



Research in Production and Operations Management

University of Isfahan E-ISSN: 2981-0329

Vol. 17, Issue 2, No. 45, 2026



DOI: [10.22108/pom.2026.146557.1637](https://doi.org/10.22108/pom.2026.146557.1637)

(Research paper)

Monitoring Simple Multivariate linear Profiles in Phase II using MHWMA Charts

Zohre Ghasemi

Department of Industrial and Systems Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran,
z.ghasemi@iut.ac.ir

Ahmad Ahmadi Yazdi*

Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering, Yazd University, Yazd, Iran,
a.ahmadiyazdi@yazd.ac.ir

Purpose: This paper aims to develop and propose three new multivariate control charts based on the MHWMA (Multivariate Homogeneously Weighted Moving Average) approach for monitoring multivariate simple linear profiles in Phase II of statistical process control. The primary motivations for this research are the limitations of existing methods in effectively detecting sudden shifts in profile parameters and the need for more sensitive monitoring schemes that accommodate the multivariate nature of regression relationships between dependent response variables and a single explanatory variable.

Design/methodology/approach: To achieve the research objectives, three control methods—MHWMA, MHWMA/ χ^2 , and MHWMA-2/MMECD—are developed, each employing a distinct strategy for analyzing profile coefficients and covariance structures. The proposed charts use a uniformly weighted moving average to enhance detection capability. Performance is evaluated using the CVRL (Cumulative Variance of the Run Length) criterion via an extensive simulation study. Additionally, a sensitivity analysis assesses the robustness and efficiency of the proposed methods

* Corresponding author, [0000-0002-4274-4804](https://orcid.org/0000-0002-4274-4804)

2981-0329 / © University of Isfahan



This is an open access article under the CC-BY-NC-ND 4.0 License (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)

How to cite: Ghasemi, Z. and Ahmadi Yazdi, A. (2026). Monitoring Simple Multivariate linear Profiles in Phase II using MHWMA Charts. *Research in Production and Operations Management*, 17(2), 1-24. doi: 10.22108/pom.2026.146557.1637

with respect to their design parameters. Finally, two real-world case studies validate the applicability and operational effectiveness of the proposed control charts.

Findings: The simulation results indicate that the MHWMA/ χ^2 monitoring method generally outperforms the other two proposed methods in detecting deviations in multivariate simple linear profiles across most scenarios. The sensitivity analysis demonstrates the stability and robustness of the proposed charts under various parameter settings. Furthermore, the two case studies confirm the effectiveness and practical applicability of the proposed control charts in real operational conditions.

Research limitations/implications: This research is limited to Phase II monitoring of multivariate simple linear profiles. The proposed methods assume a known in-control profile model and normally distributed errors. Future research directions include extending the proposed approaches to nonlinear profiles, multivariate profiles with more than one explanatory variable, and Phase I analysis. Additionally, investigating the performance of the proposed charts under non-normal error distributions and auto-correlated data would be valuable.

Practical implications: The proposed control charts provide quality engineers and process managers with effective tools for real-time monitoring of complex industrial processes in which product quality is characterized by multivariate linear profile relationships. Implementing these charts can lead to earlier detection of process disturbances, reduced nonconforming output, lower rework and scrap costs, and improved overall process efficiency. The ease of interpretation and the demonstrated superior performance of the MHWMA/ χ^2 method make it a practical choice for industrial applications.

Social implications: By enabling more effective quality monitoring in complex industrial processes, this research contributes to improved product reliability and safety, directly benefiting consumers and society at large. Enhanced process control can reduce material waste and energy consumption, supporting environmental sustainability goals. Furthermore, the methodologies developed here can inform industry standards and regulatory policies related to statistical quality control practices, ultimately contributing to a higher quality of life through more consistent and reliable manufactured products.

Originality/value: This paper introduces three novel control charts (MHWMA, MHWMA/ χ^2 , and MHWMA-2/MMECD) for monitoring multivariate simple linear profiles, extending the application of the MHWMA framework to a previously unaddressed area. The proposed MHWMA/ χ^2 method, in particular, demonstrates superior detection performance compared to existing alternatives. The comprehensive evaluation using the CVRL criterion, sensitivity analysis, and real case studies provides strong empirical support for the proposed methods. This research offers significant value to academic researchers in statistical process control as well as industrial practitioners seeking more sensitive tools for profile monitoring.

Keywords: Profile monitoring, MHWMA chart, Multivariate simple linear profile, CVRL Index



پژوهش در مدیریت تولید و عملیات، دوره ۱۷، شماره ۲، پیاپی ۴۵، ۱۴۰۵
دریافت: ۱۴۰۴/۰۶/۲۰، بازنگری: ۱۴۰۴/۱۱/۲۳ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۱/۱۵ ص ۱-۲۴



DOI: [10.22108/pom.2026.146557.1637](https://doi.org/10.22108/pom.2026.146557.1637)

(مقاله پژوهشی)

پایش پروفایل های خطی ساده چندمتغیره در فاز ۲ با نمودارهای MHWMA

زهره قاسمی^۱؛ احمد احمدی یزدی^{۲*}

۱- استادیار دانشکده مهندسی صنایع و سیستم‌ها، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران، z.ghasemi@iut.ac.ir

۲- استادیار گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه یزد، یزد، ایران، a.ahmadiyazdi@yazd.ac.ir

چکیده: در بسیاری از فرآیندهای صنعتی پیچیده، کیفیت محصول با استفاده از مدل پروفایل خطی ساده چندمتغیره توصیف می‌شود که شامل روابط رگرسیونی میان متغیرهای پاسخ وابسته و یک متغیر توضیحی است. در این پژوهش، سه روش کترلی جدید مبتنی بر نمودار MHWMA برای پایش پروفایل های خطی ساده چندمتغیره در فاز دوم کنترل فرآیند پیشنهاد شده است. این نمودارها با بهره‌گیری از ساختار میانگین متحرک وزنی یکنواخت، توانایی بالایی در شناسایی تغییرات ناگهانی در پارامترهای مدل پروفایل دارند. سه روش پیشنهادی با عناوین MHWMA، $MHWMA/\chi^2$ و MHWMA-2/MMECD به گونه‌ای طراحی شده‌اند که هریک با رویکردی خاص، ضرایب مدل و ساختار پراکندگی پروفایل‌ها را تحلیل می‌کنند. به منظور ارزیابی عملکرد این روش‌ها، شاخص CVRL در یک مطالعه شبیه‌سازی به کار رفت و نتایج به دست آمده نشان داد روش پایش $MHWMA/\chi^2$ در بیشتر موارد، نسبت به دیگر روش‌ها عملکرد بهتری در تشخیص انحرافات دارد. علاوه بر این، به منظور ارزیابی پایداری و کارایی روش‌های پیشنهادی، تحلیل حساسیت بر پارامترهای روش‌های کترلی انجام شد و نتایج آن، پایداری عملکرد نمودارهای پیشنهادی را نشان داد. در نهایت، برای ارزیابی کاربردپذیری روش‌های پیشنهادی در محیط واقعی، دو مطالعه موردی بررسی و اثربخشی نمودارهای کترلی پیشنهادی در شرایط عملیاتی نیز تأیید شد.

واژه‌های کلیدی: پایش پروفایل، نمودار MHWMA، پروفایل خطی ساده چندمتغیره، شاخص CVRL



۱- معرفی و مرور پیشینه

در بیشتر کاربردهای کنترل فرآیند آماری، کیفیت یک محصول یا فرآیند با یک مشخصه کیفی، توزیع معین و یا در حالت کلی از طریق چندین مشخصه کیفی یا توزیع چندمتغیره توصیف می شود و پارامترهای توزیع با استفاده از نمودارهای کنترل، تحت پایش قرار می گیرد. با این حال در سال های اخیر، رویکرد دیگری در کنترل کیفیت محصول یا عملکرد فرآیند مطرح شده است. در این رویکرد، کیفیت با یک رابطه رگرسیونی بین متغیر(های) پاسخ و متغیر(های) مستقل توصیف می شود (Noorossana et al., 2011). محققان این رابطه رگرسیونی را «پروفایل» نامیده اند که باید در طول زمان کنترل و پایش شود. پایش پروفایل ها در سال های اخیر، به عنوان موضوعی با کاربرد فراوان مطرح شده است.

گاهی کیفیت یک فرآیند یا محصول با چند پروفایل به طور هم زمان توصیف می شود که متغیرهای پاسخ در آنها به یکدیگر وابسته اند. در این شرایط، چنانچه وابستگی بین متغیرهای پاسخ در نظر گرفته نشود و پروفایل ها جداگانه پایش شوند، ممکن است نتایج گمراه کننده ای به وجود بیاید. برای رفع این مشکل، در نظر گرفتن ساختار چندمتغیره برای متغیرهای پاسخ اجتناب ناپذیر است. در میان مدل های مختلف، پروفایل خطی ساده چندمتغیره، یکی از مهم ترین حالت هاست که در آن واژه «ساده» به وجود یک متغیر مستقل اشاره دارد و واژه «چندمتغیره»، بیانگر تعدد متغیرهای وابسته است. در این نوع پروفایل، دو یا چند متغیر پاسخ، که به هم وابسته اند، به صورت توابع خطی از یک متغیر مستقل تعریف می شوند.

پژوهشگران متعددی، پایش فاز دوم پروفایل های خطی ساده چندمتغیره را بررسی کرده اند. نورالسنا و همکاران^۱ (۲۰۱۰) سه روش مبتنی بر نمودارهای MEWMA و χ^2 را ارائه کردند که شامل پایش پارامترهای رگرسیونی و پراکندگی خطاها بود. سقایی و همکاران^۲ (۲۰۰۸) و ایوبی و همکاران^۳ (۲۰۱۴) روش های دیگری را برای برآورد نقطه تغییر و پایش پارامترهای پروفایل معرفی کردند. ادیبی و همکاران^۴ (۲۰۱۴) روش p-value و مجیکا و همکاران^۵ (۲۰۲۲) نمودارهای ترکیبی EWMA را توسعه دادند؛ در حالی که حق^۶ (۲۰۲۲) و حق و همکاران^۷ (۲۰۲۱) روش هایی مبتنی بر نمودار MEWMA را برای داده های تک مشاهده ای و با فاصله نمونه گیری متغیر ارائه کردند. احمدی کرویک و امیری^۸ (۲۰۲۴) و قاسمی و همکاران^۹ (۲۰۲۵) نیز روش های جدیدی را مبتنی بر نمودارهای MEWMA و MHWMA با قواعد دنباله ای ارائه و عملکرد آنها را با روش های پیشین خود مقایسه کردند.

یکی از مفروضات رایج در روش های پایش مطرح شده، مستقل بودن مشاهدات و زیرگروه هاست که نقض آن بر عملکرد نمودارهای کنترل تأثیر می گذارد و در نهایت به نتایج گمراه کننده منجر می شود. پژوهش هایی مانند سلیمانی و همکاران^{۱۰} (۲۰۱۳)، خدمتی و نیاکی^{۱۱} (۲۰۱۶)، رحیمی و همکاران^{۱۲} (۲۰۱۹) و جهانی و همکاران^{۱۳} (۲۰۱۸)، روش هایی را برای حذف اثر خودهمبستگی ارائه کردند. همچنین امیری و همکاران^{۱۴} (۲۰۱۸)، بهرامی و همکاران^{۱۵} (۲۰۱۹) و احمدی یزدی و همکاران^{۱۶} (۲۰۲۳)، پایش پروفایل های وابسته و چندمرحله ای و توسعه نمودارهای مقاوم را بررسی کردند.

همان‌طور که اشاره شد، پایش پروفایل‌ها از طریق نمودارهای کنترل انجام می‌شود که نقش اساسی آنها، تعیین وضعیت فرآیند است. نمودارهای کنترل به دو گروه نمودارهای بدون حافظه و حافظه‌دار تقسیم می‌شوند. در صنایع تولیدی و خدماتی، نمودارهای کنترل حافظه‌دار به‌طور گسترده‌ای برای پایش فرآیندها استفاده می‌شوند. یکی از انواع نمودارهای حافظه‌دار، نمودار کنترل میانگین متحرک وزنی یکنواخت^{۱۷} است که عباس^{۱۸} (۲۰۱۸) آن را معرفی کرد. این نمودار به مشاهده فعلی وزن مشخصی تخصیص داده و وزن باقیمانده به‌طور مساوی میان تمامی مشاهدات قبلی توزیع می‌شود. این ویژگی به توانایی بهتر نمودار در تشخیص تغییرات پارامترهای فرآیند، به‌ویژه تغییرات کوچک، منجر می‌شود. ادگوک و همکاران^{۱۹} (۲۰۱۹) برای پایش بردار میانگین در یک فرآیند چندمتغیره، نمودار میانگین متحرک موزون همگن چندمتغیره^{۲۰} را معرفی کردند. این نمودار، تعمیم نمودار HWMA برای پایش فرآیند چندمتغیره است. آنها عملکرد این نمودار را با نمودارهای کنترل در پیشینه موضوع و براساس شاخص ARL مقایسه کردند. نتایج به‌دست‌آمده نشان داد نمودار MHWMA در مقایسه با دیگر روش‌ها، مقادیر ARL خارج از کنترل کمتری دارد و در تشخیص شیفتهای کوچک مؤثرتر است. یوسفی و همکاران^{۲۱} (۲۰۲۳)، ادگوک و همکاران (۲۰۲۱) و پیترز و همکاران^{۲۲} (۲۰۲۳) عملکرد این نمودار را در شرایط مختلف بررسی کردند و برتری آن را نسبت به نمودارهای پیشین نشان دادند.

