

سیستم‌های دینامیکی با رفتار آماری پایدار

میثم هدیه‌لو^{ID}

چکیده. در این مقاله، کلاس جدیدی از نگاشت‌های روی چنبره دو بعدی $\mathbb{T}^2$ معرفی می‌شود که به‌طور یکنواخت انبساطی نیستند و هیچ نوع شکافتگی غالب ندارند؛ با این وجود، نشان می‌دهیم که این نگاشت‌ها به‌طور پایدار دارای تعداد متناهی اندازه احتمال ناوردای مطلقاً پیوسته نسبت به لبگ هستند. اثبات بر پایه مفهوم «مجازاً انبساطی» بنا است که اخیراً از سوی تسوجی معرفی شده است. روش ما در این مقاله ساخت مثال‌های صریح از این دست را ممکن می‌سازد.

۱. مقدمه

مسئله توصیف رفتار آماری بلند مدت سیستم‌های دینامیکی قطعی، از اوایل قرن بیستم یکی از موضوعات محوری در ریاضیات بوده است. ریشه‌های این موضوع در آثار عمیق و بنیادین بیرخوف [۴] و فون نویمان [۱۷] نهفته است که قضایای ارگودیک پیوندی دقیق میان میانگین‌های زمانی در طول مسیرها و میانگین‌های فضایی نسبت به اندازه‌های احتمال ناوردا برقرار می‌کند. این نتایج مسیر دقیق ریاضی برای استفاده از قوانین آماری در سیستم‌های قطعی فراهم می‌کند، اما یک پرسش اساسی بی‌پاسخ می‌ماند: در میان خانواده‌ی معمولاً بزرگ و اغلب ناشمارا از اندازه‌های ناوردا که یک سیستم دینامیکی می‌پذیرد، کدام اندازه‌ها از نظر فیزیکی یا مشاهداتی برای توصیف رفتار شرایط اولیه مرتبط و مناسب هستند؟ این پرسش با ظهور نظریه آشوب و پذیرش این اصل که سیستم‌های قطعی می‌توانند وابستگی حساسی به شرایط اولیه داشته باشند، اهمیتی ویژه می‌یابد. در چنین سیستم‌هایی، هر یک از مسیرها ذاتاً غیرقابل پیش‌بینی هستند، با این حال آزمایش‌های عددی و مشاهدات فیزیکی به‌طور مداوم الگوهای آماری پایداری را آشکار می‌کنند. این مشاهدات وجود اندازه‌های ناوردای متمایزی را نشان می‌دهند که بر رفتار مجانبی مدارهایی حاکم هستند که از مجموعه‌هایی از شرایط اولیه شروع می‌شوند که معمولاً نسبت به اندازه لبگ بزرگ هستند.

اولین پیشرفت شگرف در جهت حل این مسئله در مطالعه سیستم‌های دینامیکی یک‌بعدی، به‌ویژه نگاشت‌های بروی یک بازه فشرده، صورت گرفت. به‌طور مثال، رفتار آشوبناک نگاشت‌های قطعه‌ای یکنوا و انبساطی، به‌طور کامل مورد تحلیل قرار گرفته است. اگرچه این سیستم‌ها اغلب بی‌نهایت اندازه احتمال ناوردا می‌پذیرند، شواهد تجربی و شبیه‌سازی‌های عددی نشان دهنده وجود یک توزیع ناوردای است، که رفتار آماری تقریباً تمام شرایط اولیه را توصیف می‌کند. این تفاوت میان اندازه‌های

عبارات و کلمات کلیدی: نگاشت‌های مجازاً انبساطی، اندازه احتمال ناوردای مطلقاً پیوسته، عملگرهای شبه‌فشرده.

نوع مقاله: پژوهشی

دبیرتخصصی رابط: مسعود سبزواری

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۱۱/۲۷ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۲/۰۱ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۵/XX/XX

ارجاع به مقاله: میثم هدیه‌لو، سیستم‌های دینامیکی با رفتار آماری پایدار، ریاضی و جامعه، XX شماره X (۱۴۰۰). <https://dx.doi.org/10.22108/msci.2026.148131.1790>

ناوردا و قابلیت مشاهده فیزیکی آن‌ها منجر به معرفی «اندازه‌های احتمال ناورداً مطلقاً پیوسته»^۱ شد؛ یعنی اندازه‌های ناوردایی که نسبت به اندازه لبگ مطلقاً پیوسته هستند.

