

قضایای ارگودیک برای یک دنباله از نگاشت‌ها در فضاهای باناخ

علی یوسفی پیربستی^{ID} و هادی خطیب‌زاده^{ID*}

چکیده. در این مقاله، همگرایی ارگودیک برای دنباله‌ای از نگاشت‌های غیرانبساطی در فضاهای باناخ یکنواخت محدب و یکنواخت هموار بررسی می‌شود. با معرفی تعریف دیگری از مدار تقریبی سعی می‌شود که شرط همگرایی یکنواخت با شرط ضعیف‌تری جایگزین شود. نتایج ما تعمیمی از برخی قضایای کلاسیک همگرایی ارگودیک برای نگاشت‌های غیرانبساطی است.

۱. مقدمه

نظریه ارگودیک غیرخطی برای نگاشت‌های غیرانبساطی یکی از موضوعات اساسی در آنالیز تابعی غیرخطی است که ارتباط نزدیکی با نظریه نقاط ثابت و روش‌های تکرار شونده دارد. این حوزه، افزون بر اهمیت نظری، نقش مهمی در مطالعه الگوریتم‌های تقریب نقطه ثابت، مسائل بهینه‌سازی و تحلیل رفتار مجانبی سیستم‌های تحولی از نوع یکنوا ایفا می‌کند. نگاشت $T: C \rightarrow C$ را غیرانبساطی می‌گویند اگر برای هر x و y در C ، داشته باشیم: $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$. منظور از یک قضیه ارگودیک (میانگین) برای نگاشت T ، قضیه‌ای است که تحت شرایط مناسب در مورد همگرایی میانگین سزارو تکرارهای نگاشت T روی یک نقطه دلخواه $x \in C$ یعنی

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k x$$

حکم می‌کند.

قضیه ارگودیک میانگین فون نویمان نقطه آغاز این خط پژوهش در فضای هیلبرت برای نگاشت‌های غیرانبساطی خطی است.

قضیه ۱.۱ (ارگودیک فون نویمان^۱). [۱۸] فرض کنید T یک نگاشت انقباضی خطی در یک فضای هیلبرت حقیقی H باشد یعنی برای هر $x \in H$ داریم: $\|Tx\| \leq \|x\|$. آنگاه برای هر $x \in H$ ، همگرایی قوی به Px است که در آن نگاشت $P: H \rightarrow \text{Fix}(T)$ یک تصویر متعامد از H یعنی برای هر x ، $P^2x = PPx = Px$ از $P^2x = PPx = Px$ بر روی مجموعه نقاط

عبارات و کلمات کلیدی: نگاشت غیرانبساطی، قضیه ارگودیک، مدار تقریبی، نقطه ثابت، فضای باناخ یکنواخت محدب، همگرایی تقریبی.

* نویسنده مسئول

دبیر تخصصی رابط: علیرضا امینی‌هرندی

نوع مقاله: پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۱۰/۱۷ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۳/۲۰ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۵/۰۳/۲۰

ارجاع به مقاله: ع. یوسفی پیربستی و ه. خطیب‌زاده، قضایای ارگودیک برای یک دنباله از نگاشت‌ها در فضاهای باناخ، ریاضی و جامعه، XX شماره X، (۱۴۰۳) X-X.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2026.148065.1786>

¹Von Neumann Ergodic Theorem

ثابت T ، $Fix(T) = \{x \in H : Tx = x\}$ که یک زیرفضای خطی و بسته از H است) باشد. یعنی فضای هیلبرت H به صورت تجزیه متعامد

$$H = Fix(T) \oplus \overline{Ran(I - T)}$$

(جمع مستقیم مجموعه نقاط ثابت T با بستار برد $I - T$) قابل بیان است.

این قضیه توسط بیرخوف [۷] و ریس [۱۷] به فضاهای باناخ یکنواخت محدب تعمیم داده شد. حدود ۴۰ سال بعد بیون این قضیه را به نگاشت‌های غیرخطی تعمیم داد. او نشان داد که برای یک نگاشت غیرانبساطی روی یک زیرمجموعه محدب، بسته و ناتهی از یک فضای هیلبرت، وجود نقطه ثابت معادل با این است که میانگین‌های ارگودیک تکرارها همگرای ضعیف به یک نقطه ثابت است.

قضیه ۲.۱ (ارگودیک بیون^۲). [۵] فرض کنید C یک زیرمجموعه محدب، بسته و ناتهی از یک فضای هیلبرت حقیقی H باشد. فرض کنید $T : C \rightarrow C$ یک نگاشت غیرانبساطی باشد. آنگاه گزاره‌های زیر معادل هستند:

۱. $Fix(T) \neq \emptyset$.