با وجود مطالعات متعدد در حوزه پایش پروفایل‌ها، تمرکز بسیاری از پژوهش‌ها بر پروفایل‌های تک‌متغیره مانند پروفایل خطی ساده بوده و به بررسی پروفایل‌های خطی ساده چندمتغیره، به‌ویژه در فاز دوم کنترل فرآیند، کمتر توجه شده است. همچنین در معدود مطالعات انجام‌شده در حوزه پروفایل‌های چندمتغیره، عمدتاً از نمودارهای کلاسیک حافظه‌دار مانند MEWMA استفاده شده است که در بسیاری از موارد، در شناسایی سریع شیفتهای کوچک و ناگهانی با تأخیر عمل می‌کنند؛ ازجمله این مطالعات، به نورالسنا و همکاران (۲۰۱۰)، ادیبی و همکاران (۲۰۱۴) و حق (۲۰۲۲) اشاره می‌شود. از سوی دیگر، اگرچه نمودارهای MHWMA طبق نتایج گزارش‌شده در پیشینه موضوع، حساسیت بالاتری نسبت به تغییرات کوچک دارند، توسعه و کاربرد آنها در پایش پروفایل‌های خطی چندمتغیره بسیار محدود است و پژوهش‌های موجود، عملکرد آماری این نمودارها را به‌صورت جامع ارزیابی نکرده‌اند. در راستای پوشش این شکاف تحقیقاتی، در این پژوهش سه روش کنترلی جدید مبتنی بر نمودار MHWMA برای پایش پروفایل‌های خطی ساده چندمتغیره در فاز دوم پیشنهاد شده است. این روش‌ها با هدف افزایش سرعت تشخیص انحرافات و بهبود عملکرد آماری نسبت به رویکردهای پیشین طراحی شده‌اند.

در ادامه، ساختار مقاله به‌تفصیل شرح داده شده است. در بخش دوم، مدل پروفایل خطی ساده چندمتغیره تعریف می‌شود و در بخش سوم، روش‌های کنترلی پیشنهادی به‌تفصیل معرفی می‌شوند. بخش چهارم به طراحی و اجرای مطالعات شبیه‌سازی اختصاص دارد که عملکرد روش‌ها را ارزیابی می‌کند. در بخش پنجم یک مطالعه موردی واقعی برای بررسی اثربخشی عملی روش‌های پیشنهادی ارائه می‌شود. درنهایت در بخش ششم، نتایج کلی جمع‌بندی و پیشنهادهایی برای پژوهش‌های آتی ارائه می‌شود.

۲- مدل رگرسیونی پروفایل خطی ساده چندمتغیره

گاهی کیفیت یک محصول یا فرایند با پروفایل های خطی ساده چندمتغیره بیان می شود. در این نوع پروفایل، تنها یک متغیر مستقل وجود دارد و متغیرهای پاسخ توابع خطی از آن اند. در هر زیرگروه، n مقدار برای متغیر مستقل در نظر گرفته می شود و به ازای هر مقدار آن، p مقدار متناظر برای متغیرهای پاسخ وجود دارد. هر مشاهده در زیرگروه k ام، به صورت رابطه (۱) خواهد بود که در آن مقدار x_i مقدار i ام متغیر مستقل و $y_{i1k}, y_{i2k}, \dots, y_{ipk}$ مقادیر متناظر متغیرهای پاسخ اند.

$$(x_i, y_{i1k}, y_{i2k}, \dots, y_{ipk}) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

مدل پروفایل خطی ساده چندمتغیره در هر زیرگروه به صورت رابطه $Y_k = XB + E_k$ است که مدل مبسوط آن در رابطه (۲) نشان داده شده است.

$$\begin{bmatrix} y_{11k} & y_{12k} & \dots & y_{1pk} \\ y_{21k} & y_{22k} & \dots & y_{2pk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1k} & y_{n2k} & \dots & y_{npk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{01} & \beta_{02} & \dots & \beta_{0p} \\ \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11k} & \varepsilon_{12k} & \dots & \varepsilon_{1pk} \\ \varepsilon_{21k} & \varepsilon_{22k} & \dots & \varepsilon_{2pk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{n1k} & \varepsilon_{n2k} & \dots & \varepsilon_{npk} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Y_k ماتریس $n \times p$ متغیرهای پاسخ در زیرگروه k ام است که هر سطر آن متناظر با یکی از مقادیر متغیر مستقل است. X ماتریس $n \times 2$ متغیر مستقل است که ستون دوم آن، سطوح متغیر مستقل را نشان می دهد. B ماتریس $2 \times p$ پارامترهای مدل رگرسیونی است که در فاز ۲ و در حالت تحت کنترل، معلوم فرض می شود. برآورد این ضرایب در هر زیرگروه ($\hat{B}_k$)، با استفاده از روش حداقل مربعات به صورت رابطه (۳) خواهد بود.

$$\hat{B}_k = (\hat{\beta}_{0k}, \hat{\beta}_{1k})^T = (X^T X)^{-1} X^T Y_k \quad (3)$$

عناصر این ماتریس به صورت رابطه (۴) هستند:

$$\hat{\beta}_{0jk} = \bar{y}_{.jk} - \hat{\beta}_{1jk} \bar{x} \quad \hat{\beta}_{1jk} = \frac{S_{xy(j)}}{S_{xx}} \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (4)$$

که در آن $S_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ و $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ، $S_{xy(j)} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) y_{ijk}$ ، $\bar{y}_{.jk} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{ijk}$ است. ماتریس E_k با ابعاد $n \times p$ عناصر خطا را نشان می دهد که هر سطر آن با یک سطر از ماتریس متغیرهای پاسخ متناظر است. متغیرهای تصادفی خطا در هر سطر از این ماتریس، دارای توزیع نرمال p متغیره با بردار میانگین $1 \times p$ با مقادیر صفر و ماتریس کوواریانس معلوم Σ با ابعاد $p \times p$ هستند؛ درحالی که هر سطر از سطر دیگر مستقل است. ماتریس کوواریانس Σ در رابطه (۵) نشان داده شده است.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \dots & \sigma_p^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

۳- نمودارهای کنترلی پیشنهادی برای پایش پروفایل خطی ساده چندمتغیره در فاز ۲

در این بخش، سه روش پایش جدید مبتنی بر نمودار کنترل MHWMA برای پایش پروفایل خطی ساده چندمتغیره ارائه می شود. در ادامه، جزئیات هر روش به تفصیل شرح داده خواهد شد.

۳-۱ نمودار کنترلی MHWMA

در این روش، از یک نمودار MHWMA برای پایش کلیه پارامترهای پروفایل استفاده می‌شود. در زیرگروه k ام، ماتریس $\hat{\mathbf{B}}_k$ را به صورت یک بردار تصادفی چندمتغیره با ابعاد $1 \times 2p$ ، که طبق رابطه (۶) با $\hat{\boldsymbol{\beta}}_k$ نمایش داده می‌شود، بازنویسی می‌شود.

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}'_k = (\hat{\beta}_{01k}, \hat{\beta}_{02k}, \dots, \hat{\beta}_{0pk}, \hat{\beta}_{11k}, \hat{\beta}_{12k}, \dots, \hat{\beta}_{1pk}) \quad (6)$$

اگر فرآیند تحت کنترل باشد، بردار $\hat{\boldsymbol{\beta}}'_k$ دارای توزیع نرمال چندمتغیره با بردار میانگین $\boldsymbol{\beta}$ مطابق رابطه (۷):

$$\boldsymbol{\beta}' = (\beta_{01}, \beta_{02}, \dots, \beta_{0p}, \beta_{11}, \beta_{12}, \dots, \beta_{1p}) \quad (7)$$

و ماتریس کوواریانس $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{\beta}}}$ با ابعاد $2p \times 2p$ است که عناصر آن به صورت رابطه (۸) به دست می‌آیند:

$$Cov(\hat{\beta}_{0uk}, \hat{\beta}_{0vk}) = \sigma_{uv} \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{S_{xx}} \right) = \rho_{uv} \sigma_u \sigma_v \quad (8)$$

$$Cov(\hat{\beta}_{1uk}, \hat{\beta}_{1vk}) = \frac{\sigma_{uv}}{S_{xx}} = \frac{\rho_{uv} \sigma_u \sigma_v}{S_{xx}}$$

$$Cov(\hat{\beta}_{1uk}, \hat{\beta}_{1vk}) = -\sigma_{uv} \frac{\bar{X}}{S_{xx}} = -\rho_{uv} \sigma_u \sigma_v \frac{\bar{X}}{S_{xx}}$$

که σ_{uv} عنصر سطر u ام و ستون v ام ماتریس Σ است. $\rho_{uv} = \frac{\sigma_{uv}}{\sigma_u \sigma_v}$ عنصر سطر u ام و ستون v ام ماتریس همبستگی بین متغیرهای پاسخ است.

بر این اساس، نمودار MHWMA برای پایش بردار $\hat{\boldsymbol{\beta}}_k$ به صورت رابطه (۹) استفاده می‌شود:

$$\mathbf{H}_k = w\hat{\boldsymbol{\beta}}_k + (1-w)\bar{\bar{\boldsymbol{\beta}}}_{k-1} \quad k = 1, 2, \dots \quad (9)$$

که در آن $\mathbf{H}_k$ یک بردار $1 \times 2p$ و w پارامتر هموارسازی ($0 < w \leq 1$) است و $\bar{\bar{\boldsymbol{\beta}}}_{k-1}$ میانگین بردار پارامترها را در نمونه‌های قبلی تا $k-1$ امین نمونه نشان می‌دهد. $\bar{\bar{\boldsymbol{\beta}}}_0$ برابر با $\boldsymbol{\beta}$ در نظر گرفته می‌شود. هنگامی که فرآیند تحت کنترل است، $\mathbf{H}_k$ دارای توزیع نرمال چندمتغیره با بردار میانگین $\boldsymbol{\beta}$ و ماتریس کوواریانس $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{H}_k}$ است.

$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{H}_k}$ یک ماتریس $2p \times 2p$ است که با استفاده از رابطه (۱۰) محاسبه می‌شود.

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{H}_k} = \begin{cases} w^2 \boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{\beta}}} & k = 1 \\ w^2 \boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{\beta}}} + (1-w)^2 \frac{\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{\beta}}}}{k-1} & k \geq 2 \end{cases} \quad (10)$$

بنابراین برای زیرگروه k ام، مقدار آماره T_k^2 به صورت رابطه (۱۱) تعریف می‌شود:

$$T_k^2 = (\mathbf{H}_k - \boldsymbol{\beta})' \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{H}_k}^{-1} (\mathbf{H}_k - \boldsymbol{\beta}) \quad (11)$$

اگر مقدار آماره T_k^2 از حد بالای h بیشتر شود، نمودار هشدار خارج از کنترل خواهد داد. همچنین مقدار h براساس شبیه‌سازی مونت کارلو و به گونه‌ای تعیین می‌شود که ARL تحت کنترل مورد انتظار به دست آید.

۳-۲ نمودار کنترلی MHWMA/ χ^2

در روش دوم که توسعه‌ای از رویکرد EWMA/R پیشنهادشده از سوی کنگ و آلبین^{۲۳} (۲۰۰۰) است، از نمودارهای MHWMA و χ^2 برای پایش تفاوت پروفایل مرجع و پروفایل نمونه استفاده می‌شود. این تفاوت همان ماتریس $\mathbf{E}_k$ در رابطه (۲) است که در یک فرآیند خارج از کنترل، درایه‌های آن مقادیر زیادی دارند.

در این روش برای زیرگروه k ام، که در طول زمان جمع‌آوری شده است، بردار میانگین خطاها، یک بردار $p \times 1$ و به صورت رابطه (۱۲) تعریف می‌شود.

$$\bar{\mathbf{e}}_k = (\bar{e}_{1k}, \bar{e}_{2k}, \dots, \bar{e}_{pk}) \quad (12)$$

که در آن $\bar{e}_{jk}$ میانگین مقادیر ε_{ijk} است؛

$$\bar{e}_{jk} = \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_{ijk}}{n} \quad (13)$$

وقتی فرآیند تحت کنترل است، بردار میانگین خطاها ($\bar{\mathbf{e}}_k$) دارای توزیع نرمال p متغیره با بردار میانگین صفر و ماتریس کوواریانس $\Sigma_{\bar{\mathbf{e}}} = \frac{\Sigma}{n}$ است.