نظریه مدرن ACIP ها در اوایل دهه ۱۹۷۰ با دستاورد بنیادین لازوتا و یورک [۱۱] آغاز شد. آن‌ها ثابت کردند که برای رده‌های گسترده‌ای از نگاشت‌های بازه‌ای انبساطی قطعه‌ای، ACIP ها نه تنها وجود دارند، بلکه منحصربه‌فرد و از نظر آماری پایدار هستند. آن‌ها با استفاده از «نامساوی لازوتا-یورک» و تکنیک‌های آنالیز تابعی؛ تکرار و تکامل چگالی‌ها تحت دینامیک را کنترل کردند؛ این نامساوی کران‌های یکنواختی روی تغییرات^۲ فراهم می‌کند و ویژگی‌های فشردگی لازم برای اثبات همگرایی را تضمین می‌کند. این کار با معرفی دیدگاه آنالیز تابعی در مطالعه اندازه‌های ناوردا، نقطه عطفی در این حوزه ایجاد کرده است. محور اصلی این مسیر تحقیقاتی، استفاده نظام‌مند از «عملگر فروبنیوس-پرون»^۳ است که تکامل چگالی‌های احتمال تحت یک سیستم دینامیکی را توصیف می‌کند [۱۰]. با مطالعه این عملگر روی فضاها با ناخ مناسب، مانند فضاهای توابع با تغییرات کراندار، فضاهای سوبولف و غیره، چگالی‌های ناوردا می‌توانند به‌عنوان نقاط ثابت یک عملگر خطی مشخص شوند. این چارچوب نه تنها نتایج وجود و منحصربه‌فردی را اثبات می‌کند، بلکه تحلیلی دقیق از منظم بودن، نرخ همگرایی و پایداری تحت اختلالات دینامیک را نیز ممکن ساخت.

یکی از ویژگی‌های مشخص اندازه‌های احتمال پایای مطلقاً پیوسته ACIP ها، ارتباط فیزیکی آن‌هاست. برخلاف اندازه‌های ناورداً دلخواه، ACIP ها توزیع مجانبی مدارهایی را توصیف می‌کنند که از مجموعه‌هایی از شرایط اولیه با اندازه لبگ مثبت سرچشمه می‌گیرند. برای چنین اندازه‌هایی، نتایج قضیه ارگودیک بیرخوف معنای فیزیکی مستقیم پیدا می‌کنند: میانگین‌های زمانی برای تقریباً هر شرط اولیه (نسبت به لبگ) به میانگین‌های فضایی همگرا می‌شوند. علاوه بر این، ACIP ها با ویژگی جاذب بودن در فضای اندازه‌های احتمال نشان می‌دهند، که چرا شبیه‌سازی‌های عددی نگاشت‌های بازه‌ای آشوبناک به‌طور مداوم به یک توزیع ناورداً واحد همگرا می‌شوند، با وجود اینکه اندازه‌های پایای زیادی وجود دارند.

در اواخر قرن بیستم، بیش از پیش نظریه ACIP ها توسعه یافت و دقیق‌تر شد. تعمیم به رده‌های گسترده‌تری از نگاشت‌ها، فرض‌های منظم بودن ضعیف‌تر و ویژگی‌های آماری دقیق‌تر مانند زوال همبستگی‌ها^۴، قضایای حد مرکزی^۵ و انحرافات بزرگ^۶ توسط نویسندگان متعددی ایجاد شد. مجموعه این پیشرفت‌ها گواه آن است که مطالعه ACIP ها موضوعی مرکزی در نظریه ارگودیک هموار و سیستم‌های دینامیکی است.

مفهوم ACIP ها بعداً از طریق معرفی اندازه‌های سینای-روئل-بوون^۷ (SRB) به سیستم‌های با ابعاد بالاتر تعمیم یافت [۵، ۱۲، ۱۳]. اندازه‌های SRB که در ابتدا برای سیستم‌های به‌طور یکنواخت هذلولوی صورت‌بندی شده بودند که با پیوستگی مطلق در امتداد خمینه‌های ناپایدار (به جای اندازه لبگ در کل فضا) مشخص می‌شوند. با این حال، در سیستم‌های دینامیکی یک‌بعدی، این مفاهیم دقیقاً بر هم منطبق هستند. به این ترتیب، ACIP ها را می‌توان به عنوان ساده‌ترین اندازه‌های نابدهی از نظریه اندازه‌های فیزیکی در نظر گرفت.

