

هم‌ریختی‌ها و تجزیه در گروه‌های تعمیم‌یافته متناهی

نصرت‌اله شجره پورصلواتی^{ID}

چکیده. این مقاله تحلیل جامعی از تعامل بین هم‌ریختی‌ها و قضایای تجزیه در گروه‌های تعمیم‌یافته متناهی ارائه می‌دهد. با تلفیق نظریه هم‌ریختی‌ها و ساختارهای خارج قسمتی با قضایای تجزیه، ما نتایج جدیدی درباره ساختار گروه‌های تعمیم‌یافته متناهی پیدا می‌کنیم. ما مفهوم تجزیه هم‌ریختی را معرفی کرده و اثبات می‌کنیم که هر گروه تعمیم‌یافته متناهی را می‌توان به حاصل ضرب مستقیم تصویر آن تحت یک هم‌ریختی و یک ساختار هسته تجزیه کرد. همچنین شرایطی را پیدا می‌کنیم که تحت آن تجزیه، ویژگی‌های هم‌ریختی را حفظ می‌کند. نتایج ما یک چارچوب یکپارچه برای درک ساختار گروه‌های تعمیم‌یافته متناهی و هم‌ریختی‌های آنها فراهم می‌کند.

۱. مقدمه

مفهوم گروه‌های تعمیم‌یافته، که توسط مولایی معرفی شد [۲]، تعمیم قابل توجهی از نظریه گروه کلاسیک ارائه می‌دهد. برخلاف گروه‌های کلاسیک با یک عنصر همانی منفرد، گروه‌های تعمیم‌یافته اجازه وجود عناصر همانی فردی برای هر عضو را می‌دهند. این انعطاف‌پذیری معماری، آن‌ها را با نیم‌گروه‌های کاملاً ساده هم‌ریخت می‌سازد، همان‌طور که توسط آرائوژو و کونیچنی نشان داده شد [۲].

پژوهش روی گروه‌های تعمیم‌یافته، ارتباطات عمیقی با زمینه‌های مختلف ریاضی از جمله نظریه شبه‌گروه [۶]، جبر توپولوژیک [۱] و فیزیک نظری از طریق نظریه اندازه‌ی یکپارچه [۴] آشکار ساخته است. با این وجود، بسیاری از ویژگی‌های اساسی نظریه گروه به‌طور طبیعی به این ساختارها تعمیم نمی‌یابند، همان‌طور که توسط پورصلواتی مورد تأکید قرار گرفته است [۵]. دو جریان اصلی پژوهشی در مطالعه گروه‌های تعمیم‌یافته ظهور کرده‌اند. اولین جریان بر هم‌ریختی‌ها و ساختارهای خارج قسمتی متمرکز است، که قضایای اساسی مشابه آن‌ها در نظریه گروه را پیدا می‌کند اما با تفاوت‌های منحصر به فرد ناشی از تعدد عناصر همانی. جریان دوم بر قضایای تجزیه و ویژگی‌های تقسیم‌پذیری متمرکز است، که معماری پیچیده این موجودات جبری را آشکار می‌سازد.

این مقاله این دو جریان پژوهشی را با کاوش در تعامل بین هم‌ریختی‌ها و قضایای تجزیه در گروه‌های تعمیم‌یافته متناهی پل می‌زند. ما مفهوم تجزیه هم‌ریختی را معرفی کرده و اثبات می‌کنیم که هر گروه تعمیم‌یافته متناهی را می‌توان به حاصل ضرب

رده‌بندی موضوعی ریاضیات ۲۰۲۰ (MSC 2020): کد، کد.

عبارات و کلمات کلیدی: گروه‌های تعمیم‌یافته، هم‌ریختی‌ها، قضایای تجزیه، نیم‌گروه‌های متناهی، نیم‌گروه‌های کاملاً ساده.

نوع مقاله: پژوهشی

دبیرتخصصی رابط: علیرضا عبدالحی.