حال برای پایش بردار میانگین خطاها، از نمودار MHWMA مطابق رابطه (۱۴) استفاده می‌شود:

$$\mathbf{H}_k = w\bar{\mathbf{e}}'_k + (1-w)\bar{\mathbf{e}}'_{k-1} \quad k = 1, 2, \dots \quad (14)$$

که در آن $\mathbf{H}_k$ یک بردار $1 \times p$ و w پارامتر هموارسازی ($0 < w \leq 1$) است و $\bar{\mathbf{e}}_{k-1}$ میانگین بردارهای میانگین خطا را در نمونه‌های قبلی تا $k-1$ امین نمونه نشان می‌دهد. $\bar{\mathbf{e}}_0$ بردار صفر در نظر گرفته می‌شود. اگر فرآیند تحت کنترل باشد، $\mathbf{H}_k$ دارای توزیع نرمال چندمتغیره با بردار میانگین صفر و ماتریس کوواریانس $\Sigma_{\mathbf{H}_k}$ است. در این حالت $\Sigma_{\mathbf{H}_k}$ یک ماتریس $p \times p$ و به صورت رابطه (۱۵) است:

$$\Sigma_{\mathbf{H}_k} = \begin{cases} w^2 \Sigma_{\bar{\mathbf{e}}} & k = 1 \\ w^2 \Sigma_{\bar{\mathbf{e}}} + (1-w)^2 \frac{\Sigma_{\bar{\mathbf{e}}}}{k-1} & k \geq 2 \end{cases} \quad (15)$$

آماره T_k^2 برای زیرگروه k ام، با رابطه (۱۶) برابر است:

$$T_k^2 = (\mathbf{H}_k)' \Sigma_{\mathbf{H}_k}^{-1} (\mathbf{H}_k) \quad (16)$$

حد بالای کنترل نمودار برابر با h در نظر گرفته و به گونه‌ای حساب می‌شود که ARL تحت کنترل خاصی حاصل شود.

به منظور پایش تغییرپذیری فرآیند، از آماره χ^2 پیشنهادشده از سوی نورالسنا و همکاران (۲۰۱۰) استفاده می‌شود. آماره χ^2 برای زیرگروه k ام به صورت رابطه (۱۷) محاسبه می‌شود.

$$\chi_{ik}^2 = \varepsilon_{ik} \Sigma^{-1} \varepsilon'_{ik} \quad (17)$$

که در آن ε_{ik} یک بردار تصادفی و بیانگر سطر k ام ماتریس $\mathbf{E}_k$ ، دارای توزیع نرمال چندمتغیره با بردار میانگین صفر و ماتریس کوواریانس Σ است. در این شرایط اگر فرآیند تحت کنترل باشد، χ_{ik}^2 دارای توزیع کای دو با p درجه آزادی و بنابراین آماره $\chi_k^2 = \sum_{i=1}^n \chi_{ik}^2$ یک متغیر تصادفی کای دو با np درجه آزادی است؛ پس حد بالای این نمودار کنترل برابر با $\chi_{np, \alpha}^2$ یا $1-\alpha$ امین صدک توزیع کای دو با np درجه آزادی در نظر گرفته می‌شود. مقایسه آماره χ_k^2 با حد بالای $UCL = \chi_{np, \alpha}^2$ وضعیت فرآیند را مشخص می‌کند.

آماره $\chi_{ik}^2 = \varepsilon_{ik} \Sigma^{-1} \varepsilon'_{ik}$ که برای مشاهده i ام داخل زیرگروه k ام به دست می‌آید و مشابه آماره T^2 است؛ پس این آماره برای تشخیص تغییرات بزرگ در درایه‌های بردار میانگین خطاها نیز کاربرد دارد و مکمل مناسبی برای نمودار MHWMA است.

۳-۳ نمودار کنترلی MHWMA-2/MMECD

نورالسنا و همکاران (۲۰۱۰) برای پایش پروفایل خطی ساده چندمتغیره در فاز ۲، روش MEWMA-3 را پیشنهاد کردند که توسعه‌ای از روش EWMA-3 پیشنهادشده از سوی کیم و همکاران^{۲۴} (۲۰۰۳) است. در این روش‌ها مقادیر متغیر مستقل به‌گونه‌ای کدگذاری شده است که میانگین آنها صفر شود. این امر سبب می‌شود کوواریانس برآوردکننده‌های شیب و عرض از مبدأ صفر و بردارهای $1 \times p$ عرض از مبدأ و شیب از یکدیگر مستقل شوند؛ بنابراین به‌طور جداگانه و با استفاده از نمودارهای کنترلی مجزا پایش می‌شوند. روش پیشنهادی MHWMA-2/MMECD با توسعه این روش‌ها، از دو نمودار MHWMA برای پایش بردارهای شیب و عرض از مبدأ و یک نمودار MMECD برای پایش تغییرپذیری فرآیند استفاده می‌کند. نمودار کنترل MMECD^{۲۵} را ریاض و همکاران^{۲۶} (۲۰۱۹) برای پایش ماتریس کوواریانس مطرح کردند.

پس از کدگذاری مقادیر x ، رابطه میان متغیرهای پاسخ و متغیر مستقل کدگذاری شده در هر زیرگروه به‌صورت رابطه (۱۸) خواهد بود:

$$y_{ik} = \gamma_0 + x'_i \gamma_1 + \varepsilon_{ik} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (18)$$

که در آن $\gamma_0 = \beta_0 + \bar{x}1$ (۱ بردار $1 \times p$ و شامل مقادیر ۱ است) و $\gamma_1 = \beta_1$ است. کدگذاری مقادیر x نیز به‌صورت $x'_i = x_i - \bar{x}$ است. نورالسنا و همکاران (۲۰۱۰) نشان دادند در مدل جدید، برآورد حداقل مربعات بردار عرض از مبدأ در هر زیرگروه (γ_{0k}) به $\hat{\gamma}'_{0k} = (\bar{y}_{.1k}, \bar{y}_{.2k}, \dots, \bar{y}_{.pk})$ تغییر می‌کند؛ اما برآورد بردار شیب‌ها $(\hat{\gamma}_{1k})$ همانند روش اصلی است. در یک فرآیند تحت کنترل، $\hat{\gamma}_{0k}$ و $\hat{\gamma}_{1k}$ دارای توزیع نرمال چندمتغیره با میانگین‌های γ_0 و γ_1 و واریانس‌های $\Sigma_{\gamma_0} = \frac{\Sigma}{n}$ و $\Sigma_{\gamma_1} = \frac{\Sigma}{s_{xx}}$ هستند. همچنین کوواریانس بین هریک از عناصر $\hat{\gamma}_{0k}$ و $\hat{\gamma}_{1k}$ صفر است؛ بنابراین برای پایش $\hat{\gamma}_{0k}$ و $\hat{\gamma}_{1k}$ از نمودارهای کنترل جداگانه استفاده می‌شود. پایش بردارهای عرض از مبدأ و شیب، با دو نمودار مجزای MHWMA و پایش تغییرپذیری فرایند از طریق نمودار MMECD انجام می‌شود. درنهایت هر سه نمودار به‌صورت هم‌زمان، پایش پروفایل خطی ساده چندمتغیره را انجام می‌دهند و به‌محض آنکه اولین نمودار، هشدار خارج از کنترل دهد، وضعیت فرآیند خارج از کنترل شناخته می‌شود. استفاده از نمودارهای کنترل جداگانه برای پایش پارامترهای پروفایل، سبب می‌شود که در صورت مشاهده یک هشدار، تفسیر حالت خارج از کنترل فرایند ساده‌تر باشد.

آماره MHWMA طراحی شده برای پایش عرض از مبدأ، با استفاده از برآورد بردار عرض از مبدأ در زیرگروه k به‌صورت رابطه (۱۹) محاسبه می‌شود:

$$H_k = w\hat{\gamma}_{0k} + (1-w)\bar{\gamma}_{0(k-1)} \quad k = 1, 2, \dots \quad (19)$$

که در آن w پارامتر هموارسازی ($0 < w \leq 1$)، $\bar{\gamma}_{0(0)}$ بردار $1 \times p$ عرض از مبدأ (γ_0) است. در یک فرآیند تحت کنترل، H_k دارای توزیع نرمال چندمتغیره با بردار میانگین γ_0 و ماتریس کوواریانس Σ_{H_k} ، مطابق رابطه (۲۰) است.

$$\Sigma_{H_k} = \begin{cases} w^2 \Sigma_{\gamma_0} & k = 1 \\ w^2 \Sigma_{\gamma_0} + (1-w)^2 \frac{\Sigma_{\gamma_0}}{k-1} & k \geq 2 \end{cases} \quad (20)$$

آماره T_k^2 برای زیرگروه k ام، با رابطه (۲۱) برابر است:

$$T_k^2 = (H_k - \gamma_0)' \Sigma_{H_k}^{-1} (H_k - \gamma_0) \quad (21)$$

تا زمانی که آماره T_k^2 کمتر از حد کنترل بالای h باشد، فرایند تحت کنترل خواهد بود. $h > 0$ و w به گونه ای انتخاب می شوند که ARL تحت کنترل مطلوب حاصل شود.

در نمودار MHWMA طراحی شده برای پایش شیب ها نیز، از بردار برآورد شیب ها ($\hat{\gamma}_{1k}$) استفاده می شود و آماره آن برابر با رابطه (۲۲) است.

$$H_k = w\hat{\gamma}_{1k} + (1-w)\bar{\gamma}_{1(k-1)} \quad k = 1, 2, \dots \quad (22)$$

w پارامتر هموارسازی ($0 < w \leq 1$) و $\bar{\gamma}_{1(0)}$ بردار $1 \times p$ شیب (γ_1) است. در یک فرایند تحت کنترل، H_k دارای توزیع نرمال چندمتغیره با بردار میانگین γ_1 و ماتریس کوواریانس Σ_{H_k} مطابق رابطه (۲۳) است.

$$\Sigma_{H_k} = \begin{cases} w^2 \Sigma_{\gamma_1} & k = 1 \\ w^2 \Sigma_{\gamma_1} + (1-w)^2 \frac{\Sigma_{\gamma_1}}{k-1} & k \geq 2 \end{cases} \quad (23)$$

آماره T_k^2 به ازای زیرگروه k به صورت رابطه (۲۴) حاصل می شود:

$$T_k^2 = (H_k - \gamma_1)' \Sigma_{H_k}^{-1} (H_k - \gamma_1) \quad (24)$$

حد کنترل بالای نمودار ($h > 0$) و w به گونه ای انتخاب شده است که ARL مدنظر حاصل شود.

نمودار سوم برای پایش تغییرپذیری فرایند، نمودار MMECD است که از ترکیب ویژگی های نمودار MEWMA، مطرح شده از سوی چن و همکاران^{۲۷} (۲۰۰۵) و نمودار MCUSUM، مطرح شده از طرف هیلی^{۲۸} (۱۹۸۷) حاصل شده است. در زیرگروه k ام، آماره w_k با رابطه (۲۵) برابر است:

$$w_k = \sum_{i=1}^n (\epsilon_{ik} - \bar{\epsilon}_k) \Sigma^{-1} (\epsilon_{ik} - \bar{\epsilon}_k)' \quad (25)$$

ϵ_{ik} بیانگر سطر k ام ماتریس E_k و $\bar{\epsilon}_k$ مطابق رابطه (۱۲) است.

حال آماره w_k به مقدار کای دو با درجه آزادی $p(n-1)$ تبدیل می شود؛ سپس با استفاده از تابع توزیع تجمعی معکوس نرمال، به صورت رابطه (۲۶) استاندارد می شود:

$$M_k = \phi^{-1}[H(w_k); p(n-1)] \quad (26)$$

$H(\cdot; df)$ دارای توزیع کای دو با df درجه آزادی و $\phi^{-1}(\cdot)$ بیانگر معکوس تابع توزیع تجمعی نرمال است.

در این صورت، آماره MEWMA براساس M_k با رابطه های (۲۷) و (۲۸) برابر است:

$$Z_k = \lambda M_k + (1-\lambda)Z_{k-1} \quad (27)$$

$$U_k = \left(\sqrt{\frac{2-\lambda}{\lambda[1-(1-\lambda)^{2i}]}} \right) Z_k \quad (28)$$

$0 < \lambda < 1$ پارامتر هموارسازی است.