تحولات اخیر نظریه ACIP ها را به سیستم‌های غیریکنواخت هذلولوی، از جمله نگاشت‌هایی با نقاط بحرانی، رفتار متناوب و نرخ‌های اختلاط کند، گسترش داده است. نتایج پیشگامانه توسط یاکوبسون [۹]، بندیکس و کارلسون [۳] و دیگران نشان داد که ACIP ها ممکن است هنوز در این رده از سیستم‌های دینامیکی حساس‌تر وجود داشته باشند، اگرچه بررسی ویژگی‌های آماری آن‌ها به تکنیک‌های بسیار دقیق‌تری نیاز دارد. این پیشرفت‌ها روش‌های احتمالی و کنترل اعوجاج پیچیده را با هم ترکیب کرده و پیوند میان سیستم‌های دینامیکی و مکانیک آماری را عمیق‌تر کرده‌اند. همچنین تحقیقات معاصر به بررسی ACIP ها در سیستم‌های غیریکنواخت انبساطی، سیستم‌های دینامیکی تصادفی و همچنین به مطالعه با ابعاد نامتناهی می‌پردازد، که در آثاری مانند [۱، ۱۶] بررسی شده است.

¹ACIP ²variation ³Perron-Frobenius operator ⁴decay of correlations ⁵central limit theorems ⁶large deviations

⁷Sinai-Ruelle-Bowen measures

هزلولوی بودن^۸ تحت اختلالات^۹ کوچک در توپولوژی^{۱۰} C^1 پایدار است و نقش اساسی در ایجاد دینامیک غنی و پیچیده ایفا می‌کند. با این حال، به‌طور یکنواخت هزلولوی بودن شرط مهمی است در که بسیاری از سیستم‌های طبیعی رفتار پیچیده‌تری نشان می‌دهد.

دو مسیر عمده برای تعمیم سیستم‌های دینامیکی به‌طور یکنواخت هزلولوی بودن وجود دارد. در مسیر اول، رده‌های اصلی فراتر از سیستم‌های دینامیکی به‌طور یکنواخت هزلولوی یا سیستم‌های دینامیکی به‌طور یکنواخت انبساطی، سیستم‌های غیریکنواخت هزلولوی و سیستم‌های غیریکنواخت انبساطی هستند، که در آن‌ها انقباض‌ها یا انبساط‌ها دیگر یکنواخت نیستند اما به‌طور مجانبی و به‌طور متوسط در طول مدارها ظاهر می‌شوند.

به دلیل پیشرفت‌های چشمگیر در پنج دهه گذشته، نشان داده شده است که بسیاری از ویژگی‌های آماری و ویژگی‌های ارگودیک سیستم‌های دینامیکی به‌طور یکنواخت هزلولوی، برای سیستم‌های دینامیکی به‌طور غیریکنواخت هزلولوی نیز برقرار است. اما از طرف دیگر، ویژگی به‌طور غیریکنواخت هزلولوی بودن لزوماً پایدار نیست. در واقع، یک مسئله مهم به شرح زیر است.

مسئله ۱.۱. شرایطی را برای سیستم‌های دینامیکی ارائه دهید که پایداری به‌طور غیریکنواخت هزلولوی یا به‌طور غیریکنواخت انبساطی را تضمین کند.

مسیر دیگر بر پایه مفهوم «هزلولوی بودن جزئی»^{۱۰} بنا شده است، جایی که کلاف مماسی به سه قسمت تقسیم می‌شود: جهت‌های به‌طور یکنواخت انبساطی و منقبض‌شونده و یک کلاف میانی که در آن هر رفتاری ممکن است، در حالی که انبساط و انقباض ضعیف‌تر از نرخ‌های موجود در دو کلاف دیگر است. در این مسیر، مفهوم کلی‌تر «شکافتگی غالب»^{۱۱} نیز وجود دارد که در ابتدا از سوی منیه^{۱۲} برای دیفئومورفیسم‌ها معرفی شد. برای یک اندومورفیسم $f: M \rightarrow M$ ، می‌گوییم که این نگاشت دارای شکافتگی غالب با مرتبه κ است اگر برای هر مدار $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ ، خانواده‌هایی از زیرفضاهای κ -بعدی و $(d - \kappa)$ -بعدی $E(x_i)$ و $F(x_i)$ وجود داشته باشند که در شرایط زیر صدق کنند:

$$T_{x_i}M = E(x_i) \oplus F(x_i) \bullet$$

$$Df(F(x_i)) = F(f(x_i)), Df(E(x_i)) \subseteq E(f(x_i)) \bullet$$

$$\bullet \text{ عدد } N > 0 \text{ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای تمام بردارهای واحد } u \in E(x_i) \text{ و } v \in F(x_i)$$

$$|Df^N(u)| \leq \frac{1}{2} |Df^N(v)|$$

این ساختار، اگرچه ضعیف‌تر از هزلولوی بودن یکنواخت است، اما همچنان در توپولوژی C^1 پایدار است و کنترل قابل توجهی بر دینامیک فراهم می‌کند.

هدف این مقاله پاسخگویی به برخی پرسش‌های بنیادی در این زمینه است:

مسئله ۲.۱. آیا مجموعه‌ای باز از اندومورفیسم‌ها وجود دارد که از هزلولوی بودن یکنواخت دور هستند و شکافتگی غالب ندارند، اما دارای تعداد متناهی اندازه ناوردای ارگودیک مطلقاً پیوسته باشند؟ آیا این اندازه‌ها رفتار آماری تقریباً همه نقاط را توصیف می‌کنند؟

۱.۱. نتیجه اصلی.

قضیه ۳.۱. مجموعه $\mathcal{U}$ از نگاشت‌های موضعاً وارون‌پذیر روی چنبره دوبعدی وجود دارد که در توپولوژی C^1 باز است، به‌طوری‌که:

^۸hyperbolicity ^۹perturbations ^{۱۰}partial hyperbolicity ^{۱۱}dominated splitting ^{۱۲}R. Mane

(الف) اگر $f \in U$ ، آنگاه f به‌طور یکنواخت انبساطی نیست و هیچ شکافتگی غالبی را نمی‌پذیرد؛
 (ب) هر نگاشت C^∞ مانند $f \in U$ تعداد متناهی اندازه ارگودیک مطلقاً پیوسته می‌پذیرد که چگالی آن‌ها نسبت به اندازه هموار در $H^2(M)$ است و تقریباً هر نقطه روی M نسبت به اندازه لبگ برای یکی از آن‌ها ژنریک است.

۲.۱. ایده‌های اثبات. اثبات بر پایه مفهوم مهم اندومورفیسم‌های مجازاً انبساطی^{۱۳} استوار است که اخیراً توسط ام. تسوجی^{۱۴} [۱۵] معرفی شده است. او شبه‌فشرده بودن عملگر پرون-فروبنیوس را روی یک فضای سوبولف با مرتبه مثبت برای چنین سیستم‌هایی ثابت کرد. نتیجه اصلی این است که اگر f در این رده باشد، آنگاه شعاع طیفی اساسی عملگر پرون-فروبنیوس آن روی $H^\mu(M)$ کوچکتر از ۱ است. این ویژگی شبه‌فشرده بودن منجر به پیامدهای دینامیکی مهمی می‌شود، مانند وجود تعداد متناهی اندازه ارگودیک مطلقاً پیوسته.

اما مثال‌های شناخته‌اندکی از نوع مجازاً انبساطی وجود دارند. برای یافتن مثال‌های جدید از یک تفسیر هندسی برای مجازاً انبساطی بهره می‌گیریم (به بخش ۲.۲ مراجعه کنید). این دیدگاه هندسی به ما اجازه می‌دهد تا یک شرط کافی برای مجازاً انبساطی بودن یک اندومورفیسم ارائه دهیم. بررسی این شرط کافی نسبتاً آسان است و به ما اجازه می‌دهد تا رده‌های جدیدی از اندومورفیسم‌ها ارائه کنیم که به‌طور جزئی هذلولوی یا حاصل ضرب اریب^{۱۵} نباشند. ساخت این رده از مثال‌ها بر پایه یک اختلال^{۱۶} و جراحی دقیق استوار است. این اختلالات روی گوی‌های کوچک اعمال می‌شوند^{۱۷} و در توپولوژی C^0 کوچک هستند، اما در توپولوژی C^1 می‌توانند بسیار بزرگ باشند. در واقع، با استفاده از تکنیک تابع برآمدگی^{۱۸}، ما یک اندومورفیسم خطی f_R را در نزدیکی یک نقطه ثابت تغییر می‌دهیم و مشتق آن را با یک ماتریس مناسب انتخاب شده B جایگزین می‌نماییم. این اختلال به گونه‌ای طراحی شده است که ویژگی «مجازاً انبساطی» را حفظ کند ولی هرگونه شکافتگی غالب را از بین ببرد.

