***: روند محاسبهٔ هزینهٔ بازرسی نیز مشابه هزینهٔ خرید است.

***هزینهٔ خطای نوع دوم***: برای محاسبهٔ این هزینه از مقادیر زیر استفاده می‌شود:

- $\theta_i$: درصد اقلام معیوب ماشین $i$_ام
- $\beta_i$: خطای بازرسی نوع دوم ماشین $i$_ام
- $Q_i$: مقدار اقتصادی تولید موجودی (سفارش/ تولید) ماشین $i$_ام
- $U$: هزینهٔ جریمهٔ خطای نوع دوم

همان‌گونه که گفته شد، لایهٔ اول خطای بازرسی نوع دوم را دارد که باید این هزینه را با عنوان جریمه بپردازد و با توجه به آنکه در کل سیکل باید M بار تولید داشت، بنابراین M بار باید این جریمه را پرداخت.

**۳-۵-۳- هزینه‌های لایهٔ تعمیر**

***هزینهٔ سفارش‌دهی***: برای محاسبهٔ این هزینه باید یک مقدار ثابت را پرداخت و با توجه به اینکه لایهٔ اول M بار تولید دارد، لایهٔ دوم باید M بار سفارش دهد.

***هزینهٔ نگهداری***: روند محاسبهٔ هزینهٔ نگهداری در لایهٔ دوم، مشابه لایهٔ اول است.

***هزینهٔ خرید***: همان‌گونه که توضیح داده شد، هزینهٔ خرید لایهٔ دوم صفر است.

***هزینهٔ بازرسی***: مقدار کالای تولیدی ما در حالت عادی با توجه به تولید کالای معیوب برابر با $Q_i\theta_i$ است؛ اما با توجه به خطای بازرسی در لایهٔ اول، مقداری از اقلام سالم ما دچار خطای نوع اول می‌شوند؛ بنابراین مقدار مربوط به بازرسی برابر است با:

$$Q_i\theta_i + \alpha_i Q_i(1-\theta_i) = Q_i\,(\alpha_i + \theta_i - \alpha_i\theta_i) \qquad (۱۵)$$

که این مقدار باید در هزینهٔ ثابت بازرسی ضرب شود.

***هزینهٔ تعمیر***: برای هزینهٔ تعمیر باید کل کالاهای دریافتی تعمیر شود که در M بار تولید به دست لایه رسیده است و در آن $\lambda$ درصد اقلام تعمیرپذیر و $r$ هزینهٔ تعمیر هستند.

***هزینهٔ امحا***: برای هزینهٔ امحا باید کل کالاهای دریافتی امحا شود که در M بار تولید به دست لایه رسیده است و در آن $\lambda'$ درصد اقلام امحا شده است و G هزینهٔ امحاست.

**۳-۵-۴- هزینه‌های لایهٔ مصرف**

***هزینهٔ سفارش‌دهی***: یک هزینهٔ سفارش‌دهی ثابت برای صدور سفارش در این لایه لحاظ می‌شود. این هزینه مستقل از حجم سفارش پس از هر M بار تولید پرداخت می‌شود.

***هزینهٔ نگهداری***: روند محاسبهٔ این هزینه مشابه لایهٔ اول است.

***هزینهٔ خرید***: برای اقلامی که از لایهٔ یک به‌صورت تدریجی به دست لایه می‌رسد، هزینهٔ خرید پرداخت می‌شود:

**۳-۵-۵- محاسبهٔ تابع هزینهٔ کل**

این تابع هزینهٔ کل شامل تمامی هزینه‌های مربوط به هر سه لایه است؛ به صورتی که:

$TCU_1$ : مجموع تمامی هزینه‌های لایهٔ اول در سیکل مشترک

$TCU_2$ : مجموع تمامی هزینه‌های لایهٔ دوم در سیکل مشترک

$TCU_3$ : مجموع تمامی هزینه‌های لایهٔ سوم در سیکل مشترک

$$TCU = TCU_1 + TCU_2 + TCU_3 \qquad (۱۶)$$

رابطهٔ (۱۷) با تقسیم تابع هزینهٔ کل لایهٔ اول ($TC_1$) بر طول کل دوره (که حاصل‌ضرب M در T است)، هزینهٔ متوسط این لایه را در واحد زمان محاسبه می‌کند.

$$\frac{IA_1}{T}-\frac{h_1}{2}\sum_{i=1}^{I}\left[-\left(\frac{{D_i}^2T(tm+tp_i)-D_it_mP_itp_i(\theta_i-1)}{P_itp_i(\theta_i-1)^2}\right)+\left(\frac{{D_i}^2T(D_i-X)}{x^2(\theta_i-1)^2}\right)+=\frac{TC_1}{MT}=TCU_1\right. \quad (۱۷)$$
$$\left.\left(\frac{D_i}{\theta_i-1}\right)-\left(\frac{\left(D_iT(D_i-x+\alpha_ix+\theta_ix-\alpha_i\theta_ix)(D_iP_itp_i+D_it_mx+D_itp_ix-P_itp_ix+P_itp_ix\theta_i)\right)}{P_itp_ix^2(\theta_i-1)^2}\right)\right]$$
$$+h_1'\sum_{i=1}^{I}\left[\frac{D_iT(D_i-X)(D_iP_itp_i+D_itmX+D_itp_iX-P_itp_iX+P_itp_i\theta_iX)}{2P_itp_iX^2(\theta_i-1)^2}\right]-C_1\sum_{i=1}^{I}\frac{D_i}{\theta_i-1}-$$
$$O_1\sum_{i=1}^{I}\frac{D_i}{\theta_i-1}$$