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۹/۱۰ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۳/۳۱ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰X/XX/XX

ارجاع به مقاله: ن. ۱. شجره پورصلواتی، هم‌ریختی‌ها و تجزیه در گروه‌های تعمیم‌یافته متناهی، ریاضی و جامعه، -، (۱۴۰X) شماره -، صص. XX-XX.

<https://dx.doi.org/10.22108/msci.2026.147643.1777>

مستقیم تصویر آن تحت یک هم‌ریختی و یک ساختار هسته تجزیه کرد. همچنین شرایطی را پیدا می‌کنیم که تحت آن تجزیه، ویژگی‌های هم‌ریختی را حفظ می‌کند.

۲. پیش‌نیازها

در این بخش، تعاریف اساسی و ویژگی‌های گروه‌های تعمیم‌یافته و همچنین نتایج کلیدی از نظریه هم‌ریختی و قضایای تجزیه را مرور می‌کنیم.

تعریف ۱.۰۲ [۳] یک گروه تعمیم‌یافته مجموعه‌ای ناتهی G مجهز به یک عمل دوتایی $\cdot$ است که برای هر $x, y, z \in G$ در اصول زیر صدق می‌کند:

$$(1) \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \quad (\text{شرکت‌پذیری})$$

(۲) برای هر یک $x \in G$ ، یک عنصر یکتا $e(x) \in G$ وجود دارد به‌طوری‌که $x \cdot e(x) = e(x) \cdot x = x$ (همانی موضعی)

(۳) برای هر یک $x \in G$ ، یک عنصر $x^{-1} \in G$ وجود دارد به‌طوری‌که $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e(x)$ (معکوس موضعی)

تعریف ۲.۰۲ برای یک گروه تعمیم‌یافته $(G, \cdot)$ و یک عنصر $x \in G$ ، مجموعه $G(x) = \{y \in G \mid e(y) = e(x)\}$ زیرگروه اصلی G در x نامیده می‌شود.

قضیه ۳.۰۲ [۵] برای هر $x \in G$ ، مجموعه $G(x)$ تحت عمل G یک گروه است. علاوه بر این، اجتماع ناتهی و مجزا از زیرگروه‌های اصلی خود است، یعنی $G = \bigcup_{x \in G} G(x)$.

اثبات. فرض کنید $x \in G$ یک عنصر دلخواه باشد. مجموعه $G(x) = \{y \in G \mid e(y) = e(x)\}$ را در نظر بگیرید. برای هر $y, z \in G(x)$ داریم:

$$e(y \cdot z) = e(y) \cdot e(z) = e(x) \cdot e(x) = e(x)$$

پس $y \cdot z \in G(x)$. همچنین $e(x) \in G(x)$ و برای هر $y \in G(x)$ داریم $y^{-1} \in G(x)$ زیرا:

$$e(y^{-1}) = e(y) = e(x)$$

بنابراین $G(x)$ یک زیرگروه از G است. از آنجا که G اجتماع زیرگروه‌های اصلی است و این زیرگروه‌ها به دلیل تفاوت در عناصر همانی مجزا هستند، حکم ثابت می‌شود. $\square$

مثال ۴.۰۲ [۲] فرض کنید H یک گروه با عنصر همانی e_H باشد و I, Γ مجموعه‌های ناتهی باشند. ماتریس $\Gamma \times I$ مانند $P = (g_{\gamma i})$ را روی H در نظر بگیرید. عمل دوتایی $\cdot$ را روی $I \times H \times \Gamma$ به‌صورت زیر تعریف کنید:

$$(i, k, \gamma) \cdot (j, h, \mu) = (i, kg_{\gamma j}h, \mu)$$

آنگاه $(G, \cdot) = (I \times H \times \Gamma, \cdot)$ یک گروه تعمیم‌یافته است. عنصر همانی و معکوس به‌صورت زیر داده می‌شوند:

$$e((i, k, \gamma)) = (i, g_{\gamma i}^{-1}, \gamma), \quad (i, k, \gamma)^{-1} = (i, g_{\gamma i}^{-1}k^{-1}g_{\gamma i}^{-1}, \gamma)$$

برای هر عنصر (i, k, γ) ، زیرگروه اصلی آن $G((i, k, \gamma)) = \{(i, h, \gamma) \mid h \in H\}$ است که با گروه H هم‌ریخت است.