۲. برای هر $x \in C$ ، دنباله $\{S_n\}$ تعریف شده با $S_n x := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k x$ ، همگرای ضعیف است. در این حالت اگر $S_n x$ همگرای ضعیف به Px باشد، آنگاه $P : C \rightarrow Fix(T)$ غیرانبساطی است به طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، داریم: $P^2 = P$ و $PT^n = T^n P = P$. همچنین برای هر $x \in C$ ، داریم: $Px \in \overline{co}(\{T^i x\}_{i \geq 0})$ (که $\overline{co}(\{T^i x\})$ بستار مجموعه تمام ترکیبات محدب متناهی از $T^i x$ ها است).

در [۱۶]، رش نتیجه بیون را به فضاهای باناخ یکنواخت محدب با نرم دیفرانسیل‌پذیر فرشه^۳ تعمیم داد. فضای باناخ حقیقی X با نرم $\|\cdot\|$ را یکنواخت محدب گوئیم اگر برای هر $\epsilon \in (0, 2]$ ، $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ وجود داشته باشد که برای هر $x, y \in X$ با $\|x\| = \|y\| = 1$ و $\|x - y\| \geq \epsilon$ داشته باشیم: $\|\frac{1}{2}(x + y)\| < 1 - \delta$. فرض کنید X^* دوگان باشد. ما زوج دوگانی روی $X \times X^*$ را با $\langle \cdot, \cdot \rangle$ و کره واحد از X را با S_X نشان می‌دهیم. نرم از X در S_X را x می‌گوئیم دیفرانسیل‌پذیر گاتو^۴ (دیفرانسیل‌پذیر فرشه برای هر $x \in S_X$ است اگر

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}$$

برای هر نقطه $y \in S_X$ (یکنواخت برای $y \in S_X$) موجود باشد. یک فضای باناخ، هموار (یکنواخت هموار) است اگر نرم دیفرانسیل‌پذیر گاتو روی S_X (دیفرانسیل‌پذیر فرشه برای هر $x \in S_X$) باشد. اگر X هموار باشد، آنگاه نگاشت دوگانی J از X به توی X^* تعریف شده با

$$J(x) = \{x^* \in X^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

تک مقدار است.

اثبات ساده‌تری از قضیه ارگودیک غیرخطی توسط براک در [۹]، ارائه شد. او ابتدا نشان داد که هر نگاشت غیرانبساطی روی یک زیرمجموعه محدب، بسته و کراندار از یک فضای باناخ یکنواخت محدب در یک ویژگی که او آن را از نوع γ نام‌گذاری نمود، صدق می‌کند (برای تعریف آن بخش را ببینید). سپس قضیه ارگودیک را در فضاهای باناخ یکنواخت محدب با نرم دیفرانسیل‌پذیر فرشه نه تنها برای تکرارهای نگاشت، بلکه برای هر دنباله‌ای که مدار تقریبی آن باشد، اثبات کرد. یک دنباله $\{x_n\}$ یک مدار تقریبی^۵ از نگاشت T است اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \geq 0} \|x_{n+m} - T^m x_n\| = 0$.

²Baillon Ergodic Theorem ³Fréchet differentiable ⁴Gâteaux differentiable ⁵almost orbit

نکته دیگر در اثبات براک، آن بود که نه تنها همگرایی میانگین، بلکه همگرایی تقریبی مدارهای تقریبی تکرارها را اثبات کرد. می‌گوییم دنباله $\{x_n\}$ همگرایی تقریبی قوی (ضعیف) است اگر $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+k}$ یکنواخت روی k همگرایی قوی (ضعیف) باشد. این نوع همگرایی ابتدا توسط لورنتر [۱۴] معرفی شد. براک همچنین نشان داد که شرط لازم و کافی برای همگرایی ضعیف خود دنباله آن است که $T^{n+1}x - T^n x \rightarrow 0$.