رابطهٔ (۱۸) بیانگر هزینهٔ متوسط لایهٔ دوم (تعمیرکننده) در واحد زمان است و از تقسیم $TC_2$ بر (MT) حاصل می‌شود.

$$TCU_2=\frac{TC_2}{MT}=\frac{A_2}{T}\ -h_2\sum_{i=1}^{I}\frac{D_iT(M+1)(\propto_i+\theta_i-\propto_i\theta_i)}{2(\theta_i-1)}\ -O_2\sum_{i=1}^{I}\left(\frac{D_i}{\theta_i-1}(\alpha_i+\theta_i-\alpha_i\theta_i)\right) \quad (۱۸)$$
$$-r\lambda\left(\sum_{i=1}^{I}\frac{D_i}{\theta_i-1}(\alpha_i+\theta_i-\alpha_i\theta_i)\right)-G\lambda'\left(\sum_{i=1}^{I}\frac{D_i}{\theta_i-1}(\alpha_i+\theta_i-\alpha_i\theta_i)\right)$$

رابطهٔ (۱۹)، هزینهٔ متوسط لایهٔ سوم (مصرف‌کنندهٔ نهایی) را در واحد زمان ارائه می‌دهد. هزینهٔ سفارش‌دهی ثابت این لایه پس از نرمال‌سازی به‌صورت ($A_3$/MT) ظاهر می‌شود که با افزایش طول چرخه و تعداد دفعات تولید، به‌سرعت کاهش می‌یابد.

$$TCU_3=\frac{TC_3}{MT}=\frac{A_3}{MT}+C_3\sum_{i=1}^{I}D_i \quad (۱۹)$$
$$-h_3\left(\sum_{i=1}^{I}\frac{D_iMT(2\alpha_i+\theta_i-2\theta_i-2\alpha_i\lambda'-2\theta_i\lambda'+2\alpha_i\theta_i\lambda'+1)}{2(\theta_i-1)}\right)$$

رابطهٔ (۲۰) که حاصل جمع سه رابطهٔ (۱۷)، (۱۸) و (۱۹) است، تابع هدف نهایی مدل را تشکیل می‌دهد و بیانگر متوسط هزینهٔ کل سیستم در هر واحد زمان است.

$$TCU=\frac{IA_1}{T}-\frac{h_1}{2}\sum_{i=1}^{I}\left[-\left(\frac{{D_i}^2T(tm+tp_i)-D_it_mP_itp_i(\theta_i-1)}{P_itp_i(\theta_i-1)^2}\right)+\left(\frac{{D_i}^2T(D_i-X)}{x^2(\theta_i-1)^2}\right)+\left(\frac{D_i}{\theta_i-1}\right)-\right. \quad (۲۰)$$
$$\left.\left(\frac{\left(D_iT(D_i-x+\alpha_ix+\theta_ix-\alpha_i\theta_ix)(D_iP_itp_i+D_it_mx+D_itp_ix-P_itp_ix+P_itp_ix\theta_i)\right)}{P_itp_ix^2(\theta_i-1)^2}\right)\right]$$
$$+h_1'\sum_{i=1}^{I}\left[\frac{D_iT(D_i-X)(D_iP_itp_i+D_itmX+D_itp_iX-P_itp_iX+P_itp_i\theta_iX)}{2P_itp_iX^2(\theta_i-1)^2}\right]-C_1\sum_{i=1}^{I}\frac{D_i}{\theta_i-1}-\ O_1\sum_{i=1}^{I}\frac{D_i}{\theta_i-1}$$
$$-U\sum_{i=1}^{I}\left(\theta_i\beta_i\frac{D_i}{\theta_i-1}\right)+\frac{A_2}{T}-h_2\sum_{i=1}^{I}\frac{D_iT(M+1)(\propto_i+\theta_i-\propto_i\theta_i)}{2(\theta_i-1)}-O_2\sum_{i=1}^{I}\left(\frac{D_i}{\theta_i-1}(\alpha_i+\theta_i-\alpha_i\theta_i)\right)$$
$$-r\lambda\left(\sum_{i=1}^{I}\frac{D_i}{\theta_i-1}(\alpha_i+\theta_i-\alpha_i\theta_i)\right)-G\lambda'\left(\sum_{i=1}^{I}\frac{D_i}{\theta_i-1}(\alpha_i+\theta_i-\alpha_i\theta_i)\right)+\frac{A_3}{MT}+C_3\sum_{i=1}^{I}D_i$$
$$-h_3\left(\sum_{i=1}^{I}\frac{D_iMT\left(2\alpha_i+\theta_i-2\alpha_i\theta_i-2\alpha_i\lambda'-2\theta_i\lambda'+2\alpha_i\theta_i\lambda'+1\right)}{2(\theta_i-1)}\right)$$