۲. نگاشت‌های مجازاً انبساطی

در این بخش، برخی تعاریف و نتایج مورد استفاده در اثبات قضیه‌ها را بیان می‌کنیم. فرض کنید M یک خمینه ریمانی هموار و بسته باشد. همچنین فرض کنید $f: M \rightarrow M$ یک درون‌ریختی^{۱۹} از کلاس C^1 باشد و دترمینان ژاکوبی f در هیچ نقطه‌ای از خمینه صفر نشود. ما با $f^\dagger$ نگاشت القا شده بر کلاف هم‌ماسی^{۲۰} T^*M را نمایش می‌دهیم که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f^\dagger: T^*M \rightarrow T^*M$$

$$f^\dagger((q, \zeta); f) = (f(q), ((D_q f)^*)^{-1}(\zeta)),$$

که در آن ζ یک تابع خطی روی $T_q M$ است و در نتیجه، $((D_q f)^*)^{-1}(\zeta)$ یک تابع خطی روی $T_{f(q)} M$ خواهد بود. برای هر تابع خطی غیرصفر یا هم‌بردار (p, η) روی T^*M و هر عدد حقیقی مثبت μ ، تعریف می‌کنیم:

$$b^\mu((p, \eta); f) := \sum_{f^\dagger(q, \zeta) = (p, \eta)} \frac{(\|\eta\|/\|\zeta\|)^\mu}{|Jf(q)|}$$

که در آن $\|\cdot\|$ نرم عملگر وابسته به متریک ریمانی روی T^*M است. سپس تعریف می‌کنیم:

$$B^\mu(f) := \sup \{b^\mu((p, \eta); f) \mid 0 \neq (p, \eta) \in T^*M\}.$$

¹³virtually expanding ¹⁴Tsujii ¹⁵skew-product ¹⁶perturbation ¹⁷support ¹⁸bump-function ¹⁹endomorphism

²⁰cotangent bundle

اگر $f, g : M \rightarrow M$ دو درون‌ریختی C^1 با دترمینان ژاکوبی غیرصفر باشند، آنگاه داریم:

$$B^\mu(f \circ g) \leq B^\mu(f) \cdot B^\mu(g).$$

تعریف ۱.۲ (نگاشت‌های مجازاً انبساطی). برای $\mu > 0$ ، یک نگاشت C^1 مانند $f : M \rightarrow M$ را μ -مجازاً انبساطی گوئیم اگر:

$$\inf_{n \geq 1} (B^{2\mu}(f^n))^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (B^{2\mu}(f^n))^{\frac{1}{n}} < 1.$$

این حد به دلیل «لم زیر-جمعی» وجود دارد. مجموعه نگاشت‌های μ -مجازاً انبساطی روی M را با $\mathcal{VE}^\mu(M)$ نشان می‌دهیم. همچنین قرار می‌دهیم $\mathcal{VE}(M) := \bigcup_{\mu > 0} \mathcal{VE}^\mu(M)$. نگاشتی که به $\mathcal{VE}(M)$ تعلق داشته باشد، مجازاً انبساطی نامیده می‌شود.

اکنون یک تعریف هندسی معادل برای درون‌ریختی‌های مجازاً انبساطی بیان می‌کنیم که از نتایج [۷] حاصل می‌شود. ابتدا فرض کنید هر نقطه $p \in M$ دارای n پیش‌تصویر $q_1, q_2, \dots, q_n$ باشد؛ و $\zeta_i := (D_{q_i} f)^* \eta$ که به صورت $\zeta_i(w) := (D_{q_i} f)^* \eta(w) = \eta(D_{q_i} f(w))$ تعریف می‌شود. آنگاه:

$$\begin{aligned} b^\mu((p, \eta); f) &= \sum_{f^\dagger(q, \zeta) = (p, \eta)} \frac{(\|\eta\|/\|\zeta\|)^\mu}{|Jf(q)|} = \sum_{i=1}^n \frac{(\|\eta\|/\|\zeta_i\|)^\mu}{|Jf(q_i)|}, \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{|Jf(q_i)|} \left(\sup_{\substack{|v|=1 \\ v \in T_p M}} |\eta(v)| \right)^\mu \left(\sup_{\substack{|w|=1 \\ w \in T_{q_i} M}} |\eta(D_{q_i} f(w))| \right)^{-\mu}. \end{aligned}$$