در [۱۱]، هیرانو یک اثبات دیگری از قضیه براک در همان فضاهای باناخ یکنواخت محدب با نرم دیفرانسیل‌پذیر فرشه، ارائه نمود. همچنین در [۱۲]، قضیه ارگودیک را در فضاهای یکنواخت محدب با شرط اپیال^۶ اثبات نمود. نتایجی در مورد همگرایی میانگین قوی تحت شرایطی خاص‌تر روی نگاشت‌هایی دیگر نیز توسط محققان بررسی شده است که برای نمونه می‌توانید به [۶] مراجعه کنید. قضایای ارگودیک در فضاهای هیلبرت و باناخ، برای نیم‌گروه‌های غیرخطی-غیرانبساطی نیز مطالعه شده است. خواننده‌ی علاقمند می‌تواند نتایجی را در [۶، ۱۲، ۱۵] ببیند.

یک نیم‌گروه تک پارامتری $S = \{S(t) : t \geq 0\}$ از نگاشت‌های غیرانبساطی روی C ، یک خانواده از نگاشت‌های غیرانبساطی از C به‌توی خودش است، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

$$1. \text{ برای هر } s, t \geq 0 \text{ و } x \in C \text{ داشته باشیم: } S(s+t)x = S(s)S(t)x.$$

$$2. \text{ برای هر } x \in C \text{ داشته باشیم: } S(0)x = x.$$

$$3. \text{ برای } x \in C \text{ داشته باشیم: } \lim_{t \rightarrow 0} S(t)x = x.$$

$$4. \text{ برای هر } x, y \in C \text{ و } t \geq 0 \text{ داشته باشیم: } \|S(t)x - S(t)y\| \leq \|x - y\|.$$

این نیم‌گروه‌ها یک سیستم دینامیکی پیوسته هستند که رفتار جواب‌های معادلات تحولی با عملگر یکنوای ماکسیمال را توصیف می‌کنند. خواننده‌ی علاقمند می‌تواند نتایجی را در [۲، ۳، ۴] ببیند.

دینامیک گسسته تولید شده توسط یک نگاشت غیرانبساطی یا دینامیک پیوسته تولید شده توسط یک نیم‌گروه غیرانبساطی، دینامیک‌های خودگردان هستند یعنی قانون تحول مستقل از زمان است. اما اگر تحول سیستم وابسته به زمان باشد، آنگاه در حالت گسسته ما با یک دنباله از نگاشت‌های انقباضی و در حالت پیوسته با یک سیستم تحولی^۷ دو پارامتری $U = \{U(t, s) : t \geq s \geq 0\}$ از نگاشت‌های غیرانبساطی روی C که در شرایط زیر صدق می‌کند، روبرو خواهیم بود:

$$1. \text{ برای هر } t \geq s \geq r \geq 0 \text{ و } x \in C \text{ داشته باشیم: } U(t, s)U(s, r)x = U(t, r)x.$$

$$2. \text{ برای هر } t \geq s \geq 0 \text{ و } x, y \in C \text{ داشته باشیم: } \|U(t, s)x - U(t, s)y\| \leq \|x - y\|.$$

$$3. \text{ برای هر } t \geq 0 \text{ و } x \in C \text{ داشته باشیم: } U(t, t)x = x.$$

بررسی سیستم‌های تحولی از موضوع بحث این مقاله خارج است اما برگردیم به سیستم غیرانبساطی و غیرخودگردان یعنی دنباله $\{T_n\}$ از نگاشت‌های غیرانبساطی از C به خودش. همچنین $\{x_n\}$ و $\{z_n\}$ دنباله‌هایی باشند که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(1) \quad x_{n+1} = T_n x_n, \quad x_1 = x \in C$$

و

$$(2) \quad z_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k.$$

⁶Opial ⁷evolution system

آکاتسوکا و همکاران در [۱]، نشان دادند که در یک فضای هیلبرت حقیقی، اگر دنباله $\{T_n\}$ همگرایی نقطه‌وار به T شود و

$$(۳) \quad \text{Fix}(T) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{Fix}(T_n) \neq \emptyset.$$

آنگاه دنباله $\{z_n\}$ تعریف شده با (۲) همگرایی ضعیف به عنصری از $\text{Fix}(T)$ می‌شود. این نتیجه تعمیمی از قضیه ارگودیک غیرخطی بیون برای دنباله‌ای از نگاشت‌های غیرانبساطی است. این مطالعات می‌توانند در بررسی روش‌های تکراری، شامل نگاشت‌های غیرانبساطی، مانند تکرار مان^۸ و الگوریتم نقطه پروکسیمال، به‌کار روند. نویسندگان [۱۹] با جایگزین کردن فرض (۳) با شرط ضعیف‌تر زیر، برخی قضایای ارگودیک را برای دنباله‌هایی که با (۱) و (۲) در فضاهای هیلبرت حقیقی داده شده‌اند، اثبات کردند:

$$(۴) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|T_n q - q\| < \infty.$$