پس از تشکیل تابع هزینهٔ کل برحسب T، از رویکرد تحلیلی برای تعیین مقدار بهینه استفاده شده است.:

$$\frac{\partial TCU}{\partial T}=0 \quad (۲۱)$$

(۲۲)

$$T^*=\sqrt{\frac{2(MIA_1+MA_2+A_3)}{M\left[\left(-h_1\sum_{i=1}^{I}[-H1-H2]\right)+h_1'\sum_{i=1}^{I}H3-\left(h_2\sum_{i=1}^{I}\frac{D_i(M+1)(\propto_i+\theta_i-\propto_i\theta_i)}{(\theta_i-1)}\right)-(h_3H4)\right]}}$$

که در این رابطه داریم:

$$H1=\left(\frac{{D_i}^2(tm+tp_i)}{P_itp_i(\theta_i-1)^2}\right)+\left(\frac{{D_i}^2(D_i-X)}{X^2(\theta_i-1)^2}\right) \quad (۲۳)$$

$$H2 = \left(\frac{\left(D_i(D_i - x + \alpha_i x + \theta_i x - \alpha_i\theta_i x)(D_i P_i tp_i + D_i t_m x + D_i tp_i x - P_i tp_i x + P_i tp_i x\theta_i)\right)}{P_i tp_i x^2(\theta_i - 1)^2}\right) \quad (۲۴)$$

$$H3 = \left[\frac{D_i(D_i - X)(D_i P_i tp_i + D_i t_m X + D_i tp_i X - P_i tp_i X + P_i tp_i \theta_i X)}{P_i tp_i X^2(\theta_i - 1)^2}\right] \quad (۲۵)$$

$$H4 = \left(\sum_{i=1}^{I} \frac{D_i M(2\alpha_i + \theta_i - 2\alpha_i\theta_i - 2\alpha_i\lambda' - 2\theta_i\lambda' + 2\alpha_i\theta_i\lambda' + 1)}{(\theta_i - 1)}\right) \quad (۲۶)$$

### ۳-۶- اثبات تحدب تابع هزینه

در این پژوهش برای نمایش محدب‌بودن TCU از مشتق دوم استفاده شده است؛ به صورتی که از تابع TCU دوبار نسبت‌به T مشتق گرفته شده است:

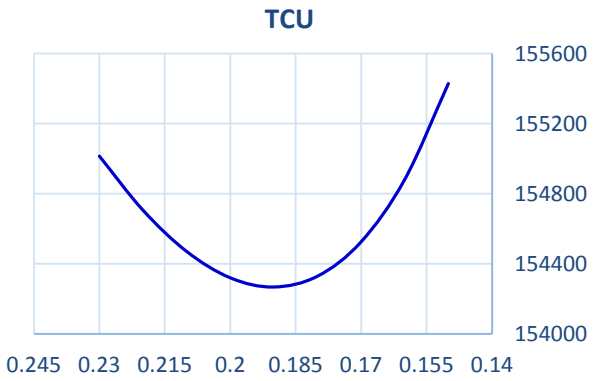
$$\frac{\partial^2 TCU}{\partial T^2} = \frac{2(MIA_1 + MA_2 + A_3)}{MT^3} \geq 0 \quad (۲۷)$$

همان‌گونه که از رابطهٔ فوق مشخص است مشتق مرتبهٔ دوم TCU نسبت‌به T مثبت است و بنابراین اثبات می‌شود که تابع هزینهٔ TCU نسبت‌به T یک تابع محدب است. علاوه بر این، به صورت عددی نیز می‌توان با بررسی رفتار تابع هزینهٔ TCU به ازای مقادیر مختلف T، رفتار محدب آن را مشاهده کرد. جدول (۲) مقادیر عددی و شکل (۴)، رفتار محدب تابع را به‌صورت عددی نمایش می‌دهد.

**جدول ۲- نمایش محدب‌بودن**

**Table 2 - Convexity demonstration**

| TCU | $T$ |
|---|---|
| ۲۷۹/۱۵۵۰۱۴ | ۰/۲۳ |
| ۷۲۹/۱۵۴۷۰۵ | ۰/۲۲ |
| ۷۱۶/۱۵۴۴۷۰ | ۰/۲۱ |
| ۲۷۰/۱۵۴۳۲۰ | ۰/۲ |
| ۷۳۳/۱۵۴۲۶۷ | ۰/۱۹۰۱۳۹۵ |
| ۴۵۷/۱۵۴۳۲۹ | ۰/۱۸ |
| ۵۷۱/۱۵۴۵۲۵ | ۰/۱۷ |
| ۲۸۴/۱۵۴۸۸۱ | ۰/۱۶ |
| ۵۱۶/۱۵۵۴۲۸ | ۰/۱۵ |




**شکل ۴- رفتار تابع هزینه کل به ازای مقادیر متفاوت زمان**

**Fig.4 - Behavior of the total cost function for different amounts of time**

## ۴- بحث و نتایج

برای ارزیابی کارایی مدل زنجیرهٔ تأمین، یک نمونهٔ عددی ارائه شده است. تولیدکننده‌ای با سیستم EPQ، یک محصول خاص را با سه ماشین موازی تولید می‌کند و نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه بر همین ماشین‌ها انجام می‌شود. به‌منظور اعتبارسنجی مدل و ارزیابی عملکرد آن در یک محیط محاسباتی، مجموعه‌ای از داده‌های ورودی شامل پارامترهای تولید، بازرسی، تعمیر، نگهداری پیشگیرانه و هزینه‌های مرتبط در جدول (۳) ارائه شده است.