تعریف ۵.۲. فرض کنید $(G, \cdot)$ و $(H, *)$ گروه‌های تعمیم‌یافته باشند. یک نگاشت $\phi: G \rightarrow H$ را هم‌ریختی گروه تعمیم‌یافته می‌نامیم اگر برای هر $x, y \in G$:

$$\phi(x \cdot y) = \phi(x) * \phi(y)$$

اگر ϕ دوسویی باشد، آن را یک‌ریختی می‌نامیم.

قضیه ۶.۲. فرض کنید $\phi: G \rightarrow H$ یک هم‌ریختی بین گروه‌های تعمیم‌یافته باشد. آنگاه برای هر $x \in G$:

$$\phi(e_G(x)) = e_H(\phi(x)) \quad (1)$$

$$\phi(x^{-1}) = (\phi(x))^{-1} \quad (2)$$

اثبات. فرض کنید $\phi: G \rightarrow H$ یک هم‌ریختی و $x \in G$ باشد.

(۱) از هم‌ریختی بودن ϕ داریم:

$$\phi(x) = \phi(x \cdot e_G(x)) = \phi(x) * \phi(e_G(x))$$

پس $\phi(e_G(x))$ همانی $\phi(x)$ در H است، یعنی $\phi(e_G(x)) = e_H(\phi(x))$.
(۲) نیز داریم:

$$e_H(\phi(x)) = \phi(e_G(x)) = \phi(x \cdot x^{-1}) = \phi(x) * \phi(x^{-1})$$

پس $\phi(x^{-1})$ معکوس $\phi(x)$ در H است.

□

تعریف ۷.۲. هسته یک هم‌ریختی $\phi: G \rightarrow H$ مجموعه $\ker(\phi) = \{x \in G \mid \phi(x) = e_H(\phi(x))\}$ است.

قضیه ۸.۲. هسته $\ker(\phi)$ یک هم‌ریختی $\phi: G \rightarrow H$ یک زیرگروه تعمیم‌یافته از G است.

اثبات. فرض کنید $\phi: G \rightarrow H$ یک هم‌ریختی باشد. برای $x, y \in \ker(\phi)$ داریم:

$$\phi(x \cdot y) = \phi(x) * \phi(y) = e_H(\phi(x)) * e_H(\phi(y)) = e_H(\phi(x \cdot y))$$

پس $x \cdot y \in \ker(\phi)$. همچنین $e_G(x) \in \ker(\phi)$ و $x^{-1} \in \ker(\phi)$. بنابراین $\ker(\phi)$ یک زیرگروه تعمیم‌یافته است. □

قضیه ۹.۲. فرض کنید $\phi: G \rightarrow H$ یک هم‌ریختی باشد. آنگاه $G/\ker(\phi) \cong \phi(G)$.

اثبات. ابتدا رابطه هم‌ارزی روی G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: برای $x, y \in G$,

$$x \sim y \quad \text{if and only if} \quad \phi(x) = \phi(y)$$

می‌توان نشان داد که این رابطه معادل با $x \cdot y^{-1} \in \ker(\phi)$ است. مجموعه خارج‌قسمتی $G/\ker(\phi)$ را مجموعه کلاس‌های هم‌ارزی این رابطه در نظر می‌گیریم. برای هر $x \in G$ ، کلاس هم‌ارزی $[x]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[x] = \{y \in G \mid \phi(y) = \phi(x)\}$$

حال عمل دوتایی روی $G/\ker(\phi)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[x] \cdot [y] = [x \cdot y]$$