کوبایاشی و همکاران در [۱۳]، برای یک دنباله $\{x_n\}$ که شرط

$$(۵) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \geq 1} \|x_{n+m+1} - T_{n+m} \cdots T_n x_n\| = 0$$

را برقرار می‌کند، یک نتیجه همگرایی تقریبی ضعیف، به‌دست آوردند. شرط (۵) به‌وضوح، کلی‌تر از (۱) است. چنین دنباله‌ای، یک مدار تقریبی از دنباله $\{T_n\}$ نامیده می‌شود. یادآوری می‌کنیم که مفهوم مدار تقریبی برای تکرارهای یک نگاشت غیرخطی نخستین‌بار توسط براک [۹] معرفی شد. یک مدار تقریبی از یک نگاشت T به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \geq 1} \|x_{n+m} - T^m x_n\| = 0.$$

در [۹] نشان داده شده است که مدار تقریبی، رفتار مجانبی مشابهی با مدار T از خود نشان می‌دهد. برای یک دنباله از نگاشت‌ها، مفهوم مدار تقریبی همان‌گونه که در (۵) آمده است، بسط داده شده است [۱۳]. در اینجا، تعریف دیگری از مدار تقریبی را که به‌صورت زیر داده می‌شود، در نظر می‌گیریم:

$$(۶) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \geq 1} \|x_{n+m} - T_n^m x_n\| = 0.$$

نویسندگان در [۱۹] با این تعریف از مدار تقریبی برخی قضایای ارگودیک مشابه را اثبات کردند. در بخش بعد همگرایی تقریبی ضعیف را برای دنباله داده شده با (۶) اثبات می‌کنیم و در ادامه نشان خواهیم داد که می‌توان همگرایی یکنواخت T_n به T را با شرایط کلی‌تری جایگزین کرد. همچنین شرط (۴) را با یکی از شرایط زیر جایگزین می‌کنیم:

$$(۷) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \geq 1} \|T_{n+m} \cdots T_n q - q\| = 0$$

یا

$$(۸) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \geq 1} \|T_n^m q - q\| = 0, \quad \forall q \in \text{Fix}(T).$$

هر دو شرط ضعیف‌تر از (۳) هستند و شرط (۷) نیز ضعیف‌تر از (۴) است.

^۸Mann iteration

۲. نتایج اصلی

در [۱۳]، نویسندگان همگرایی مدار تقریبی یک دنباله داده شده با (۵) را اثبات کردند، که در آن $\{T_n\}$ دنباله‌ای از نگاشت‌های غیرانبساطی است که در فضاهای باناخ یکنواخت محدب با نرم دیفرانسیل پذیر فرشه همگرایی یکنواخت به یک نگاشت غیرانبساطی T می‌شود وقتی که شرط (۴) برقرار باشد. به راحتی دیده می‌شود که این نتیجه با جایگزین کردن شرط (۴) با شرط کلی‌تر (۷) نیز برقرار است (رجوع شود به [۱۳]، گزاره ۲.۲).

[۹] فرض کنید Γ مجموعه‌ای از توابع صعودی، پیوسته و محدب $\gamma: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ باشد که $\gamma(0) = 0$ می‌گوییم نگاشت $T: C \rightarrow X$ از نوع (γ) است اگر $\gamma \in \Gamma$ و برای هر $x, y \in C$ و $0 \leq \lambda \leq 1$ ، برقرار باشد:

$$\gamma(\|\lambda Tx + (1 - \lambda)Ty - T(\lambda x + (1 - \lambda)y)\|) \leq \|x - y\| - \|Tx - Ty\|.$$

لم ۱.۲. [۹] اگر C زیرمجموعه‌ای محدب، بسته، کراندار و ناتهی از یک فضای باناخ حقیقی یکنواخت محدب X باشد، آنگاه $\gamma \in \Gamma$ وجود دارد به طوری که هر نگاشت غیرانبساطی $T: C \rightarrow X$ از نوع γ است.