**جدول ۳- مقادیر عددی**

**Table 3- Numerical values**

| پارامتر | مقدار | واحد |
|---|---|---|
| $I$ | ۳ | - |
| $D_1$ | ۳۵۰ | واحد محصول/سال |
| $D_2$ | ۴۰۰ | واحد محصول/سال |
| $D_3$ | ۲۵۰ | واحد محصول/سال |
| $X$ | ۳۵۰۰ | واحد محصول/سال |
| $\theta_1$ | ۰/۰۲ | - |
| $\theta_2$ | ۰/۰۱ | - |
| $\theta_3$ | ۰/۰۳ | - |
| $P_1$ | ۷۰۰ | واحد محصول/سال |
| $P_2$ | ۸۰۰ | واحد محصول/سال |
| $P_3$ | ۵۰۰ | واحد محصول/سال |
| $tp_1$ | ۱/۴ | سال |
| $tp_2$ | ۱/۲ | سال |
| $tp_3$ | ۱/۳ | سال |
| $t_m$ | ۰/۲ | - |
| $\alpha_1$ | ۰/۰۱ | - |
| $\alpha_2$ | ۰/۰۲ | - |
| $\alpha_3$ | ۰/۰۱ | - |
| $\beta_1$ | ۰/۰۲ | - |
| $\beta_2$ | ۰/۰۱ | - |
| $\beta_3$ | ۰/۱۵ | - |
| $M$ | ۵ | - |
| $A_1$ | ۱۲۰۰ | هزینه /مقدار سفارش |
| $A_2$ | ۲۸۰ | هزینه /مقدار سفارش |
| $A_3$ | ۱۳۵ | هزینه /مقدار سفارش |
| $C_1$ | ۳۵ | هزینه /کالا |
| $C_2$ | ۰ | هزینه /کالا |
| $C_3$ | ۵۰ | هزینه /کالا |
| $h_1'$ | ۶۰ | هزینه /کالا/ زمان |
| $h_1$ | ۴۰ | هزینه /کالا/ زمان |

| پارامتر | مقدار | واحد |
|---|---|---|
| $h_2$ | ۲۰ | هزینه /کالا/ زمان |
| $h_3$ | ۳۰ | هزینه /کالا/ زمان |
| $\lambda$ | ۰/۶ | - |
| $\lambda'$ | ۰/۳۶ | - |
| $r$ | ۲۰ | هزینه /کالا |
| $G$ | ۱۶ | هزینه /کالا |
| $U$ | ۲۰۰ | هزینه /کالا |
| $O_1$ | ۲ | هزینه /کالا |
| $O_2$ | ۵ | هزینه /کالا |

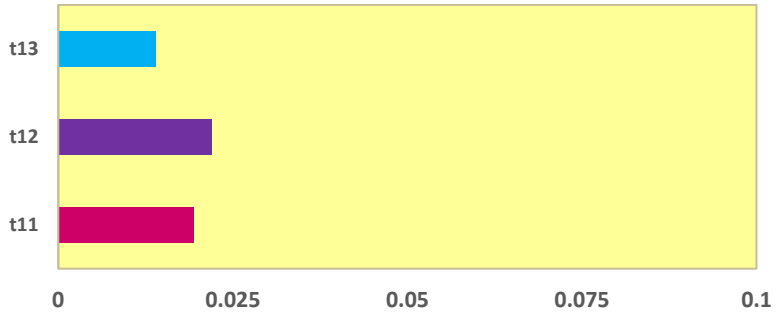
از حل مثال فوق، نتایج جدول (۴) حاصل شده است. همچنین شکل‌های (۵ تا ۷) روند تغییرات متغیرهای مسئله را به‌صورت گرافیکی نمایش می‌دهند.