با استفاده از U_k ، آماره MCUSUM با رابطه (۲۹) برابر است:

$$MMECD_k = \max(0, U_k - k_2 + MMECD_{k-1}) \quad (29)$$

که در آن $k_2 = k_2^* \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} [1 - (1-\lambda)^{2k}]}$ و k_2^* برابر با نصف تغییر ایجاد شده برحسب انحراف استاندارد در نظر گرفته می شود.

زمانی که آماره $MMECD_k$ از حد بالای نمودار (h_1) بیشتر شود، فرآیند خارج از کنترل خواهد بود. h_1 به نحوی انتخاب شده است که ARL مطلوب حاصل شود.

۴- مقایسه عملکرد نمودارهای کنترلی پیشنهادی

برای مقایسه عملکرد روش‌های پیشنهادی، پارامتر هموارسازی (w) در نمودارهای MHWMA برابر با ۰/۰۳ و پارامتر هموارسازی نمودار EWMA در روش $MHWMA - 2/MMECD$ نیز برابر با ۰/۱ در نظر گرفته شده است. حدود بالای نمودارهای کنترلی، همانگونه که در جدول (۱) نشان داده شده است، به گونه‌ای طراحی شده‌اند که مقدار ARL تحت کنترل برابر با ۲۰۰ به دست آید. مقادیر ARL و $SDRL$ طی ۱۰,۰۰۰ تکرار از شبیه‌سازی مونت‌کارلو تخمین زده شده است. تجزیه و تحلیل و مقایسه روش‌های پیشنهادی، به‌ازای مقادیر مختلف p انجام داده می‌شود. مثال استفاده‌شده در این بخش، در رابطه (۳۰) نشان داده می‌شود:

$$Y_1 = 3 + 2x + \varepsilon_1 \quad (30)$$

$$Y_2 = 2 + 1x + \varepsilon_2$$

که در آن مقادیر متغیر مستقل (x_i ها)، برابر با ۲، ۴، ۶ و ۸ (با میانگین ۵) در نظر گرفته شده است. بردار مقادیر خطای $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)'$ ، یک بردار تصادفی نرمال دومتغیره با بردار میانگین صفر و ماتریس کوواریانس

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \text{ است.}$$

که در آن $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$ است. مقدار ضریب همبستگی نیز، برابر با $\rho = 0.5$ در نظر گرفته می‌شود.

جدول ۱- حدود بالای کنترلی نمودارهای کنترلی برای دستیابی به $ARL_0 = 200$

Table 1- UCL of proposed charts to achieve $ARL_0 = 200$

روش	نمودار کنترل	حد بالای کنترلی
MHWMA	MHWMA	۸/۸۰
MHWMA/ χ^2	MHWMA	۶/۹۸
	χ^2	۲۳/۷۷
MHWMA-2/MMECD	MHWMA	۸/۷۵
	MHWMA	۸/۷۵
	MMECD	۴۶/۰

تغییرات در نظر گرفته شده برای بررسی عملکرد روش‌های پیشنهادی، شامل تغییر در (۱) عرض از مبدأ پروفایل اول (β_{01} ؛ ۲) تغییر در شیب پروفایل اول (β_{11} ؛ ۳) تغییر در پراکندگی پروفایل اول (σ_1) و (۴) تغییرات هم‌زمان در پارامترهاست. شاخص‌های استفاده‌شده برای ارزیابی و مقایسه روش‌ها، ARL ، $SDRL$ و شاخص ضریب تغییرات ($CVRL$) است. شاخص $CVRL$ برای اندازه‌گیری پراکندگی داده‌های آماری به کار می‌رود. این شاخص را بت^{۲۹} (۲۰۲۱) معرفی و میزان پراکندگی را به‌ازای یک واحد از میانگین بیان کرد. مقدار $CVRL$ با استفاده از رابطه (۳۱) به دست می‌آید.

$$CVRL = \frac{SDRL}{ARL} \times 100 \quad (31)$$

نتایج حاصل شده از شبیه سازی در جداول (۲) تا (۷) ارائه و با عملکرد روش $MEWMA/\chi^2$ نورالسنا و همکاران (۲۰۱۰) براساس شاخص CVRL مقایسه شده است. نورالسنا و همکاران (۲۰۱۰) در مطالعه خود، سه روش پایش برای پروفایل خطی ساده چندمتغیره را مطرح کردند که از میان آنها روش $MEWMA/\chi^2$ به طور کلی بهترین عملکرد را داشت.

جدول (۲) مقادیر CVRL شبیه سازی شده را برای شیفتهای عرض از مبدأ اولین پروفایل (β_{01})، برحسب واحدهای σ_1 نشان می دهد. کلیه روش های پیشنهادی عملکرد مناسبی دارند و تغییرات ایجاد شده را با سرعت پذیرفتنی تشخیص می دهند. با این حال، نمودار کنترلی $MHWMA/\chi^2$ به ازای همه تغییرات در نظر گرفته شده، به طور یکنواخت بهتر از دیگر روش ها عمل می کند. مقایسه دو روش دیگر نیز نشان می دهد که روش MHWMA در تشخیص تغییرات بزرگ تر عملکرد بهتری دارد. هر سه روش در مقایسه با روش $MEWMA/\chi^2$ عملکرد بهتری دارند. همچنین به جهت تشخیص تغییرات عرض از مبدأ، نتایج مشابهی در دومین پروفایل (برحسب واحد σ_2) حاصل می شود که به جهت جلوگیری از طولانی شدن متن، از ارائه نتایج خودداری شده است.

مقادیر CVRL شبیه سازی شده برای تغییر در شیب اولین پروفایل از β_{11} به $\beta_{11} + \delta\sigma_1$ ، در جدول (۳) نشان داده شده است. روش های پیشنهادی عملکرد مناسبی دارند و تغییرات ایجاد شده را به خوبی تشخیص می دهند. نتایج به دست آمده نشان می دهد عملکرد روش $MHWMA/\chi^2$ در تشخیص تغییرات پارامتر، شیب بهتری از روش های دیگر است. همچنین روش های $MHWMA/\chi^2$ و MHWMA در مقایسه با روش $MEWMA/\chi^2$ عملکرد بهتری دارند. مشابه این نتایج برای پارامترهای β_{21} ، β_{12} و β_{22} نیز، به دست می آید که به دلیل تشابه ذکر نشده است.

جدول (۴) مقادیر شبیه سازی شده CVRL را برای انحراف معیار پروفایل، اول از σ_1 به $\gamma\sigma_1$ نشان می دهد. مقایسه روش های پیشنهادی براساس شاخص CVRL نشان می دهد روش MHWMA-2/MMECD در تشخیص تغییرات کوچک تا متوسط و روش $MHWMA/\chi^2$ در تشخیص تغییرات بزرگ پراکندگی، عملکرد مناسبی دارند. همچنین روش های $MHWMA/\chi^2$ و MHWMA-2/MMECD در مقایسه با روش $MEWMA/\chi^2$ عملکرد بهتری دارند. بررسی نتایج نشان می دهد که هر دو روش نسبت به روش MHWMA عملکرد مناسب تری دارند. در صورت ایجاد تغییر در پارامتر σ_2 نیز، نتایج مشابهی حاصل شده است که ذکر نشده است.

به منظور بررسی اثر تغییرات هم زمان پارامترها در عملکرد روش ها، چندین نوع تغییر هم زمان در پارامترها انجام شده است. این تغییرات عبارت اند از: (۱) تغییر هم زمان در عرض از مبدأ هر دو پروفایل؛ (۲) تغییر هم زمان در شیب هر دو پروفایل؛ (۳) تغییر هم زمان در انحراف معیار هر دو پروفایل.

عملکرد روش های پیشنهادی به ازای این تغییرات هم زمان، در جداول (۵) تا (۷) ارائه شده است. ضریب همبستگی متغیرهای پاسخ برابر با ۰/۵ در نظر گرفته شده است. همان طور که در جداول مشخص است، نتایج کلی، مشابه نتایجی است که تنها در یک پارامتر تغییر ایجاد شده است. روش $MHWMA/\chi^2$ در تشخیص تغییرات هم زمان عرض از مبدأ و شیب پروفایل ها، عملکرد مطلوب تری نسبت به دو روش دیگر دارد. با ایجاد تغییرات هم زمان در انحراف معیارها، روش $MHWMA2 - MMECD$ عملکرد مطلوبی دارد.

جدول ۲- مقایسه عملکرد خارج از کنترل روش‌های پایش در زمان تغییر پارامتر β_{01} به $\beta_{01} + \delta\sigma_1$

Table 2 - The simulated values when β_{01} shifts to $\beta_{01} + \delta\sigma_1$

روش	شاخص	δ									
		۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸	۱	۱/۲	۱/۴	۱/۶	۱/۸	۲
MHWMA	ARL	۲۱/۶	۷/۶	۴/۳	۳/۰	۲/۲	۱/۷	۱/۴	۱/۲	۱/۰	۱/۰
	SDRL	۱۶/۲	۴/۵	۲/۲	۱/۴	۱/۱	۰/۸	۰/۶	۰/۵	۰/۳	۰/۲
	CVRL	۷۵/۰	۵۹/۷	۵۰/۹	۴۷/۲	۴۷/۱	۴۷/۶	۴۷/۰	۴۲/۸	۳۳/۳	۱۸/۱
MHWMA/ χ^2	ARL	۲۳/۷	۸/۰	۴/۴	۳/۰	۲/۲	۱/۷	۱/۴	۱/۲	۱/۰	۱/۰
	SDRL	۱۶/۱	۴/۳	۲/۰	۱/۳	۰/۹	۰/۸	۰/۶	۰/۴	۰/۲	۰/۱
	CVRL	۶۷/۹	۵۴/۰	۴۶/۲	۴۴/۴	۴۴/۴	۴۴/۹	۴۲/۱	۳۶/۲	۲۵/۰	۹/۱
MHWMA-2/MMECD	ARL	۲۹/۰	۹/۶	۵/۲	۳/۵	۲/۶	۲/۰	۱/۶	۱/۳	۱/۱	۱/۰
	SDRL	۲۱/۴	۶/۳	۲/۸	۱/۸	۱/۲	۱/۰	۰/۸	۰/۷	۰/۵	۰/۴
	CVRL	۷۳/۹	۶۵/۵	۵۴/۶	۵۰/۰	۴۶/۸	۴۶/۰	۵۵/۰	۵۲/۹	۵۰/۰	۴۱/۶
MEWMA/ χ^2	CVRL	۷۷/۴	۶۹/۲	۵۶/۵	۵۲/۰	۵۱/۳	۴۸/۵	۴۷/۲	۴۱/۸	۳۸/۹	۳۴/۴

جدول ۳- مقایسه عملکرد خارج از کنترل روش‌های پایش در زمان تغییر پارامتر β_{11} به $\beta_{11} + \lambda\sigma_1$

Table 3 - The simulated values when β_{11} shifts to $\beta_{11} + \lambda\sigma_1$

روش	شاخص	λ									
		۰/۰۲۵	۰/۰۵	۰/۰۷۵	۰/۱	۰/۱۲۵	۰/۱۵	۰/۱۷۵	۰/۲	۰/۲۲۵	۰/۲۵
MHWMA	ARL	۳۶/۸	۱۳/۵	۷/۳	۴/۸	۳/۶	۲/۸	۲/۳	۲/۰	۱/۷	۱/۴
	SDRL	۳۶/۳	۱۱/۰	۵/۱	۳/۱	۲/۱	۱/۶	۱/۳	۱/۱	۱/۰	۰/۸
	CVRL	۹۸/۶	۸۱/۴	۶۹/۸	۶۴/۵	۵۸/۳	۵۷/۱	۵۶/۵	۵۵/۰	۵۴/۸	۵۴/۱
MHWMA/ χ^2	ARL	۵۴/۴	۱۶/۸	۸/۷	۵/۷	۴/۲	۳/۳	۲/۷	۲/۲	۱/۹	۱/۶
	SDRL	۴۸/۹	۱۲/۶	۵/۹	۳/۵	۲/۴	۱/۸	۱/۴	۱/۲	۱/۱	۰/۹
	CVRL	۸۹/۸	۷۵/۰	۶۷/۸	۶۱/۴	۵۷/۱	۵۴/۵	۵۱/۸	۵۱/۵	۴۷/۸	۴۶/۲
MHWMA-2/MMECD	ARL	۵۰/۴	۱۷/۶	۹/۲	۶/۰	۴/۴	۳/۴	۲/۸	۲/۳	۲/۰	۱/۷
	SDRL	۱۳۱/۰	۶۴/۶	۳۵/۵	۲۲/۷	۱۵/۳	۱۰/۹	۸/۰	۶/۲	۴/۹	۴/۰
	CVRL	۲۵۹/۹	۳۶۷/۰	۳۶۵/۸	۳۶۸/۳	۳۴۷/۷	۳۲۰/۵	۲۸۵/۷	۲۶۹/۵	۲۴۵/۰	۲۳۵/۲
MEWMA/ χ^2	CVRL	۱۱۵/۱	۱۰۰/۴	۹۵/۶	۸۹/۹	۸۱/۸	۷۵/۵	۶۸/۴	۶۲/۵	۶۰/۷	۵۹/۶