لم ۲.۲. [۹] فرض کنید C زیرمجموعه‌ای محدب، بسته، کراندار، ناتهی از یک فضای باناخ حقیقی یکنواخت محدب X باشد. فرض کنید نگاشت $T: C \rightarrow C$ از نوع γ و $\{x_n\}$ دنباله‌ای در C باشد به طوری که $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - Tx_n\| = 0$. آنگاه برای هر همسایگی ضعیف W از $Fix(T)$ ، عددی N وجود دارد به طوری که

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+k} \in W, \quad \forall n \geq N, \quad \forall k \geq 0.$$

قضیه ۳.۲. فرض کنید C زیرمجموعه‌ای محدب، بسته و ناتهی از یک فضای باناخ حقیقی یکنواخت محدب و یکنواخت هموار X باشد. فرض کنید $\{T_n\}$ دنباله‌ای از نگاشت‌های غیرانبساطی روی C باشد که روی هر زیرمجموعه کراندار از C همگرایی یکنواخت به یک نگاشت غیرانبساطی T می‌شود. اگر $Fix(T) \neq \emptyset$ و شرط (۸) برقرار باشد، آنگاه هر دنباله داده شده با (۶) همگرایی تقریبی به یک نقطه ثابت T می‌شود.

اثبات. اگرچه اثبات مشابه قضیه ۲.۳ در [۱۳] است، اما برای کامل بودن، آن را مرحله به مرحله ارائه می‌کنیم.
مرحله ۱. فرض کنید $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دنباله‌هایی باشند که با (۶) داده شده‌اند. آنگاه $\|x_n - y_n\|$ همگرا است. فرض کنید $\epsilon_n = \sup_{m \geq 0} \|y_{n+m+1} - T_n^m y_{n+1}\|$ و $\delta_n = \sup_{m \geq 0} \|x_{n+m+1} - T_n^m x_{n+1}\|$. آنگاه $\delta_n, \epsilon_n \rightarrow 0$ به توجیه به غیرانبساطی بودن T_n داریم:

$$\begin{aligned} \|x_{n+m+1} - y_{n+m+1}\| &\leq \|x_{n+m+1} - T_n^m x_{n+1}\| + \|T_n^m x_{n+1} - T_n^m y_{n+1}\| \\ &\quad + \|y_{n+m+1} - T_n^m y_{n+1}\| \\ &\leq \delta_n + \|x_{n+1} - y_{n+1}\| + \epsilon_n. \end{aligned}$$

با گرفتن $\limsup$ وقتی $m \rightarrow \infty$ و سپس $\liminf$ وقتی $n \rightarrow \infty$ ، نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

مرحله ۲. اگر $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ در شرط (۶) صدق کنند و $\{y_n\}$ کراندار باشد، آنگاه برای هر $\lambda \in (0, 1)$ ، دنباله $\{\lambda x_n + (1 - \lambda)y_n\}$ نیز در شرط (۶) صدق می‌کند. تعریف کنید: $z_n = \lambda x_n + (1 - \lambda)y_n$. از آنجا که $\{y_n\}$ کراندار است، از مرحله ۱ داریم که $\{x_n\}$ نیز کراندار می‌شود. $r > 0$ را انتخاب کنید به طوری که $\{x_n\}, \{y_n\} \subset B(0, r)$ باشند و همچنین قرار دهید: $C_r = C \cap B(0, r)$ و $S_{n,m} = T_n^m|_{C_r}$ یعنی $S_{n,m}$ برابر است با T_n^m که با C_r محدود شده است.

آنگاه C_r زیرمجموعه‌ای بسته، محدب و کراندار است و $S_{n,m} : C_r \rightarrow X$ غیرانبساطی است. بنابراین $S_{n,m}$ از نوع γ است. داریم:

$$\begin{aligned} \|z_{n+m+1} - S_{n,m}z_{n+1}\| &= \|\lambda x_{n+m+1} + (1-\lambda)y_{n+m+1} - S_{n,m}z_{n+1}\| \\ &\leq \lambda\|x_{n+m+1} - S_{n,m}x_{n+1}\| + (1-\lambda)\|y_{n+m+1} - S_{n,m}y_{n+1}\| \\ &\quad + \|\lambda S_{n,m}x_{n+1} + (1-\lambda)S_{n,m}y_{n+1} - S_{n,m}z_{n+1}\| \\ &\leq \lambda\alpha_n + (1-\lambda)\beta_n \\ &\quad + \gamma^{-1}(\|x_{n+1} - y_{n+1}\| - \|S_{n,m}x_{n+1} - S_{n,m}y_{n+1}\|) \\ &\leq \lambda\alpha_n + (1-\lambda)\beta_n \\ &\quad + \gamma^{-1}(\|x_{n+1} - y_{n+1}\| - \|x_{n+m+1} - y_{n+m+1}\| + \alpha_n + \beta_n) \end{aligned}$$