**جدول ۴- پاسخ‌ها**

**Table 4- Numerical values**

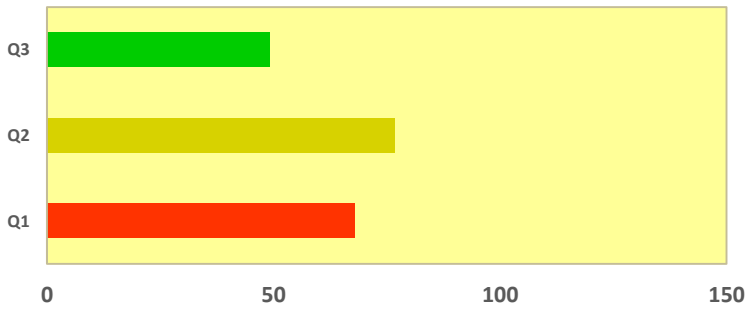
| متغیر | مقدار | تفسیر مدیریتی |
|---|---|---|
| $t_{11}$ | ۰/۰۱۹۴ | _ |
| $t_{12}$ | ۰/۰۲۱۹ | نشان می‌دهد که ماشین ۲ به‌دلیل حجم تولید بالاتر ($Q_2 = 76.82$) ، به زمان بازرسی بیشتری نیاز دارد. این یافته به مدیران توصیه می‌کند که منابع بازرسی را به‌گونه‌ای تخصیص دهند که با حجم تولید هر ماشین، متناسب باشد. |
| $t_{13}$ | ۰/۰۱۴۰ | ماشین ۳ با حجم تولید، به کمترین زمان بازرسی نیاز دارد. مدیران منابع بازرسی را از ماشین ۳ به ماشین ۲ یا ۱ منتقل می‌کنند تا بهره‌وری کلی سیستم افزایش یابد. |
| $Q_1$ | ۶۷/۹۱ | مدیران باید ماشین ۱ را به‌گونه‌ای تنظیم کنند که ۶۸ واحد محصول در هر چرخه تولید کند. اگر این مقدار با ظرفیت واقعی ماشین مغایرت دارد، باید $D_1$ (تخصیص تقاضا به ماشین ۱) را بازبینی کنند. |
| $Q_2$ | ۷۶/۸۲ | ماشین ۲ با وجود درصد اقلام معیوب، به‌دلیل نرخ تولید بالاتر ($P_2 = 800$)، سهم بیشتری از تولید را دریافت کرده است. این یافته به مدیران توصیه می‌کند که به‌جای تخصیص مساوی، تخصیص را براساس نرخ مؤثر تولید انجام دهند. |
| $Q_3$ | ۴۹/۰۱ | نشان می‌دهد که ماشین ۳ کمترین سهم تولید را دارد که به‌دلیل نرخ تولید پایین‌تر ($P_3 = 250$) و درصد اقلام معیوب متوسط ($\theta_3 = 0.01$) است. این یافته نشان می‌دهد که اگر شرکت قصد افزایش ظرفیت تولید را دارد، سرمایه‌گذاری بر ماشین‌های با نرخ تولید بالاتر (مانند ماشین ۲) توجیه بیشتری دارد. |
| $q_1$ | ۹۸۰ | مدیران باید تنظیمات ماشین ۱ را به گونه ای انجام دهند که در هر زیرچرخه دقیقاً ۹۸۰ واحد تولید شود. این مقدار نشان می‌دهد که زیرچرخه‌های تولید بزرگ‌اند و تعداد دفعات راه‌اندازی مجدد ($n_1 = 0.069$) کم است. |
| $q_2$ | ۹۶۰ | با وجود نرخ تولید بالاتر، $q_2$کمتر از $q_1$ است. این نشان می‌دهد که زیرچرخه‌های تولید ماشین ۲ کوتاه‌تر هستند که این به‌دلیل درصد اقلام معیوب بالاتر ($\theta_2 = 0.03$) است و به بازرسی و تفکیک بیشتر نیاز دارد. |
| $q_3$ | ۶۵۰ | نشان می‌دهد که ماشین ۳ با وجود نرخ تولید پایین، زمان تولید نسبتاً طولانی دارد. |
| $n_1$ | ۰/۰۶۹ | n1<n3<n2 نشان می‌دهد که ماشین‌های با نرخ تولید بالاتر، تعداد دفعات راه‌اندازی کمتری نیاز دارند. این یافته به مدیران توصیه می کند که در صورت امکان، تولید را به ماشین های با نرخ بالاتر (مانند ماشین ۲) تخصیص دهند تا هزینه‌های راه‌اندازی کاهش یابد. |
| $n_2$ | ۰/۰۸۰ | _ |
| $n_3$ | ۰/۰۷۵ | _ |

| متغیر | مقدار | تفسیر مدیریتی |
|---|---|---|
| $TC$ | ۱۴۶,۶۶۱ /۹۵ | مدیران باید این عدد را بودجه ی مرجع برای سیستم تولیدی خود در نظر بگیرند. هرگونه انحراف از این مقدار باید بررسی شود. |
| $TCU$ | /۱۵۴۲۶۷ ۷۳۳۳ | مدیران از این عدد برای بودجه بندی سالانه استفاده می‌کنند. اگر این هزینه با بودجهٔ موجود مغایرت دارد، باید پارامترهای ورودی بازبینی شود. |
| $T^*$ | ۰/۱۹۰۱۳۹۵ | مقدار کوچک $T^*$ نشان‌دهندهٔ هزینه‌های بالای نگهداری موجودی نسبت‌به هزینه‌های راه‌اندازی است؛ بنابراین، استراتژی تولید باید براساس تولید به‌موقع و کاهش موجودی انبار طراحی شود. این یافته به مدیران توصیه می‌کند که اگر هزینه‌های انبارداری در سیستم آنها بالاست، تولید را به دوره‌های کوتاه‌تر تقسیم و از تولید انبوه در دوره‌های طولانی خودداری کنند. |