جدول ۴- مقایسه عملکرد خارج از کنترل روش‌های پایش در زمان تغییر پارامتر σ_1 به $\gamma\sigma_1$

Table 4 - The simulated values when σ_1 shifts to $\gamma\sigma_1$

روش	شاخص	γ									
		۱/۲	۱/۴	۱/۶	۱/۸	۲	۲/۲	۲/۴	۲/۶	۲/۸	۳
MHWMA	ARL	۸۸/۰	۴۰/۲	۱۹/۰	۱۰/۶	۶/۴	۴/۳	۳/۱	۲/۵	۲/۲	۲/۰
	SDRL	۱۵۸/۶	۹۹/۱	۶۰/۴	۳۴/۹	۱۹/۰	۱۲/۱	۶/۹	۴/۳	۳/۸	۲/۸
	CVRL	۱۸۰/۲	۲۴۶/۷	۳۳۰/۰	۳۱۸/۱	۲۹۷/۸	۲۸۱/۸	۲۲۳/۰	۱۷۲/۷	۱۷۲/۶	۱۴۱/۱
MHWMA/ χ^2	ARL	۴۴/۶	۹/۳	۴/۳	۲/۸	۲/۱	۱/۷	۱/۵	۱/۳	۱/۲	۱/۱
	SDRL	۷۲/۸	۱۴/۹	۵/۹	۳/۲	۲/۱	۱/۴	۱/۱	۰/۷	۰/۶	۰/۴
	CVRL	۱۶۳/۲	۱۶۰/۲	۱۳۷/۲	۱۱۴/۲	۱۰۰/۰	۸۲/۳	۷۳/۳	۵۸/۳	۵۵/۱	۴۱/۶
MHWMA-2/MMECD	ARL	۳۲/۵	۱۱/۳	۱۰/۴	۷/۴	۵/۶	۴/۵	۳/۷	۳/۰	۲/۷	۲/۳
	SDRL	۳۰/۰	۱۰/۲	۱۰/۴	۷/۹	۶/۴	۵/۳	۴/۵	۳/۶	۳/۱	۲/۶
	CVRL	۹۲/۴	۹۱/۰	۱۰۰/۰	۱۰۷/۴	۱۱۴/۶	۱۱۸/۱	۱۲۲/۲	۱۲۱/۷	۱۱۵/۰	۱۱۶/۶
MEWMA/ χ^2	CVRL	۱۹۵/۵	۱۹۰/۸	۱۸۳/۱	۱۷۹/۸	۱۷۳/۸	۱۶۴/۱	۱۶۰/۸	۱۵۴/۳	۱۵۰/۲	۱۴۳/۹

جدول ۵- عملکرد CVRL خارج از کنترل به‌ازای تغییرات هم‌زمان در پارامترها در زمان تغییر β_{01} به $\beta_{01} + \delta_1\sigma_1$ و β_{02} به $\beta_{02} + \delta_2\sigma_2$

Table 5 - CVRL comparisons under combinations of intercepts shifts from β_{01} to $\beta_{01} + \delta_1\sigma_1$ and β_{02} to $\beta_{02} + \delta_2\sigma_2$

δ_1			δ_2	روش
۰/۵	۰/۳	۰/۱		
۶۸/۸	۸۳/۵	۱۰۵/۸	۰/۱	MHWMA
۶۲/۰	۷۳/۴	۸۵/۷		MHWMA/ χ^2
۶۵/۱	۷۶/۱	۹۰/۹		MHWMA-2/MMECD
۶۹/۶	۸۲/۷	۸۳/۵	۰/۳	MHWMA
۶۵/۳	۷۲/۴	۷۵/۳		MHWMA/ χ^2
۶۵/۷	۷۶/۰	۷۷/۴		MHWMA-2/MMECD
۶۶/۶	۶۹/۶	۶۷/۷	۰/۵	MHWMA
۵۹/۶	۶۴/۰	۶۲/۰		MHWMA/ χ^2
۶۳/۱	۶۴/۲	۶۴/۶		MHWMA-2/MMECD

جدول ۶- عملکرد CVRL از کنترل به‌ازای تغییرات هم‌زمان در پارامترها در زمان تغییر β_{11} به $\beta_{11} + \lambda_1\sigma_1$ و β_{12} به $\beta_{12} + \lambda_2\sigma_2$

Table 6 - CVRL comparisons under combinations of intercepts shifts from β_{11} to $\beta_{11} + \lambda_1\sigma_1$ and β_{12} to $\beta_{12} + \lambda_2\sigma_2$

λ_1			λ_2	روش
۰/۱	۰/۰۶	۰/۰۲		
۸۰/۴	۸۴/۲	۱۰۰/۲	۰/۰۲	MHWMA
۶۴/۶	۷۷/۶	۹۰/۰		MHWMA/ χ^2
۷۷/۲	۸۲/۸	۹۴/۰		MHWMA-2/MMECD
۶۵/۵	۸۱/۰	۸۰/۴	۰/۰۶	MHWMA
۶۳/۷	۷۵/۳	۷۸/۲		MHWMA/ χ^2
۷۸/۳	۸۱/۸	۸۱/۴		MHWMA-2/MMECD
۶۴/۵	۶۸/۹	۶۶/۶	۰/۱	MHWMA
۶۱/۴	۶۳/۷	۶۴/۶		MHWMA/ χ^2
۷۷/۰	۷۸/۸	۷۵/۷		MHWMA-2/MMECD

جدول ۷- عملکرد CVRL خارج از کنترل به‌ازای تغییرات هم‌زمان در پارامترها در زمان تغییر σ_1 به $\gamma_1\sigma_1$ و σ_2 به $\gamma_2\sigma_2$

Table 7 - CVRL comparisons under combinations of standard deviations shifts from σ_1 to $\gamma_1\sigma_1$ and σ_2 to $\gamma_2\sigma_2$

γ_1			γ_2	روش
۱/۵	۱/۳	۱/۱		
۲۱۳/۷	۱۹۶/۸	۷۱/۲	۱/۱	MHWMA
۱۰۴/۱	۱۱۵/۱	۱۲۱/۷		MHWMA/ χ^2
۷۰/۷	۶۷/۶	۷۱/۲		MHWMA-2/MMECD
۲۲۰/۵	۲۱۴/۸	۶۴/۶	۱/۳	MHWMA
۱۰۰/۰	۱۰۹/۰	۱۱۶/۴		MHWMA/ χ^2
۷۳/۰	۶۹/۴	۶۴/۴		MHWMA-2/MMECD
۲۴۲/۲	۲۲۹/۳	۶۹/۵	۱/۵	MHWMA
۹۱/۴	۹۸/۰	۱۰۶/۹		MHWMA/ χ^2
۷۷/۴	۷۲/۲	۶۹/۵		MHWMA-2/MMECD

به‌منظور بررسی اثر ضریب همبستگی بر عملکرد روش‌های پیشنهادی، مقادیر شاخص CVRL برای تغییرات عرض از مبدأ و به‌ازای مقادیر $\rho = 1/0$ و $\rho = 9/0$ در جدول (۸) ارائه شده است. نتایج حاصل از شبیه‌سازی نشان می‌دهد که با افزایش مقدار ρ ، عملکرد کلیه روش‌ها بهبود می‌یابد. بررسی اثر ضریب همبستگی بر تغییرات پارامتر شیب و انحراف معیار نیز براساس مقادیر CVRL نشان داد که روند تغییرات مشابه است؛ به‌طوری‌که افزایش مقدار ρ در تمامی حالت‌ها به بهبود عملکرد روش‌ها منجر می‌شود.

جدول ۸- مقادیر CVRL شبیه‌سازی‌شده به‌ازای مقادیر مختلف ρ و زمان تغییر پارامتر β_{01} به $\beta_{01} + \delta\sigma_1$ Table 8 - Simulated CVRL values for different values of ρ when β_{01} shifts to $\beta_{01} + \delta\sigma_1$

روش	ρ	δ									
		۲	۱/۸	۱/۶	۱/۴	۱/۲	۱	۰/۸	۰/۶	۰/۴	۰/۲
MHWMA	۰/۱	۳۴/۴	۴۵/۵	۵۵/۸	۵۸/۵	۵۷/۹	۵۵/۲	۵۵/۳	۶۰/۳	۷۰/۸	۸۲/۲
	۰/۹	۵/۵	۲۹/۴	۴۰/۲	۴۴/۳	۴۵/۲	۴۴/۸	۴۴/۲	۴۶/۹	۵۱/۰	۷۰/۲
MHWMA/ χ^2	۰/۱	۲۳/۸	۳۷/۶	۴۴/۶	۵۱/۵	۵۰/۰	۵۰/۳	۵۰/۴	۵۴/۹	۶۵/۷	۸۰/۸
	۰/۹	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۱/۰	۲/۰	۱۶/۲	۴۰/۲	۴۴/۵	۵۲/۳	۶۱/۳
MHWMA-2/MMECD	۰/۱	۴۸/۲	۵۲/۶	۵۳/۲	۵۶/۶	۵۱/۰	۵۱/۱	۵۱/۹	۵۹/۰	۶۶/۰	۸۶/۸
	۰/۹	۱۲/۱	۳۰/۲	۴۱/۴	۴۵/۴	۴۵/۱	۴۲/۹	۴۴/۶	۴۹/۷	۵۸/۵	۷۳/۲

در ادامه، اثر پارامتر هموارسازی بر عملکرد روش‌های پیشنهادی بررسی شد. به‌منظور تحلیل حساسیت، مقادیر شاخص CVRL حاصل از شبیه‌سازی برای تغییرات عرض از مبدأ و به‌ازای مقدار $w = 2/0$ ، در جدول (۹) ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش پارامتر هموارسازی، عملکرد کلیه روش‌ها ضعیف می‌شود. بررسی اثر پارامتر هموارسازی بر تغییرات شیب و انحراف معیار نیز نشان داد که روند تغییرات مشابه است؛ به‌طوری‌که افزایش مقدار w در تمامی حالت‌ها به تضعیف عملکرد روش‌های پایش منجر می‌شود.

نتایج شبیه‌سازی‌های انجام‌شده در بخش‌های پیشین، به ارزیابی عملکرد خارج از کنترل نمودارهای کنترل پیشنهادی در فاز دوم و در حالت صفر^{۳۰} مربوط بوده است. در این حالت، با فرض آنکه تغییر درست در ابتدای پایش ایجاد می‌شود، معیار CVRL با استفاده از شاخص‌های ARL و SDRL، محاسبه شده است؛ اما ارزیابی عملکرد روش‌های پایش در حالت صفر به‌تنهایی کافی نیست؛ زیرا در عمل، تغییرات فرآیند لزوماً در ابتدای پایش رخ نمی‌دهند، بلکه ممکن است فرآیند مدت زمانی (t) تحت کنترل باشد و بعد تغییر ایجاد شود. در این شرایط که حالت پایدار^{۳۱} نامیده می‌شود، لازم است عملکرد Steady-State روش‌های پیشنهادی نیز بررسی شود. برای بررسی عملکرد حالت پایدار روش‌های پیشنهادی با استفاده از مثال عددی بخش قبل، تغییرات مختلفی در پارامترهای پروفایل‌ها (β_{01} و β_{11}) و در مقاطع زمانی مختلف ($0 \sim \infty$) ایجاد شد و مقادیر Steady-State ARL با استفاده از

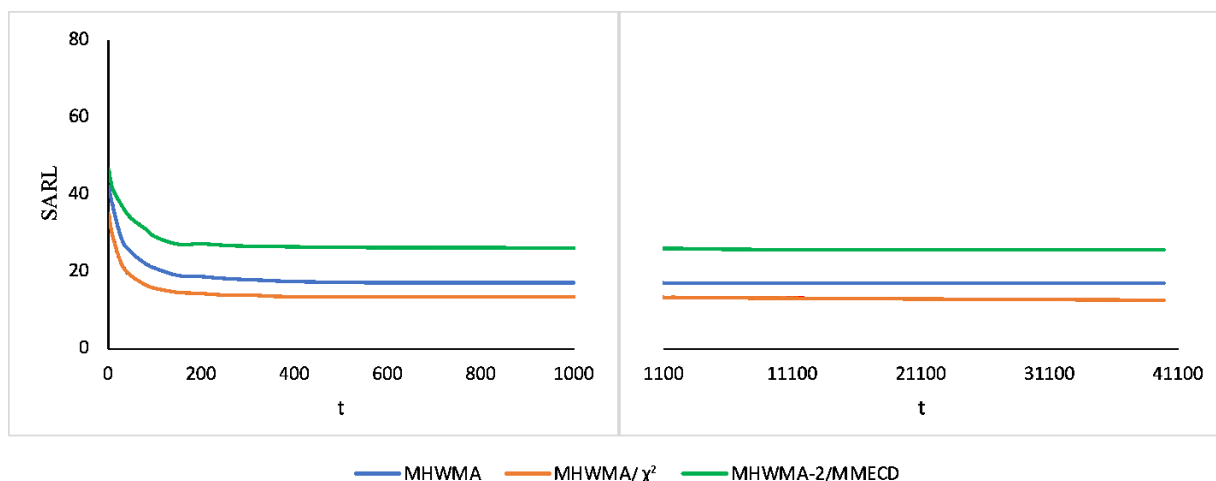
الگوریتم شبیه‌سازی مونت‌کارلو با 10^5 تکرار به دست آمد. شکل (۱) عملکرد حالت پایدار، روش‌های بررسی‌شده را با در نظر گرفتن تغییری به‌اندازه $0/2$ در پارامتر β_{01} و براساس مقادیر مختلف t نشان می‌دهد. نتایج حاصل بیانگر آن است که روش MHWMA/ χ^2 تغییر ایجادشده را سریع‌تر از دیگر روش‌ها شناسایی می‌کند. همچنین با افزایش مقدار تغییر ایجادشده، عملکرد تمامی روش‌ها بهبود می‌یابد. بررسی تغییرات پارامتر β_{11} نیز نشان می‌دهد که روند نتایج مشابه حالت، به β_{01} مربوط است. به‌منظور جلوگیری از طولانی‌شدن متن، از ارائه نتایج مربوط به

دیگر مقادیر صرف نظر شده است. در شکل (۱)، محور افقی به دلیل گستردگی دامنه، در دو بازه مجزا نمایش داده شده است.