که در آن $\alpha_n = \sup_{m \geq 0} \|x_{n+m+1} - S_{n,m}x_{n+1}\|$ و $\beta_n = \sup_{m \geq 0} \|y_{n+m+1} - S_{n,m}y_{n+1}\|$ از مرحله ۱ و (۶) به راحتی نتیجه می‌شود:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \geq 0} \|z_{n+m+1} - T_n^m z_{n+1}\| = 0.$$

مرحله ۳. دنباله $\{x_n, J(p-q)\}$ برای هر $p, q \in \text{Fix}(T)$ همگرا است. اگر $q \in \text{Fix}(T)$ ، آنگاه با توجه به (۸)، دنباله ثابت $\{q\}$ در شرط (۶) صدق می‌کند. فرض کنید $0 < \lambda \leq 1$ و $p, q \in \text{Fix}(T)$. با توجه به مراحل ۱ و ۲، دنباله $\{\|\lambda x_n + (1-\lambda)p - q\|\}$ وقتی $n \rightarrow \infty$ همگرا است. از آنجا که $\{x_n - q\}$ کراندار است، دیفرانسیل پذیری نرم در X نشان می‌دهد که

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{2\lambda} (\|q - p + \lambda(x_n - q)\|^2 - \|q - p\|^2) = \langle x_n - q, J(q - p) \rangle$$

یکنواخت نسبت به n برقرار است. بنابراین،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n - q, J(q - p) \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{2\lambda} (\|\lambda x_n + (1-\lambda)q - p\|^2 - \|q - p\|^2)$$

وجود دارد.

مرحله ۴. فرض کنید $s_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_{k+i(n)}$ ، که در آن $i(n)$ دنباله‌ای از اعداد صحیح مثبت است. واضح است که هر نقطه حدی ضعیف s_n متعلق به $\overline{\text{co}} \omega_w(\{x_n\})$ (که $\omega_w(\{x_n\})$ یعنی مجموعه همه حدهای زیردنباله‌ای ضعیف از x_n است. از سوی دیگر، فرضیات ما نشان می‌دهند که

$$\|x_{n+1} - Tx_n\| \leq \|x_{n+1} - T_n x_n\| + \|T_n x_n - Tx_n\| \rightarrow 0$$

وقتی $n \rightarrow \infty$. اکنون، با توجه به لم‌های ۱.۲ و ۲.۲ از [۹]، هر نقطه حدی ضعیف s_n متعلق به $\text{Fix}(T) \cap \overline{\text{co}} \omega_w(\{x_n\})$ است. فرض کنید p و q دو نقطه حدی ضعیف s_n باشند. آنگاه $p, q \in \text{Fix}(T)$ و با توجه به مرحله ۳ خواهیم داشت که $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle s_n - p, J(p - q) \rangle$ وجود دارد. بنابراین $p = q$. این اثبات را کامل می‌کند. $\square$

در قضیه زیر، فرض همگرایی یکنواخت T_n به T را با شرط بسیار ضعیف‌تر جایگزین کرده‌ایم:

$$(۹) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{x}_n - T\bar{x}_n\| = 0, \quad \forall \bar{x}_n \in \text{Fix}(T_n).$$

این قضیه برای فضاهای هیلبرت اثبات شده است [۱۹]، قضیه ۱۰۴. اثبات آن مشابه است، با این تفاوت که نشان می‌دهیم برخی شرایط اضافی قضیه ۱۰۴ در [۱۹] می‌توانند حذف یا با شرایط ضعیف‌تر جایگزین شوند.

قضیه ۴.۲. فرض کنید C زیرمجموعه‌ای محدب، بسته و ناتهی از یک فضای باناخ حقیقی یکنواخت محدب و یکنواخت هموار X باشد. فرض کنید $\{T_n\}$ دنباله‌ای از نگاشت‌های غیرانبساطی C باشد که $Fix(T_n) \neq \emptyset$ و T نگاشتی از C باشد که در شرط (۹) صدق می‌کند. اگر (۶) یا

$$(۱۰) \quad w - \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} (x_{n+i+k} - T_n^{i+k} x_n) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{N}$$

برقرار باشد، آنگاه $Fix(T) \neq \emptyset$ و همگرایی تقریبی ضعیف به $\bar{x} \in Fix(T)$ می‌شود که حد ضعیف $\{\bar{x}_n\}$ است.