این عمل به خوبی تعریف شده است زیرا اگر $[x] = [x']$ و $[y] = [y']$ ، آنگاه $\phi(x) = \phi(x')$ و $\phi(y) = \phi(y')$ و در نتیجه:

$$\phi(x \cdot y) = \phi(x) * \phi(y) = \phi(x') * \phi(y') = \phi(x' \cdot y')$$

$$[x \cdot y] = [x' \cdot y']$$
 پس

اکنون نگاشت $\psi : G/\ker(\phi) \rightarrow \phi(G)$ را با $\psi([x]) = \phi(x)$ تعریف می‌کنیم. این نگاشت به خوبی تعریف شده است زیرا اگر $[x] = [y]$ آنگاه $\phi(x) = \phi(y)$. بررسی می‌کنیم که ψ یک هم‌ریختی است:

$$\psi([x] \cdot [y]) = \psi([x \cdot y]) = \phi(x \cdot y) = \phi(x) * \phi(y) = \psi([x]) * \psi([y])$$

همچنین ψ پوشاست زیرا برای هر $x \in G$ ، $h \in \phi(G)$ وجود دارد که $\phi(x) = h$ و بنابراین $\psi([x]) = h$. برای یکبه یک بودن ψ ، فرض کنید $\psi([x]) = \psi([y])$. آنگاه $\phi(x) = \phi(y)$ ، بنابراین $x \sim y$ و $[x] = [y]$. در نتیجه ψ یک یکرختی است و $G/\ker(\phi) \cong \phi(G)$. □

تعریف ۱۰.۲. یک گروه تعمیم‌یافته G را به شدت نرمال می‌نامیم اگر برای هر $x, y \in G$:

$$e(xy) = e(x)e(y) \quad (۱)$$

$$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} \quad (۲)$$

قضیه ۱۱.۲. برای یک گروه تعمیم‌یافته متناهی به شدت نرمال G :

(۱) تمام گروه‌های موضعی $G(x) = \{y \in G : e(y) = e(x)\}$ هم‌ریخت هستند.

(۲) وجود دارند یک گروه H و یک مجموعه متناهی A به طوری که $G \cong A \times H$ به عنوان گروه‌های تعمیم‌یافته، که عمل روی $A \times H$ توسط $(a, h)(b, k) = (a, hk)$ داده می‌شود.

اثبات. فرض کنید G یک گروه تعمیم‌یافته متناهی به شدت نرمال باشد.

(۱) برای هر $x, y \in G$ ، $G(x)$ و $G(y)$ زیرگروه‌هایی با عمل یکسان هستند. از شدت نرمال بودن، نگاشت $f : G(x) \rightarrow G(y)$ با $f(z) = z \cdot e(y)$ یک یکرختی است.

(۲) از (۱) می‌دانیم تمام $G(x)$ هم‌ریخت به یک گروه H هستند. اگر A مجموعه نماینده‌های زیرگروه‌های اصلی باشد، آنگاه $G \cong A \times H$ با عمل $(a, h)(b, k) = (a, hk)$.

□

۳. تجزیه هم‌ریختی گروه‌های تعمیم‌یافته متناهی

در این بخش، مفهوم تجزیه هم‌ریختی را معرفی کرده و قضایای اصلی خود را پیدا می‌کنیم.

تعریف ۱۰.۳. فرض کنید G یک گروه تعمیم‌یافته متناهی و $\phi : G \rightarrow H$ یک هم‌ریختی باشد. یک تجزیه هم‌ریختی از G نسبت به ϕ یک زوج (K, L) است که در آن K یک زیرگروه تعمیم‌یافته از G هم‌ریخت با $\ker(\phi)$ و L یک زیرگروه تعمیم‌یافته از G هم‌ریخت با $\phi(G)$ است به طوری که $G \cong K \times L$ به عنوان گروه‌های تعمیم‌یافته.

قضیه ۲۰.۳. هر گروه تعمیم‌یافته متناهی به شدت نرمال G نسبت به هر هم‌ریختی $\phi : G \rightarrow H$ یک تجزیه هم‌ریختی می‌پذیرد.