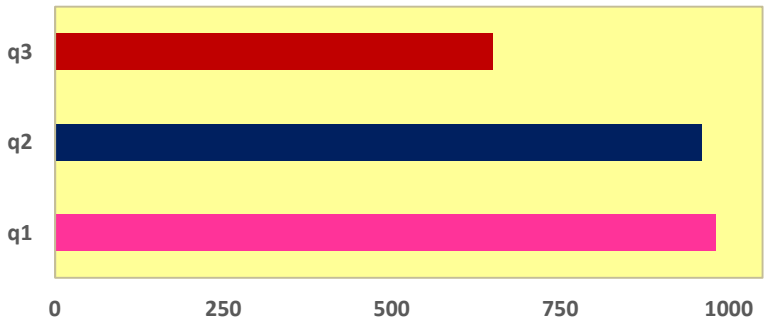

شکل ۵- مقادیر بهینهٔ زمان‌های سیکل

Fig. 5- Optimal values of cycle times




شکل ۶- مقادیر بهینهٔ تولید ماشین‌ها

Fig. 6- Optimal values of machine productions




شکل ۷- مقادیر بهینهٔ تولید برای زیرچرخهٔ تولید

Fig. 7- Optimal values of production sub-cycle

## ۷- نتیجه‌گیری

هدف این پژوهش، ارائهٔ یک چارچوب تحلیلی جامع برای مدیریت تولید و موجودی در یک زنجیرهٔ تأمین سه‌سطحی با اقلام سالم و معیوب بود. بررسی نظام‌مند پیشینه نشان داد که شکاف پژوهشی درخور توجهی در مطالعات پیشین وجود دارد؛ به این معنا که اگرچه مدل‌های EPQ، اقلام معیوب، خطاهای بازرسی و نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه هریک به‌طور مستقل بررسی شده‌اند، به ترکیب هم‌زمان این عناصر در یک مدل تحلیلی یکپارچه، به‌ویژه در محیط‌های چندماشینه، کمتر توجه شده است.

در پاسخ به این شکاف پژوهشی، نوآوری اصلی این تحقیق در توسعهٔ یک مدل EPQ سه‌سطحی نهفته است که در آن تصمیمات تولید، بازرسی، تعمیر و نگهداری پیشگیرانه به‌صورت هماهنگ اتخاذ می‌شوند. مدل پیشنهادی علاوه بر در نظر گرفتن بازرسی صددرصدی همراه با خطاهای نوع اول و دوم، اقلام معیوب را به دو دستهٔ تعمیرپذیر و تعمیرناپذیر تفکیک و هزینه‌های تعمیر، امحا و توقف تولید ناشی از عملیات نت را به‌طور صریح در تابع هزینهٔ کل وارد می‌کند. همچنین استفاده از حل تحلیلی به‌جای روش‌های فراابتکاری، امکان استخراج روابط دقیق، تحلیل حساسیت و تفسیر مدیریتی شفاف را فراهم کرده است. این پژوهش نشان می‌دهد که ادغام سیاست‌های تولید، کنترل کیفیت و نگهداری در قالب یک مدل تحلیلی EPQ، ابزار تصمیم‌گیری قدرتمندی برای بهبود عملکرد اقتصادی و عملیاتی زنجیره‌های تأمین صنعتی فراهم می‌کند. چارچوب ارائه‌شده علاوه بر ارزش نظری، از قابلیت کاربرد صنعتی بالایی برخوردار است و مبنایی برای توسعه‌های آتی نظیر مدل‌سازی عدم‌قطعیت، سیستم‌های چندمحصولی و زنجیره‌های تأمین حلقه‌بسته قرار می‌گیرد. نتایج مدل نشان می‌دهد که کاهش هزینه‌های نگهداری موجودی در لایهٔ مصرف‌کنندهٔ نهایی و تمرکز سرمایه‌گذاری بر نگهداری اقلام سالم، نقش مهمی در کاهش هزینهٔ کل زنجیره دارد. تخصیص تولید میان ماشین‌های موازی باید بر اساس نرخ مؤثر تولید و کیفیت خروجی آن‌ها انجام شود. همچنین، اجرای نوبتی نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه و افزایش دقت بازرسی، به‌ویژه کاهش خطای نوع اول، موجب بهبود عملکرد سیستم می‌شود. در نهایت، هنگام افزایش نرخ اقلام معیوب، کاهش طول چرخهٔ تولید و افزایش دفعات تولید می‌تواند به کنترل موجودی معیوب و هزینه‌های مرتبط کمک کند.

## References


Aldaihani, M. M., & Darwish, M. A. (2015). Effect of preventive maintenance on supply chains with one producer and multiple newsvendors. *International Journal of Applied Management Science*, *7*(1), 19-37. https://doi.org/10.1504/IJAMS.2015.068057.

Alfares, H. K., & Attia, A. M. (2017). A supply chain model with vendor-managed inventory, consignment, and quality inspection errors. *International Journal of Production Research*, *55*(19), 5706-5727. https://doi.org/10.1080/00207543.2017.1330566.

Al-Salamah, M. (2018). Economic production quantity with the presence of imperfect quality and random machine breakdown and repair based on the artificial bee colony heuristic. *Applied Mathematical Modelling*, *63*, 68-83. https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.06.034.