اثبات. با توجه به غیرانبساطی بودن T_n و $Fix(T_n) \neq \emptyset$ ، قضیه ارگودیک ضعیف برای نگاشت‌های غیرانبساطی [۹، ۱۱] نشان می‌دهد که $\frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} T_n^{i-n} x_n$ با میل دادن $m \rightarrow \infty$ ، همگرا به $\bar{x}_n$ یک نقطه ثابت از T_n می‌شود. ابتدا نشان می‌دهیم که $\bar{x}_n$ کراندار است. داریم:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} T_n^i x_n - \bar{x} \right\| &\leq \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \|T_n^i x_n - \bar{x}\| \leq \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \{\|T_n^i x_n - T_n^i \bar{x}\| + \|T_n^i \bar{x} - \bar{x}\|\} \\ &\leq \|x_n - \bar{x}\| + \sup_{i \geq 0} \|T_n^i \bar{x} - \bar{x}\|. \end{aligned}$$

با گرفتن $\liminf$ وقتی $m \rightarrow \infty$ ، داریم: $\|x_n - \bar{x}\| + \sup_{i \geq 0} \|T_n^i \bar{x} - \bar{x}\| < +\infty$ ، با توجه به (۸) و کراندار بودن $\{x_n\}$ (از آنجا که $Fix(T_n) \neq \emptyset$ ، پس هر یک از شرایط (۶) و (۱۰) کراندار $\{x_n\}$ را تضمین می‌کند)، نتیجه می‌گیریم که $\{\bar{x}_n\}$ کراندار است.

بنابراین دنباله $\{\bar{x}_n\}$ دارای یک زیردنباله $\{\bar{x}_{n_j}\}$ است که همگرایی ضعیف به یک نقطه $\bar{x}$ می‌شود. نیم‌بسته بودن T نشان می‌دهد که $\bar{x} \in Fix(T)$. فرض کنید $y \in X^*$ دلخواه باشد. داریم:

$$\begin{aligned} \left\| \left\langle \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_{i+k} - \bar{x}, y \right\rangle \right\| &= \left\| \left\langle \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+k} + \frac{1}{m} \sum_{i=n}^m x_{i+k} - \bar{x}, y \right\rangle \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{m} \left\langle \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+k}, y \right\rangle + \frac{1}{m} \left\langle \sum_{i=n}^m x_{i+k} - \bar{x}, y \right\rangle \right\| \\ &\leq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n-1} \|\langle x_i, y \rangle\| + \frac{1}{m} \left\| \sum_{i=0}^{m-n} \langle x_{i+k+n} - T_n^{i+k} x_n, y \rangle \right\| \\ &\quad + \frac{1}{m} \left\| \sum_{i=0}^{m-n} \langle T_n^{i+k} x_n - \bar{x}_n, y \rangle \right\| + \|\langle \bar{x}_n - \bar{x}, y \rangle\|. \end{aligned} \quad (۱۱)$$

حال با میل دادن $m \rightarrow \infty$ و استفاده از (۱۰)، داریم:

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \left\| \left\langle \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_{i+k} - \bar{x}, y \right\rangle \right\| \leq \|\langle \bar{x}_n - \bar{x}, y \rangle\|.$$

با جایگزینی n با n_j و میل دادن $j \rightarrow \infty$ ، نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

همچنین با استفاده از (۱۱) داریم:

$$\begin{aligned} \left\| \left\langle \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_{i+k} - \bar{x}, y \right\rangle \right\| &\leq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n-1} \left\| \langle x_{i+k}, y \rangle \right\| \\ &+ \|y\| \sup_{i \geq 0} \|x_{i+n} - T_n^i x_n\| \\ &+ \frac{1}{m} \left\| \sum_{i=0}^{m-n} \langle T_n^{i+k} x_n - \bar{x}_n, y \rangle \right\| + \|\langle \bar{x}_n - \bar{x}, y \rangle\|. \end{aligned}$$

با میل دادن $m \rightarrow \infty$ ، داریم:

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \left\| \left\langle \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_{i+k} - \bar{x}, y \right\rangle \right\| \leq \|y\| \sup_{i \geq 0} \|x_{i+n} - T_n^i x_n\| + \|\langle \bar{x}_n - \bar{x}, y \rangle\|.$$

با جایگزینی n با n_j و میل دادن $j \rightarrow \infty$ ، با استفاده از (۶)، نتیجه مطلوب حاصل می‌شود. □

توجه. در قضیه ۴.۲، نگاشت‌های T_n می‌توانند از نوع مجانبی غیرانبساطی یا هر نگاشتی باشند که برای آن قضیه ارگودیک میانگین برقرار است، زیرا اثبات فقط بر اساس قضیه ارگودیک میانگین برای یک نگاشت انجام شده است. فرض $Fix(T_n) \neq \emptyset$ می‌تواند حذف شود اگر فرض کنیم C کراندار است.