اثبات. فرض کنید G یک گروه تعمیم‌یافته متناهی به شدت نرمال و $\phi : G \rightarrow H$ یک هم‌ریختی باشد. توسط قضیه ۵.۲، $G \cong A \times H_G$ برای برخی گروه H_G و مجموعه متناهی A . اجازه دهید $\psi : G \rightarrow A \times H_G$ این هم‌ریختی باشد. ترکیب $\phi \circ \psi^{-1} : A \times H_G \rightarrow H$ را در نظر بگیرید. اجازه دهید $K' = \ker(\phi \circ \psi^{-1})$. از آنجا که $A \times H_G$ یک حاصل ضرب مستقیم است، K' یک زیرگروه تعمیم‌یافته از $A \times H_G$ است. می‌توانیم بنویسیم $K' = A' \times H'$ که در آن $A' \subseteq A$ و $H' \leq H_G$.

اجازه دهید $K = \psi^{-1}(K')$. آنگاه K یک زیرگروه تعمیم‌یافته از G است و $K \cong \ker(\phi)$. تصویر $\phi \circ \psi^{-1}$ با $(A/A') \times (H_G/H')$ هم‌ریخت است. اجازه دهید $L' = \{(a, h) \in A \times H_G \mid (a, h) \in K'\}$. آنگاه $L = \psi^{-1}(L')$ یک زیرگروه تعمیم‌یافته از G هم‌ریخت با $(A/A') \times (H_G/H')$ باشد. در نهایت، $G \cong K \times L$ زیرا $G \cong (A' \times H') \times ((A/A') \times (H_G/H')) \cong A \times H_G$. $\square$

قضیه ۳.۳. فرض کنید G یک گروه تعمیم‌یافته متناهی و $\phi : G \rightarrow H$ یک هم‌ریختی باشد. اگر G به شدت نرمال باشد، آنگاه تجزیه هم‌ریختی G نسبت به ϕ ویژگی نرمال بودن شدید را حفظ می‌کند.

اثبات. توسط قضیه قبلی، $G \cong K \times L$ ، که در آن $K \cong \ker(\phi)$ و $L \cong \phi(G)$. از آنجا که G به شدت نرمال است، توسط قضیه ۵.۲، تمام گروه‌های موضعی $G(x)$ هم‌ریخت هستند و $G \cong A \times H$ برای برخی گروه H و مجموعه متناهی A . اجازه دهید $K = \ker(\phi)$ و L یک زیرگروه تعمیم‌یافته از G هم‌ریخت با $\phi(G)$ باشد. باید نشان دهیم که هر دو K و L به شدت نرمال هستند.

(۱) K به شدت نرمال است: برای هر $k_1, k_2 \in K$ داریم

$$\begin{aligned} e_K(k_1 \cdot k_2) &= e_G(k_1 \cdot k_2) \\ &= e_G(k_1) \cdot e_G(k_2) \quad (\text{زیرا } G \text{ به شدت نرمال است}) \\ &= e_K(k_1) \cdot e_K(k_2) \end{aligned}$$

به‌طور مشابه،

$$(k_1 \cdot k_2)^{-1} = k_2^{-1} \cdot k_1^{-1} \quad (\text{زیرا } G \text{ به شدت نرمال است})$$

(۲) L به شدت نرمال است: از آنجا که $L \cong \phi(G)$ و ϕ یک هم‌ریختی است، برای هر $l_1, l_2 \in L$ داریم

$$\begin{aligned} e_L(l_1 \cdot l_2) &= e_G(l_1 \cdot l_2) \\ &= e_G(l_1) \cdot e_G(l_2) \quad (\text{زیرا } G \text{ به شدت نرمال است}) \\ &= e_L(l_1) \cdot e_L(l_2) \end{aligned}$$

به‌طور مشابه،

$$(l_1 \cdot l_2)^{-1} = l_2^{-1} \cdot l_1^{-1} \quad (\text{زیرا } G \text{ به شدت نرمال است})$$