جدول ۹- مقادیر CVRL شبیه سازی شده به ازای $w = 0.2$ و زمان تغییر پارامتر β_{01} به $\beta_{01} + \delta\sigma_1$

Table 9 - Simulated CVRL values for $w = 0.2$ when β_{01} shifts to $\beta_{01} + \delta\sigma_1$

روش	δ									
	۲	۱/۸	۱/۶	۱/۴	۱/۲	۱	۰/۸	۰/۶	۰/۴	۰/۲
MHWMA	۲۵/۷	۳۸/۷	۴۹/۳	۵۳/۱	۵۳/۲	۵۴/۵	۵۳/۸	۵۵/۴	۶۵/۸	۸۰/۲
MHWMA/ χ^2	۱۳/۶	۲۹/۱	۴۱/۸	۴۸/۶	۵۲/۵	۵۱/۹	۵۰/۲	۵۲/۴	۵۹/۸	۷۶/۵
MHWMA-2/MMECD	۴۶/۸	۵۲/۷	۵۴/۹	۵۵/۸	۵۴/۶	۵۴/۳	۵۶/۷	۶۰/۴	۶۹/۳	۷۸/۴



شکل ۱- منحنی روش های بررسی شده ساس مقادیر t و در زمان تغییر پارامتر β_{01} به $\beta_{01} + 0.2\sigma_1$

Fig. 1- SARL values as a function of t , when β_{01} shifts to $\beta_{01} + 0.2\sigma_1$

۵- مطالعه موردی

به منظور نشان دادن کاربرد روش های پیشنهادی، از دو مثال مطرح شده در مطالعه نورالسنا و همکاران (۲۰۱۰) و ایوبی و همکاران (۲۰۱۴) استفاده شده است.

۵-۱ فرآیند کالیبراسیون دستگاه پرس در ایران خودرو

نورالسنا و همکاران (۲۰۱۰) مثالی از فرآیند کالیبراسیون یک دستگاه پرس ۱۶۰۰ تن را در سالن بدنه سازی ایران خودرو ارائه کردند. در این دستگاه، نیروی اعمال شده به قطعات تحت پرس با چهار سیلندر موجود، متفاوت از مقدار نیروی تنظیم شده بود؛ بنابراین، تعیین رابطه میان نیروهای تنظیم شده و اعمال شده، سبب تنظیم بهتر نیروها می شود تا نیروهای واقعی به مقادیر مورد انتظار نزدیک تر باشند. آنها در مطالعه خود، هریک از نیروهای اعمال شده در سیلندرها را یک متغیر پاسخ و به صورت یک تابع خطی ساده از نیروی تنظیم شده مدل سازی کردند؛ درحالی که نیروهای اعمال شده به یکدیگر وابسته بودند؛ بنابراین مدل نهایی به صورت یک پروفایل خطی ساده چندمتغیره حاصل شد. به منظور پایش این پروفایل، ۱۱ مقدار مختلف برای متغیر x (نیروی تنظیم شده) برابر با ۸۰، ۵۰، ۱۱۰،

۱۴۰، ۱۷۰، ۲۰۰، ۲۳۰، ۲۶۰، ۲۹۰، ۳۲۰ و ۳۵۰ در نظر گرفته و در فاز ۱ پایش، برآورد حداقل مربعات پارامترهای این پروفایل به صورت رابطه (۳۲) حاصل شد:

$$Y_1 = -8.5 + 0.87x + \varepsilon_1 \quad (32)$$

$$Y_2 = -5.8 + 0.95x + \varepsilon_2$$

$$Y_3 = 3.2 + 1.04x + \varepsilon_3$$

$$Y_4 = 13.6 + 1.09x + \varepsilon_4$$

($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$) دارای توزیع نرمال ۴ متغیره با بردار میانگین صفر و ماتریس کوواریانس رابطه (۳۳) است:

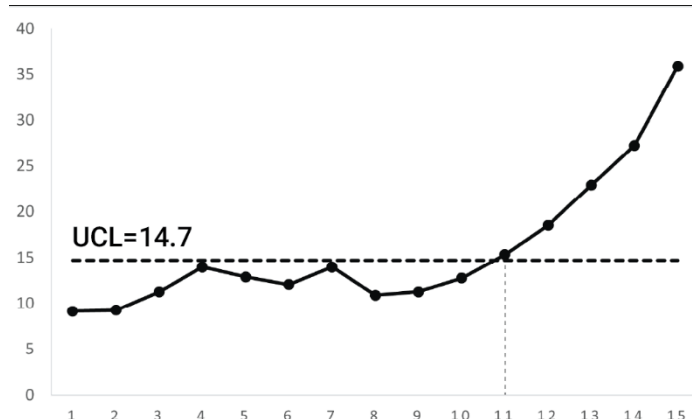
$$\Sigma = \begin{bmatrix} 80.0 & 89.6 & 45.1 & 25.3 \\ 89.6 & 122.1 & 71.5 & 29.1 \\ 45.1 & 71.5 & 189.0 & -28.8 \\ 25.3 & 29.1 & -28.8 & 84.4 \end{bmatrix} \quad (33)$$

برای بررسی عملکرد روش‌های پیشنهادی، ابتدا ۱۰ پروفایل خطی ساده چندمتغیره تحت کنترل و طبق روابط بالا، تولید می‌شود؛ سپس ۱۰ پروفایل بعدی خارج از کنترل تولید می‌شود که در آنها مقدار β_{01} از $-8/5$ به -4 تغییر یافته است. تغییر در نظر گرفته شده مطابق با مطالعه نورالسنا و همکاران (۲۰۱۰) است تا امکان مقایسه عملکرد روش‌ها فراهم باشد.

نمودارهای کنترل روش‌های پیشنهادی در شکل‌های (۲) تا (۴) نشان داده شده است. در کلیه روش‌ها، حد کنترل بالا برای دستیابی به ARL تحت کنترل ۲۰۰ انتخاب شده است. حد کنترل بالا در نمودار χ^2 برابر با $\chi^2_{44,0.25} = 74/9$ و در دیگر نمودارها با شبیه‌سازی به دست آمده است.

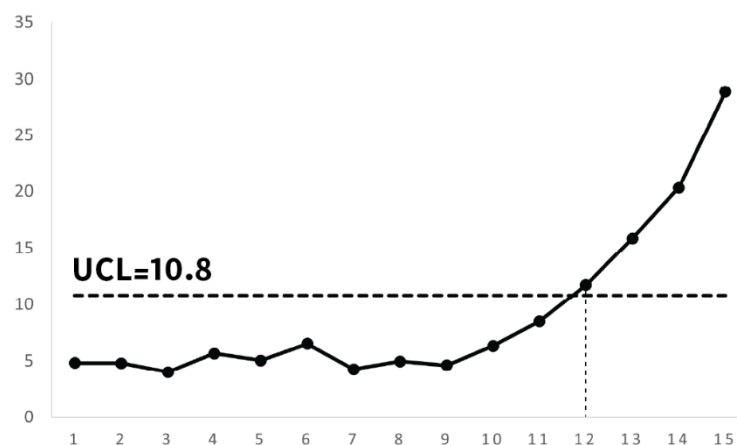
همان‌طور که از نتایج به دست آمده مشخص است، براساس روش MHWMA، بلافاصله پس از ایجاد تغییر و در پروفایل یازدهم، هشدار خارج از کنترل می‌دهد. روش‌های $MHWMA/\chi^2$ و $MHWMA - 2/MMECD$ نیز، وجود تغییر را در پروفایل دوازدهم تشخیص می‌دهند. در کلیه روش‌ها، نمودار MHWMA که برای تشخیص تغییرات پارامترهای رگرسیونی طراحی شده است، تغییر ایجادشده را هشدار می‌دهد و در مقایسه با روش‌های پیشین و دیگر نمودارها از جمله MEWMA، سریع‌تر عمل می‌کند؛ بنابراین عملکرد مطلوب این نمودار در تشخیص تغییرات پارامترهای پروفایل تأیید می‌شود.

(الف) نمودار MHWMA برای پایش
ضرایب پروفایل
(a). MHWMA chart for coefficients of
regression line



(ب) نمودار χ^2 برای پایش ماتریس
کوواریانس

(b). χ^2 chart for covariance matrix

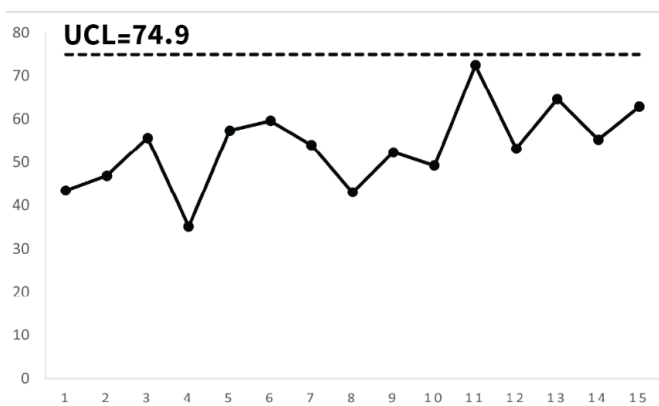


شکل ۲- عملکرد روش MHWMA در مطالعه موردی اول با تغییر از $\beta_{01} = 5/8$ به $\beta_{01} = 4$ در زیرگروه ۱۱

Fig 2. MHWMA control chart for the first case study with a shift of 4.5 in the β_{01} in the 11th sample

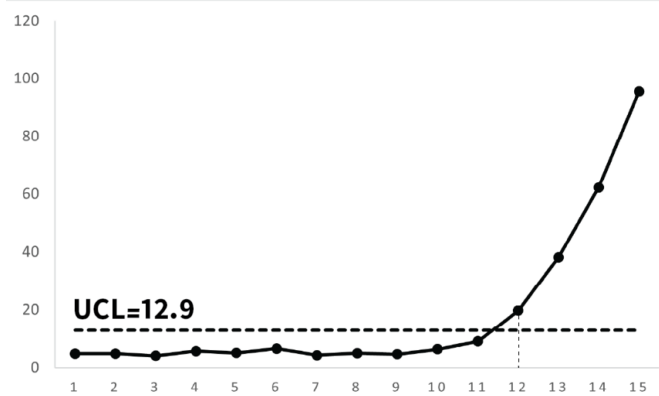
(الف) نمودار MHWMA برای پایش
عرض از مبدأ