Alsyouf, I. (2007). The role of maintenance in improving companies' productivity and profitability. *International Journal of production economics*, *105*(1), 70-78. https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2004.06.057.

Asadkhani, J., Fallahi, A., & Mokhtari, H. (2022). A sustainable supply chain under VMI-CS agreement with withdrawal policies for imperfect items. *Journal of cleaner production*, *376*, 134098. https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2022.134098.

Asadkhani, J., Mokhtari, H., & Tahmasebpoor, S. (2022). Optimal lot-sizing under learning effect in inspection errors with different types of imperfect quality items. *Operational Research*, *22*(3), 2631-2665. https://doi.org/10.1007/s12351-021-00624-7.

Badi, I., Bouraima, M. B., Stević, Ž., Oloketuyi, E. A., & Makinde, O. O. (2024). Optimizing vendor-managed inventory in multi-tier distribution systems. *Spectrum of operational research*, *1*(1), 33-43. https://doi.org/10.31181/sor1120243.

Bazan, E., Jaber, M. Y., Zanoni, S., & Zavanella, L. E. (2014). Vendor Managed Inventory (VMI) with Consignment Stock (CS) agreement for a two-level supply chain with an imperfect production process with/without restoration interruptions. *International journal of production economics*, *157*, 289-301. https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2014.02.010.

Cárdenas-Barrón, L. E., Plaza-Makowsky, M. J. L., Sevilla-Roca, M. A., Núñez-Baumert, J. M., & Mandal, B. (2021). An inventory model for imperfect quality products with rework, distinct holding costs, and nonlinear demand dependent on price. *Mathematics*, *9*(12), 1362. https://doi.org/10.3390/math9121362.

Chen, H. (2011, January). Research on uncertainty demand inventory control in supply chain. *In MSIE 2011*, 874-878. https://doi.org/10.1109/MSIE.2011.5707547.

Kumar, DE, S. & Mahata, G. C. (2019). An EPQ model for three-layer supply chain with partial backordering and disruption: triangular dense fuzzy lock set approach. *Sādhanā*, *44*(8), 177. https://doi.org/10.1007/s12046-019-1160-7.

Ding, D., & Chen, J. (2008). Coordinating a three level supply chain with flexible return policies. *Omega*, *36*(5), 865-876. https://doi.org/10.1016/j.omega.2006.04.004.

Ding, G., Kaliyaperumal, K., & Wang, X. (2023). A new mathematical model for economic ordering with preventive maintenance and reworking in a supply chain. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, *2023*(1), 8636482. https://doi.org/10.1155/2023/8636482.

Glock, C. H., & Jaber, M. Y. (2013). An economic production quantity (EPQ) model for a customer-dominated supply chain with defective items, reworking and scrap. *International Journal of Services and Operations Management*, *14*(2), 236-251. https://doi.org/10.1504/IJSOM.2013.051831.

Haji, A.R., & Rezaei Zeynali, F. (2022). DEVELOPING AN INTEGRATED TWO-LAYERED SUPPLY CHAIN MODEL WITH DEFECTS IN PRODUCTION SYSTEM. *INDUSTRIAL ENGINEERING & MANAGEMENT SHARIF (SHARIF: ENGINEERING)*, *37*(2), 3-10. https://doi.org/10.24200/j65.2021.52427.1951.

Huang, Y., & Huang, G. Q. (2010). Price coordination in a three-level supply chain with different channel structures using game-theoretic approach. *International Journal of Management Science and Engineering Management*, *5*(2), 83-94. https://doi.org/10.1080/17509653.2010.10671095.

Jaber, M. Y., & Goyal, S. K. (2008). Coordinating a three-level supply chain with multiple suppliers, a vendor and multiple buyers. *International Journal of Production Economics*, *116*(1), 95-103. https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2008.08.001.

Jaber, M. Y., Zanoni, S., & Zavanella, L. E. (2014). Economic order quantity models for imperfect items with buy and repair options. *International Journal of Production Economics*, *155*, 126-131. https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2013.10.014.

Jaber, M. Y., Khan, M., & Ahmad, A. R. (2014). An integrated supply chain model with errors in quality inspection and learning in production. *Omega*, *42*(1), 16-24. https://doi.org/10.1016/j.omega.2013.02.002.

Kreng, V. B., & Tan, S. J. (2011). Optimal replenishment decision in an EPQ model with defective items under supply chain trade credit policy. *Expert Systems with Applications*, *38*(8), 9888-9899. https://doi.org/10.1016/j.eswa.2011.02.040.

Liao, G. L. (2015). Production and maintenance policies for an EPQ model with perfect repair, rework, free-repair warranty, and preventive maintenance. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, *46*(8), 1129-1139. https://doi.org/10.1109/TSMC.2015.2465961.

Mokhtari, H., & Asadkhani, J. (2020). Extended economic production quantity models with preventive maintenance. *Scientia Iranica*, *27*(6), 3253-3264. https://doi.org/10.24200/sci.2019.51199.2055.