بنابراین، هر دو K و L به شدت نرمال هستند و تجزیه هم‌ریختی G نسبت به ϕ ویژگی نرمال بودن شدید را حفظ می‌کند. $\square$

قضیه ۴.۳. فرض کنید G یک گروه تعمیم‌یافته متناهی به شدت نرمال باشد و $\phi : G \rightarrow H$ یک همریختی باشد. اگر $G \cong K \times L$ یک تجزیه همریختی نسبت به ϕ باشد، آنگاه برای هر همریختی $\psi : G \rightarrow H'$ ، تجزیه G به $K \times L$ ویژگی‌های همریختی ψ را حفظ می‌کند اگر و تنها اگر ψ با تصویرهای طبیعی روی K و L جابجا شود.

اثبات. ($\Rightarrow$) فرض کنید تجزیه G به $K \times L$ ویژگی‌های همریختی ψ را حفظ کند. باید نشان دهیم که ψ با تصویرهای طبیعی روی K و L جابجا می‌شود.

اجازه دهید $\pi_K : G \rightarrow K$ و $\pi_L : G \rightarrow L$ تصویرهای طبیعی باشند. از آنجا که $G \cong K \times L$ ، هر عنصر $g \in G$ را می‌توان به صورت یکتا به شکل $g = k \cdot l$ نوشت که در آن $k \in K$ و $l \in L$. برای هر $g = k \cdot l \in G$ داریم:

$$\begin{aligned}\psi(g) &= \psi(k \cdot l) \\ &= \psi(k) * \psi(l) \quad (\text{زیرا } \psi \text{ یک همریختی است}) \\ &= \psi(\pi_K(g)) * \psi(\pi_L(g))\end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که ψ با تصویرهای طبیعی جابجا می‌شود.

($\Leftarrow$) فرض کنید ψ با تصویرهای طبیعی روی K و L جابجا شود. باید نشان دهیم که تجزیه G به $K \times L$ ویژگی‌های همریختی ψ را حفظ می‌کند.

برای هر $g_1 = k_1 \cdot l_1$ و $g_2 = k_2 \cdot l_2$ در G ، داریم:

$$\begin{aligned}\psi(g_1 \cdot g_2) &= \psi((k_1 \cdot l_1) \cdot (k_2 \cdot l_2)) \\ &= \psi(k_1 \cdot k_2 \cdot l_1 \cdot l_2) \quad (\text{از شرکت‌پذیری و جابجایی در گروه‌های به شدت نرمال}) \\ &= \psi(\pi_K(g_1 \cdot g_2)) * \psi(\pi_L(g_1 \cdot g_2)) \quad (\text{از فرض جابجایی}) \\ &= \psi(k_1 \cdot k_2) * \psi(l_1 \cdot l_2) \\ &= [\psi(k_1) * \psi(k_2)] * [\psi(l_1) * \psi(l_2)] \quad (\text{زیرا } \psi \text{ یک همریختی است}) \\ &= \psi(k_1) * \psi(l_1) * \psi(k_2) * \psi(l_2) \\ &= \psi(g_1) * \psi(g_2)\end{aligned}$$

□

بنابراین، ψ یک همریختی است و تجزیه ویژگی‌های همریختی را حفظ می‌کند.

۴. کاربردها و مثال‌ها

در این بخش، ۳ مثال ارائه می‌شود.

مثال ۱.۴. فرض کنید $G = I \times \mathbb{Z}_6 \times \Gamma$ با $I = \{1, 2, 3\}$ ، $\Gamma = \{1, 2\}$ و ماتریس بدیهی $P = (1)$. آنگاه $|G| = 36$.

همریختی $\phi : G \rightarrow \mathbb{Z}_6$ را با $\phi(i, h, \gamma) = h$ تعریف کنید. آنگاه $\ker(\phi) = \{(i, \circ, \gamma) \mid i \in I, \gamma \in \Gamma\}$ ، که با $I \times \Gamma$ همریخت است. تصویر $\phi(G) = \mathbb{Z}_6$.