(a). MHWMA chart for y-intercepts



(ب) نمودار MHWMA برای پایش شیب

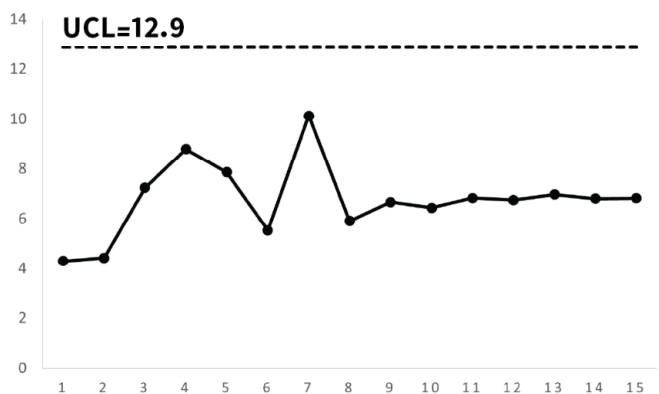
(b). MHWMA chart for slopes



(پ) نمودار MMECD برای پایش ماتریس

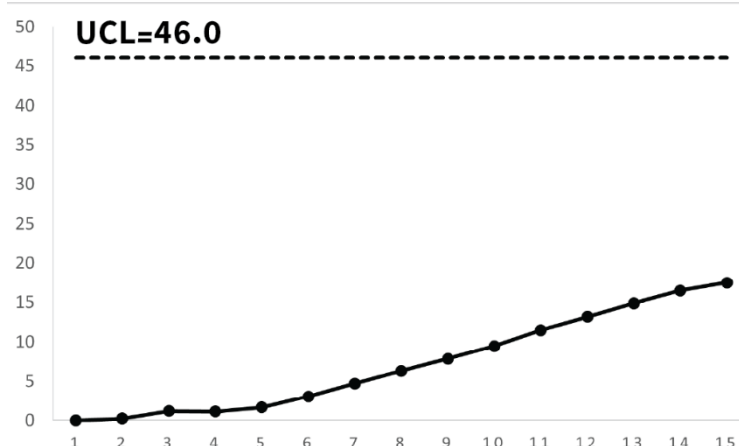
کوواریانس

(c). MMECD chart for covariance
matrix



شکل ۳- عملکرد روش MHWMA/ χ^2 در مطالعه موردی اول با تغییر از $\beta_{01} = 5/8$ به $\beta_{01} = 4$ در زیرگروه ۱۱

Fig 3. MHWMA/ χ^2 control chart for the first case study with a shift of 4.5 in the β_{01} in the 11th sample



شکل ۴- عملکرد روش MHWMA_2/MMECD در مطالعه موردی اول با تغییر از $\beta_{01} = 5/8$ به $\beta_{01} = 4$ در زیرگروه ۱۱
 Fig 4. MHWMA_2/MMECD control chart for the first case study with a shift of 4.5 in the β_{01} in the 11th sample

۲-۵ فرآیند کالیبراسیون در یک گشتاورسنج الکتریکی

دومین مطالعه موردی در این بخش را ایوبی و همکاران (۲۰۱۴) مطرح و فرآیند کالیبراسیون یک گشتاورسنج الکتریکی را برای اندازه‌گیری گشتاور در بخشی از فرآیند تولید شرکت ایران‌خودرو بررسی کردند. در این مثال، مقدار گشتاور در سه نوع اتصال مختلف به صورت سخت، نیمه‌سخت و نرم مطالعه شده است که مقادیر اسمی گشتاورها متغیر مستقل و مقادیر اندازه‌گیری شده آنها، متغیر پاسخ در نظر گرفته می‌شود. متغیرهای پاسخ به یکدیگر وابسته‌اند؛ بنابراین مدل کلی به صورت یک پروفایل خطی ساده چندمتغیره خواهد بود. با در نظر گرفتن مقادیر ثابت ۲۰، ۲۵، ۳۰، ۳۵ و ۴۰ برای مقدار اسمی گشتاور، اطلاعات موردنیاز در فاز ۱ کنترل جمع‌آوری و در نهایت پارامترهای پروفایل به صورت رابطه (۳۴) برآورد شده است:

$$Y_1 = 1.0696 + 0.9881x + \varepsilon_1 \quad (34)$$

$$Y_2 = -0.3758 + 0.9534x + \varepsilon_2$$

$$Y_3 = -3.0574 + 1.0340x + \varepsilon_3$$

بردار $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ دارای توزیع نرمال ۳ متغیره با بردار میانگین صفر و ماتریس کواریانس رابطه (۳۵) است.

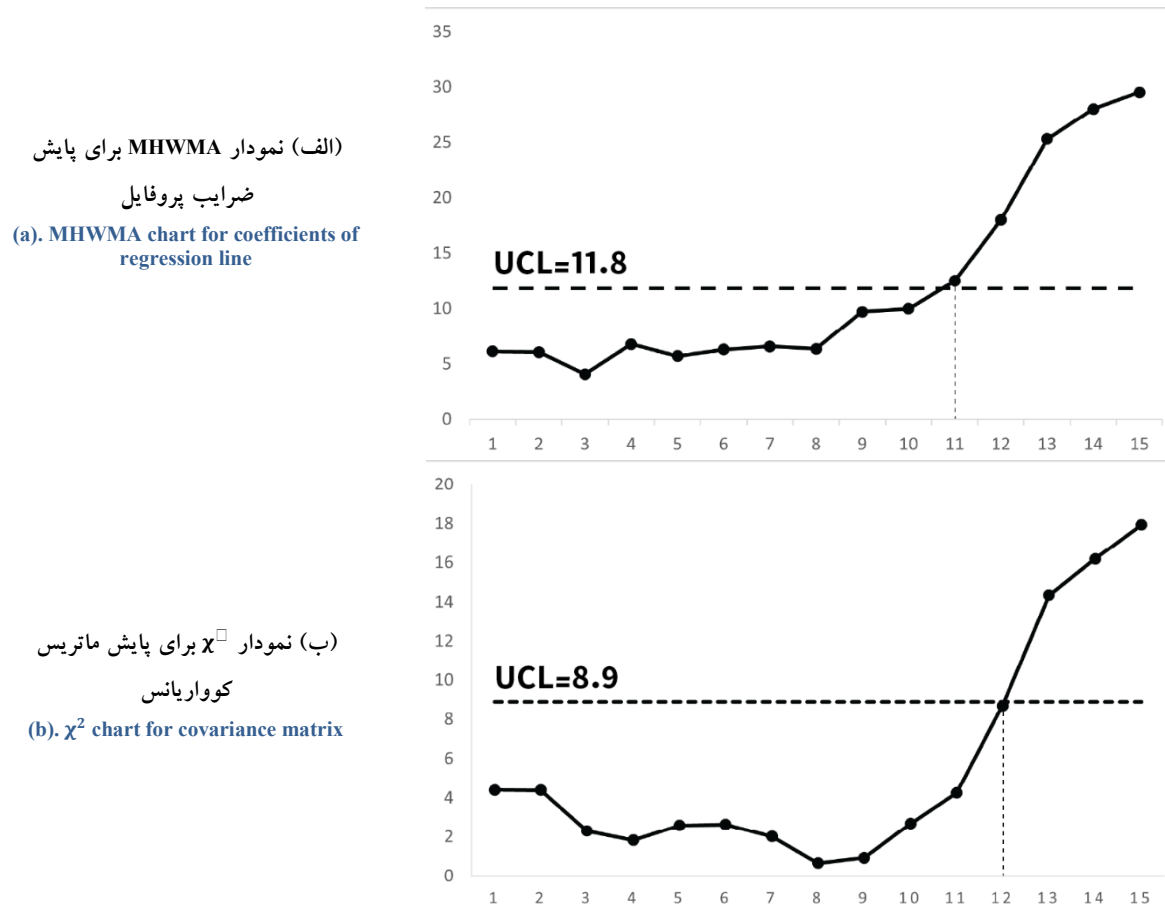
$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.8514 & -0.5728 & -0.4667 \\ -0.5728 & 4.0003 & 3.6758 \\ -0.4667 & 3.6758 & 3.6971 \end{bmatrix} \quad (35)$$

مشابه مطالعه موردی قبل، به جهت بررسی عملکرد روش‌های پیشنهادی، ابتدا ۱۰ پروفایل تحت کنترل تولید و سپس در پروفایل یازدهم، یک تغییر هم‌زمان در عرض از مبدأ و شیب پروفایل سوم ایجاد می‌شود. تغییر در عرض از مبدأ به میزان $+0/5$ و تغییر در شیب به میزان $+0/03$ است و ۵ پروفایل تحت این تغییر، تولید می‌شود.

نمودارهای کنترل روش‌های پیشنهادی در شکل‌های (۵) تا (۷) نشان داده شده است. در کلیه روش‌ها، حد کنترل بالا برای دستیابی به ARL تحت کنترل ۲۰۰ انتخاب شده است. حد کنترل بالا در نمودار χ^2 برابر با $\chi^2_{15,0.025} = 34/9$ و در دیگر نمودارها با شبیه‌سازی به دست آمده است.

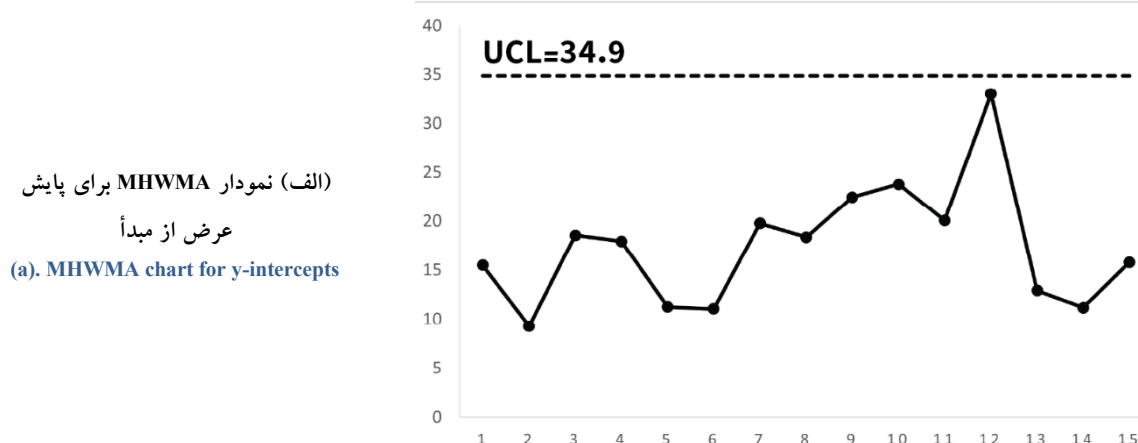
نتایج به دست آمده نشان می‌دهد روش MHWMA وضعیت خارج از کنترل فرآیند را سریع‌تر از دیگر روش‌ها و در پروفایل یازدهم، بلافاصله پس از ایجاد تغییر شناسایی می‌کند. آماره نمودار MHWMA در روش $MHWMA/\chi^2$ در زیرگروه دوازدهم بسیار نزدیک به حد کنترل بالاست و این نمودار در زیرگروه سیزدهم، هشدار

خارج از کنترل می‌دهد. در روش $MHWMA - 2/MMECD$ نیز هر دو نمودار $MHWMA$ برای پایش عرض از مبدأ و شیب، به ترتیب در زیرگروه‌های ۱۲ و ۱۳، هشدار خارج از کنترل می‌دهند. مطالعه بررسی شده نشان می‌دهد روش‌های پیشنهادی در تشخیص تغییرات هم‌زمان پارامترهای پروفایل نیز، عملکرد مطلوبی دارند.