Mokhtari, H., & Rezvan, M. T. (2020). A single-supplier, multi-buyer, multi-product VMI production-inventory system under partial backordering. *Operational Research*, *20*(1), 37-57. https://doi.org/10.1007/s12351-017-0311-z.

Mokhtari, H., Hasani, A., & Fallahi, A. (2021). Multi-product constrained economic production quantity models for imperfect quality items with rework. *International Journal of Industrial Engineering & Production Research*, *32*(2), 1-23. https://doi.org/10.22068/ijiepr.950.

Munson, C. L., & Rosenblatt, M. J. (2001). Coordinating a three-level supply chain with quantity discounts. *IIE transactions*, *33*(5), 371-384. https://doi.org/10.1023/A:1011097012536.

Namnabat, S., Mokhtari, H., & Fallahi, A. (2025). Extended inventory planning models for repairable imperfect quality items under withdrawal policies and inspection errors. *Journal of Industrial and Production Engineering*, 42(6), 625-650. https://doi.org/10.1080/21681015.2025.2478069.

Nobil, A. H., Nobil, E., Calvo, E. Z. R., & Hajiaghaei-Keshteli, M. (2025). An EPQ-based Optimization Approach to Variable-Rate Screening in Supply Chain Production Systems. *Supply Chain Analytics*, 11, 100143. https://doi.org/10.1016/j.sca.2025.100143.

Nobil, A.H., Nobil, E., Sedigh, A.H.A., Cárdenas-Barrón, L.E., Garza-Núñez, D., Treviño-Garza, G., Céspedes-Mota, A., de Jesús Loera-Hernández, I. and Smith, N.R., (2024). Economic production quantity models for an imperfect manufacturing system with strict inspection. *Ain Shams Engineering Journal*, *15*(5), 102714. https://doi.org/10.1016/j.asej.2024.102714.

Pal, S., Mahapatra, G. S., & Samanta, G. P. (2016). A three-layer supply chain EPQ model for price- and stock-dependent stochastic demand with imperfect item under rework. *Journal of Uncertainty Analysis and Applications*, *4*(1), 10. https://doi.org/10.1186/s40467-016-0050-3.

Salameh, M. K., & Jaber, M. Y. (2000). Economic production quantity model for items with imperfect quality. *International journal of production economics*, *64*(1-3), 59-64. https://doi.org/10.1016/S0925-5273(99)00044-4.

Sana, S. S. (2011). A production-inventory model of imperfect quality products in a three-layer supply chain. *Decision support systems*, *50*(2), 539-547. https://doi.org/10.1016/j.dss.2010.11.012.

Sebatjane, M. (2024). Three-echelon circular economic production–inventory model for deteriorating items with imperfect quality and carbon emissions considerations under various emissions policies. *Expert Systems with Applications*, *252*, 124162. https://doi.org/10.1016/j.eswa.2024.124162.

Sebatjane, M., & Adetunji, O. (2024). A four-echelon supply chain inventory model for growing items with imperfect quality and errors in quality inspection. *Annals of operations research*, *335*(1), 327-359. https://doi.org/10.1007/s10479-023-05501-4.

Taleizadeh, A. A., & Noori-Daryan, M. (2016). Pricing, manufacturing and inventory policies for raw material in a three-level supply chain. *International Journal of Systems Science*, *47*(4), 919-931. https://doi.org/10.1080/00207721.2014.909544.

Wang, K. J., Lin, Y. S., & Jonas, C. P. (2011). Optimizing inventory policy for products with time-sensitive deteriorating rates in a multi-echelon supply chain. *International Journal of Production Economics*, *130*(1), 66-76. https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2010.11.009.

Yoo, S. H., Kim, D., & Park, M. S. (2009). Economic production quantity model with imperfect-quality items, two-way imperfect inspection and sales return. *International Journal of Production Economics*, *121*(1), 255-265. https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2009.05.008.

Zhou, Y. W., Chen, J., Wu, Y., & Zhou, W. (2015). EPQ models for items with imperfect quality and one-time-only discount. *Applied Mathematical Modelling*, *39*(3-4), 1000-1018. https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.07.017.

[1] Economic Production Quantity (EPQ)
[2] Salameh and Jaber
[3] Munson and Rosenblatt
[4] Yoo et al.
[5] Kreng & Tan
[6] Jaber et al.
[7] Zhou et al.
[8] Mokhtari & Rezvan
[9] Kumar & Mahata
[10] Mokhtari et al.
[11] Sana
[12] Wang et al.
[13] Aldaihani & Darwish
[14] Liao
[15] Mokhtari & Asadkhani
[16] Asadkhani et al.
[17] Ding et al.
[18] Jaber & Goyal
[19] Ding & Chen
[20] Huang & Huang
[21] Chen
[22] Taleizadeh & Noori-Daryan
[23] Stackelberg-Nash
[24] Badi et al.
[25] Glock & Jaber
[26] Bazan et al.
[27] Pal et al.
[28] Alfares & Attia
[29] Al-Salamah
[30] Cárdenas-Barrón et al.
[31] Haji & Rezaei Zeynali
[32] Sebatjane & Adetunji
[33] Nobil et al.
[34] Nanabat et al.

**This page intentionally left blank.**