مراجع

- [1] M. Akatsuka, K. Aoyama and W. Takahashi, Mean ergodic theorems for a sequence of nonexpansive mappings in Hilbert spaces, *Sci. Math. Jpn.*, **68** (2008), no. 2, 233–239.
- [2] F. Alvarez and J. Peypouquet, Asymptotic almost-equivalence of abstract evolution systems, *preprint submitted to Elsevier*, <https://arxiv.org/pdf/0904.2157>.
- [3] F. Alvarez and J. Peypouquet, Asymptotic almost-equivalence of Lipschitz evolution systems in Banach spaces, *Nonlinear Anal.*, **73** (2010), no. 9, 3018–3033.
- [4] F. Alvarez and J. Peypouquet, A unified approach to the asymptotic almost-equivalence of evolution systems without Lipschitz conditions, *Nonlinear Anal.*, **74** (2011), no. 11, 3440–3444.
- [5] J.-B. Baillon, Un théorème de type ergodique pour les contractions non linéaires dans un espace de Hilbert, (*French*) *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, **280** (1975), 1511–1514.
- [6] J. B. Baillon, R. E. Bruck and S. Reich, On the asymptotic behavior of nonexpansive mappings and semigroups in Banach spaces, *Houston J. Math.*, **4** (1978), no. 1, 1–9.
- [7] G. D. Birkhoff, The mean ergodic theorem, *Duke Math. J.*, **5** (1939), no. 1, 19–20.
- [8] F. E. Browder and W. V. Petryshyn, The solution by iteration of nonlinear functional equations in Banach spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **72** (1966), 571–575.
- [9] R. E. Bruck, A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear contractions in Banach spaces, *Israel J. Math.*, **32** (1979), no. 2-3, 107–116.
- [10] R. E. Bruck and S. Reich, Accretive operators, Banach limits, and dual ergodic theorems, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math.*, **29** (1981), no. 11-12, 585–589.

- [11] N. Hirano, A proof of the mean ergodic theorem for nonexpansive mappings in Banach space, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **78** (1980), no. 3, 361-365.
- [12] N. Hirano, Nonlinear ergodic theorems and weak convergence theorems, *J. Math. Soc. Japan*, **34** (1982), no. 1, 35-46.
- [13] K. Kobayasi and I. Miyadera, Some remarks on nonlinear ergodic theorems in Banach spaces, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **56** (1980), no. 3, 88-92.
- [14] G. G. Lorentz, A contribution to the theory of divergent sequences, *Acta Math.*, **80** (1948), 167-190.
- [15] O. Nevalinna and S. Reich, Stronge convergence of contraction semigroups and of iterative methods for accretive operators in Banach spaces, *Israel J. Math.*, **32** (1979), 44-58.
- [16] S. Reich, Nonlinear ergodic theory in Banach spaces, *Argone Nat. Lab. Springfield*, **79(69)** (1979), pp. 1-22.
- [17] F. Reisz, Some mean ergodic theorems, *J. London Math. Soc.*, **13** (1938), no. 4, 274-278.
- [18] J. V. Neumann, Proof of the quasi-ergodic hypothesis, *Proc. Acad. USA*, **18** (1932), no. 1, 70-82.
- [19] A. Yousefi Pirbasti, H. Khatibzadeh and M. R. Piranfar, Some convergence theorems for a sequence of nonexpansive mappings in a Hilbert space, *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)*, **74** (2025), no. 6, Paper No. 183, 15 pp.

علی یوسفی پیربستی

گروه ریاضی، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران

aliyousefi@znu.ac.ir



علی یوسفی پیربستیمولد خرداد ماه ۱۳۶۴ در شهر رشت است. وی در سال ۱۳۹۵ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض دانشگاه گیلان شد و در سال ۱۳۹۹ وارد مقطع دکتری رشته ریاضی محض دانشگاه زنجان شد.

هادی خطیبزاده

گروه ریاضی، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران

hkhatibzadeh@znu.ac.ir



هادی خطیبزاده عضو هیات علمی دانشگاه زنجان است. وی در سال ۱۳۷۷ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض دانشگاه تهران شد و در سال ۱۳۸۶ دکترای خود را در رشته ریاضی محض از دانشگاه تربیت مدرس تهران اخذ نمود.