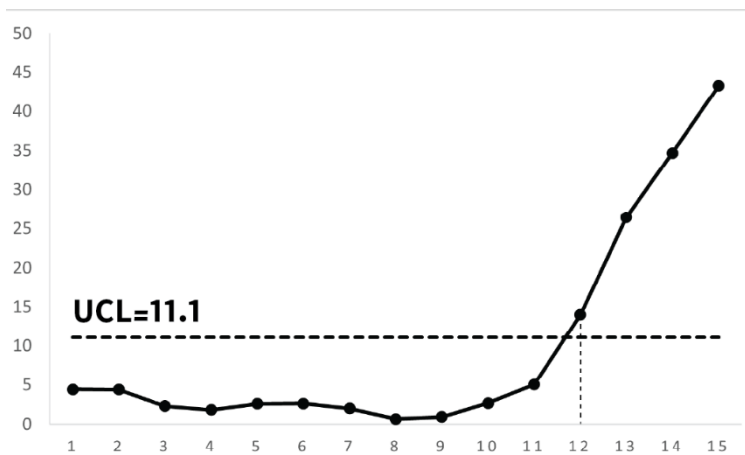


شکل ۵- عملکرد روش $MHWMA$ در مطالعه موردی دوم با تغییر هم‌زمان در پارامترهای β_{03} و β_{13} در زیرگروه ۱۱

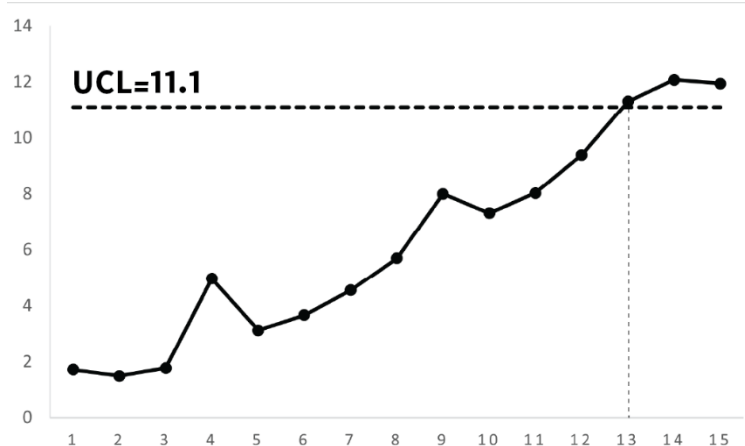
Fig 5. $MHWMA$ control chart for the second case study with a simultaneous shift of β_{03} and β_{13} in the 11th sample



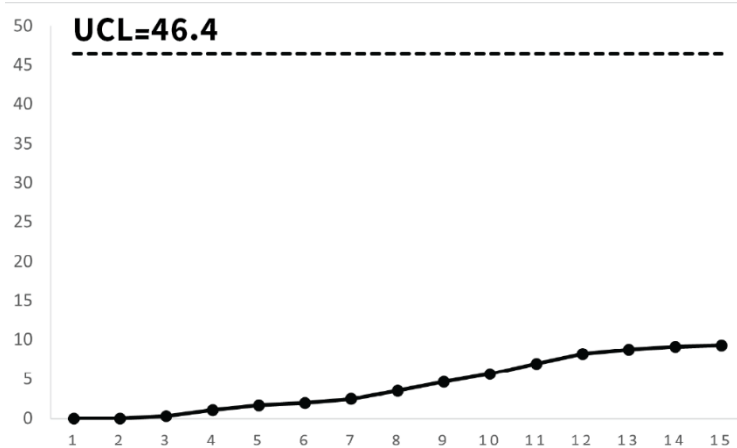
(ب) نمودار MHWMA برای پایش شیب
(b). MHWMA chart for slopes



(پ) نمودار MMECD برای پایش ماتریس
کوارینانس
(c). MMECD chart for covariance
matrix



شکل ۶- عملکرد روش MHWMA/ χ^2 در مطالعه موردی دوم با تغییر هم‌زمان در پارامترهای β_{03} و β_{13} در زیرگروه ۱۱
Fig 6. MHWMA/ χ^2 control chart for the second case study with a simultaneous shift of β_{03} and β_{13} in the 11th sample



شکل ۷- عملکرد روش MHWMA2/MMECD در مطالعه موردی دوم با تغییر هم‌زمان در پارامترهای β_{03} و β_{13} در زیرگروه ۱۱
Fig 7. MHWMA2/MMECD control chart for the second case study with a simultaneous shift of β_{03} and β_{13} in the 11th sample

۶- نتیجه گیری

در این مطالعه، سه روش برای پایش پروفایل خطی چندگانه چندمتغیره در فاز ۲ ارائه شد. در این روش‌ها، از نمودار کنترل MHWMA برای پایش پارامترهای رگرسیونی پروفایل و از نمودارهای χ^2 و MMECD برای پایش

پراکندگی پروفایل استفاده شده است. عملکرد روش‌های پیشنهادی با استفاده از شبیه‌سازی و معیار CVRL، با یکدیگر مقایسه شد. مطالعات شبیه‌سازی نشان داد روش‌های پیشنهادی در تشخیص تغییرات پله‌ای ضرایب رگرسیونی پروفایل، عملکرد مطلوبی دارند. روش $MHWMA/\chi^2$ در تشخیص تغییرات پارامترهای رگرسیونی پروفایل بهترین عملکرد را دارد و در تشخیص تغییرات بزرگ پراکندگی نیز، سریع‌تر از دیگر روش‌ها عمل می‌کند. در تشخیص تغییرات کوچک‌تر پراکندگی پروفایل نیز، روش $MHWMA-2/MMECD$ عملکرد مناسبی دارد. در نهایت با استفاده از دو مثال واقعی در فرآیند کالبراسیون، عملکرد روش‌های پیشنهادی در دنیای واقعی نیز بررسی شد و نتایج به دست آمده، عملکرد مناسب این روش‌ها را تأیید کرد.

ارزیابی روش‌های پیشنهادی در این مطالعه، با تمرکز بر شناسایی تغییرات پله‌ای انجام شده است. بررسی عملکرد این روش‌ها در شرایطی نظیر داده‌های مفقودشده، حضور داده‌های پرت و تغییرات تدریجی، به‌عنوان مسیرهای پژوهشی آینده مدنظر قرار می‌گیرد. همچنین استفاده از نمودارهای $MHWMA$ و $HWMA$ در پایش انواع پروفایل‌ها و به‌کارگیری نمودارهای $MHWMA$ توسعه‌یافته در پایش پروفایل خطی ساده، برای زمینه‌های تحقیقاتی آتی پیشنهاد می‌شود.

References

- Abbas, N. (2018). Homogeneously weighted moving average control chart with an application in substrate manufacturing process. *Computers & Industrial Engineering*, 120, 460-470. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2018.05.009>.
- Adegoke, N. A., Abbasi, S. A., Smith, A. N., Anderson, M. J., & Pawley, M. D. (۲۰۱۹). A multivariate homogeneously weighted moving average control chart. *IEEE Access*, 7, 9586-9597. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2891988>.
- Adegoke, N. A., Riaz, M., Ganiyu, K. O., & Abbasi, S. A. (2021). One-sided and two one-sided multivariate homogeneously weighted moving charts for monitoring process mean. *IEEE Access*, 9, 80388-80404. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2021.3085349>.
- Adibi, A., Montgomery, D. C., & Borror, C. M. (2014). A P-value approach for Phase II monitoring of multivariate profiles. *International Journal of Quality Engineering and Technology*, 4(2), 133-143 <https://doi.org/10.1504/IJQET.2014.060432>.
- Ahmadi Karavigh, M. H., & Amiri, A. (2024). MEWMA based control charts with runs rules for monitoring multivariate simple linear regression profiles in Phase II. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 53(3), 1107-1134. <https://doi.org/10.1080/03610918.2022.2028833>.
- Ahmadi Yazdi, A., Shafiee Kamalabad, M., Oberski, D. L., & Grzegorzczak, M. (2023). Bayesian multivariate control charts for multivariate profiles monitoring. *Quality Technology & Quantitative Management*, 1-36. <https://doi.org/10.1080/16843703.2023.2214386>.
- Amiri, A., Sogandi, F., & Ayoubi, M. (2018). Simultaneous monitoring of correlated multivariate linear and GLM regression profiles in Phase II. *Quality Technology & Quantitative Management*, 15(4), 435-458. <https://doi.org/10.1080/16843703.2016.1226706>.
- Ayoubi, M., Kazemzadeh, R., & Noorossana, R. (2014). Estimating multivariate linear profiles change point with a monotonic change in the mean of response variables. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 75(9-12), 1537-1556. <https://doi.org/10.1007/s00170-014-6208-6>.
- Bahrami, H., Niaki, S. T. A., & Khedmati, M. (2019). Monitoring multivariate profiles in multistage processes. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 1-29. <https://doi.org/10.1080/03610918.2019.1626882>.
- Bhat, S. V. a. M. C. (2021). R-Posterior Control Charts for Process Variation. *International Journal of Research in Engineering and Science (IJRES)*, 9(6), 14-33.

- Chen, G., Cheng, S. W., & Xie, H. (2005). A new multivariate control chart for monitoring both location and dispersion. *Communications in Statistics—Simulation and Computation*®, 34(1), 203-217. <https://doi.org/10.1081/SAC-200047087>.
- Ghasemi, Z., Zeinal Hamadani, A., & Ahmadi Yazdi, A. (2025). New methods for phase II monitoring of multivariate simple linear profiles. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 54(1), 193-217. <https://doi.org/10.1080/03610918.2023.2249268>.
- Haq, A. (2022). Adaptive MEWMA charts for univariate and multivariate simple linear profiles. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 51(16), 5383-5411. <https://doi.org/10.1080/03610926.2020.1839100>.
- Haq, A., Bibi, M., & Brown, J. (2021). Monitoring multivariate simple linear profiles using individual observations. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 91(17), 3573-3592. <https://doi.org/10.1080/00949655.2021.1943665>.
- Healy, J. D. (1987). A note on multivariate CUSUM procedures. *Technometrics*, 29(4), 409-412. <https://doi.org/10.1080/00401706.1987.10488268>.
- Jahani, S., Kontar, R., Veeramani, D., & Zhou, S. (2018). Statistical monitoring of multiple profiles simultaneously using Gaussian processes. *Quality and Reliability Engineering International*, 34(8), 1510-1529. <https://doi.org/10.1002/qre.2326>.
- Kang, L., & Albin, S. L. (2000). On-line monitoring when the process yields a linear profile. *Journal of quality Technology*, 32(4), 418-426. <https://doi.org/10.1080/00224065.2000.11980027>.
- Khedmati, M., & Niaki, S. T. A. (2016). Phase II monitoring of general linear profiles in the presence of between-profile autocorrelation. *Quality and Reliability Engineering International*, 32(2), 443-452. <https://doi.org/10.1002/qre.1762>.
- Kim, K., Mahmoud, M. A., & Woodall, W. H. (2003). On the monitoring of linear profiles. *Journal of quality Technology*, 35(3), 317-328. <https://doi.org/10.1080/00224065.2003.11980225>.
- Majika, J.-C., Shongwe, S. C., Chatterjee, K., & Koukouvinos, C. (2022). Monitoring univariate and multivariate profiles using the triple exponentially weighted moving average scheme with fixed and random explanatory variables. *Computers & Industrial Engineering*, 163, 107846. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2021.107846>.
- Noorossana, R., Eyvazian, M., & Vaghefi, A. (2010). Phase II monitoring of multivariate simple linear profiles. *Computers & Industrial Engineering*, 58(4), 563-570. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2009.12.003>.
- Noorossana, R., Saghaei, A., & Amiri, A. (2011). *Statistical analysis of profile monitoring* (Vol. 865). John Wiley & Sons .
- Pieters, L., Malela-Majika, J. C., Human, S., & Castagliola, P. (2023). A new multivariate extended homogeneously weighted moving average monitoring scheme incorporated with a support vector machine. *Quality and Reliability Engineering International*, 9(6), 2454-2475. <https://doi.org/10.1002/qre.3356>.
- Rahimi, S. B., Amiri, A., & Ghashghaei, R. (2019). Simultaneous monitoring of mean vector and covariance matrix of multivariate simple linear profiles in the presence of within profile autocorrelation. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 50(6), 1791-1808. <https://doi.org/10.1080/03610918.2019.1588314>.
- Riaz, M., Ajadi, J. O., Mahmood, T., & Abbasi, S. A. (2019). Multivariate mixed EWMA-CUSUM control chart for monitoring the process variance-covariance Matrix. *IEEE Access*, 7, 100174-100186. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2928637>.
- Saghaei, A., Noorossana, R., Eyvazian, M., & Vaghefi, A. (2008). Statistical monitoring of multivariate linear profiles. *2008 IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management* , 2037-2040. <https://doi.org/10.1109/IEEM.2008.4738229>.
- Soleimani, P., Noorossana, R., & Niaki, S. (2013). Monitoring autocorrelated multivariate simple linear profiles. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 67(5-8), 1857-1865. <https://doi.org/10.1007/s00170-012-4614-1>.
- Yousefi, S ., Maleki, M. R., Salmasnia, A., & Anbohi, M. K. (2023). Performance of multivariate

homogeneously weighted moving average chart for monitoring the process mean in the presence of measurement errors. *Journal of Advanced Manufacturing Systems*, 22(01), 27-40. <https://doi.org/10.1142/S0219686723500026>.

- ¹ Noorossana et al
- ² Saghaei et al.
- ³ Ayoubi et al.
- ⁴ Adibi et al.
- ⁵ Majika et al.
- ⁶ Haq
- ⁷ Haq et al.
- ⁸ Ahmadi Karavigh & Amiri
- ⁹ Ghasemi et al.
- ¹⁰ Soleimani et al.
- ¹¹ Khedmati & Niaki
- ¹² Rahimi et al.
- ¹³ Jahani et al.
- ¹⁴ Amiri et al.
- ¹⁵ Bahrani et al.
- ¹⁶ Ahmadi Yazdi et al.
- ¹⁷ Homogeneously Weighted Moving Average - HWMA
- ¹⁸ Abbas
- ¹⁹ Adegok et al.
- ²⁰ Multivariate Homogeneously Weighted Moving Average - MHWMA
- ²¹ Yousefi et al.
- ²² Pieters et al.
- ²³ Kang & Albin
- ²⁴ Kim et al.
- ²⁵ Multivariate Mixed EWMA-CUSUM-MMECD
- ²⁶ Riaz et al.
- ²⁷ Chen et al.
- ²⁸ Healy
- ²⁹ Bhat
- ³⁰ Zero-State
- ³¹ Steady-State