توسط قضیه ما، $G \cong \ker(\phi) \times \phi(G) \cong (I \times \Gamma) \times \mathbb{Z}_6$.

مثال ۲.۴. فرض کنید $G = I \times \mathbb{Z}_2 \times \Gamma$ با $I = \{1, 2, 3\}$ ، $\Gamma = \{1, 2\}$ و $P = (1)$. آنگاه $|G| = 3 \times 2 \times 2 = 12$. هم‌ریختی $\phi : G \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ را با $\phi(i, h, \gamma) = (h, \gamma \bmod 2)$ تعریف کنید. آنگاه $\ker(\phi) = \{(i, 0, 1) \mid i \in I\}$. که با I هم‌ریخت است. تصویر $\phi(G) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. توسط قضیه ما، $G \cong \ker(\phi) \times \phi(G) \cong I \times (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$.

مثال ۳.۴. یک مثال از یک گروه تعمیم‌یافته که به شدت نرمال نیست را در نظر بگیرید. فرض کنید $G = I \times S_3 \times \Gamma$ با $I = \{1, 2\}$ ، $\Gamma = \{1, 2\}$ و ماتریس P غیربدیهی باشد. اگر P طوری انتخاب شود که $g_{\gamma i}$ عناصر غیرمرکزی در S_3 باشند، آنگاه G ممکن است به شدت نرمال نباشد. در این حالت، تجزیه هم‌ریختی ممکن است وجود نداشته باشد یا ویژگی‌های هم‌ریختی را حفظ نکند.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله، ما تحلیل جامعی از تعامل بین هم‌ریختی‌ها و قضایای تجزیه در گروه‌های تعمیم‌یافته متناهی ارائه داده‌ایم. ما مفهوم تجزیه هم‌ریختی را معرفی کرده و اثبات کرده‌ایم که هر گروه تعمیم‌یافته متناهی به شدت نرمال را می‌توان به حاصل ضرب مستقیم تصویر آن تحت یک هم‌ریختی و یک ساختار هسته تجزیه کرد. همچنین شرایطی را پیدا کرده‌ایم که تحت آن تجزیه، ویژگی‌های هم‌ریختی را حفظ می‌کند.

نتایج ما یک چارچوب یکپارچه برای درک ساختار گروه‌های تعمیم‌یافته متناهی و هم‌ریختی‌های آن‌ها فراهم می‌کند. این چارچوب کاربردهایی در زمینه‌های مختلف ریاضی از جمله نظریه نیم‌گروه، نظریه گروه و ساختارهای جبری دارد.

مراجع

- [1] M. R. Ahmadi Zand and S. Rostami, Precompact topological generalized groups, *J. Mahani Math. Res. Cent.*, **5** (2016), 27–32.
- [2] J. Araújo and J. Konieczny, Molaei's generalized-groups are completely simple semigroups, *Bul. Inst. Politeh. Iași. Sect. I. Mat. Mec. Teor. Fiz.*, **48** (2002), no. 1-2, 1–5.
- [3] M. R. Molaei, Generalized groups, *Proceeding of the International Conference on Algebra*, (1998), 14–17.
- [4] M. R. Molaei, Generalized actions, in *Geometry, Integrability and Quantization (Varna)*, (1999), 175–179.
- [5] N. Shajareh Poursalavati, Some properties of finite Generalized-groups, *J. Mahani Math. Res.*, **13** (2024), 101–107.
- [6] J. D. H. Smith, *An introduction to quasigroups and their representations*, CRC Press, 2007.

نصرت‌اله شجره پورصلواتی

بخش ریاضی محض، دانشگاه شهید باهنر کرمان، میدان پژوهش، کرمان، ایران
salavati@uk.ac.ir

نصرت‌اله شجره پورصلواتی متولد فروردین ماه ۱۳۵۰ در شهر کرمان است. وی در سال ۱۳۶۹ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی محض دانشگاه شهید باهنر کرمان شد و در سال ۱۳۷۴ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض شد.