برای هر تابع خطی کراندار η روی TM ، بردار منحصر به فرد v_η وجود دارد به طوری که $\eta(w) = \langle w, v_\eta \rangle$. داریم:

$$\begin{aligned} b^\mu((p, \eta); f) &= \sum_{i=1}^n |Jf(q_i)|^{-1} \left(\frac{\sup_{|v|=1} |\langle v, v_\eta \rangle|}{\sup_{\substack{|w|=1 \\ w \in T_{q_i} M}} |\langle D_{q_i} f(w), v_\eta \rangle|} \right)^\mu \\ &= \sum_{i=1}^n |Jf(q_i)|^{-1} \left(\frac{\sup_{|v|=1} |\text{Proj}_{v_\eta} v|}{\sup_{\substack{|w|=1 \\ w \in T_{q_i} M}} |\text{Proj}_{v_\eta} D_{q_i} f(w)|} \right)^\mu \\ &= \sum_{i=1}^n |Jf(q_i)|^{-1} \left(\frac{1}{\frac{1}{2} \text{diam}(\text{Proj}_{v_\eta}(D_{q_i} f(T_{q_i}^1 M)))} \right)^\mu. \end{aligned}$$

که در آن $T_{q_i}^1 M$ کلاف مماس واحد در نقطه q_i است.

تفسیر هندسی نگاشت‌های مجازاً انبساطی به ما اجازه می‌دهد یک شرط کافی برای مجازاً انبساطی بودن یک درون‌ریختی ارائه دهیم. بررسی این مفهوم قوی‌تر در مثال‌هایی که در بخش‌های بعدی معرفی می‌کنیم، آسان‌تر است.

لم ۲.۲. فرض کنید درون‌ریختی C^1 به نام f در نامساوی زیر برای هر نقطه $p \in M$ صدق کند:

$$\sum_{f(q)=p} \frac{1}{|Jf(q)| (m(D_q f))^\mu} < 1.$$

آنگاه f یک نگاشت $(\mu/2)$ -مجازاً انبساطی است.

اثبات. فرض کنید q یک پیش تصویر از p باشد. می دانیم که:

$$B^\mu(f) = \sup_{v \in T_p M} \sum_{f(q)=p} \frac{2^\mu}{|Jf(q)| (\text{diam}(\text{Proj}_v(E_f(q))))^\mu}.$$

واضح است که شعاع داخلی بیضی گون $E_f(q)$ حداقل $m(D_q f)$ است. این نتیجه می دهد که

$$\text{diam}(\text{Proj}_v(E_f(q))) \geq 2m(D_q f).$$

بنابراین:

$$B^\mu(f) \leq \sum_{f(q)=p} \frac{2^\mu}{|Jf(q)| (2m(D_q f))^\mu} < 1.$$

□

اکنون برای هر $\mu \geq 0$ و هر $p \in M$ تعریف می کنیم:

$$c^\mu(p; f) := \sum_{f(q)=p} \frac{1}{|Jf(q)| (m(D_q f))^\mu}$$

سپس تعریف می کنیم:

$$c^\mu(f) := \sup \{c^\mu(p; f) \mid p \in M\}.$$

مشاهده می کنیم که برای هر جفت از درون ریختی های f و g :

$$c^\mu(f \circ g) \leq c^\mu(f) \cdot c^\mu(g),$$

که از آن نتیجه می شود دنباله $(c^\mu(f^n))_{n \geq 1}$ زیر-ضرب شونده است. بنابر لم زیر-جمعی، حد زیر وجود دارد:

$$C_\mu(f) = \inf_{n \geq 1} (c^\mu(f^n))^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (c^\mu(f^n))^{\frac{1}{n}}$$

لم ۳.۲. فرض کنید f و g دو درون ریختی هموار و C^1 -مزدوج باشند. آنگاه f در $1 < C_\mu(f)$ صدق می کند اگر و تنها اگر g در $1 < C_\mu(g)$ صدق کند.

اثبات. فرض کنید $1 < C_\mu(f)$. برای اثبات اینکه g در $1 < C_\mu(g)$ صدق می کند، کافی است نشان دهیم برای $k \in \mathbb{N}$ به قدر کافی بزرگ و برای هر نقطه $p \in M$ ، نامساوی زیر برقرار است:

$$\sum_{g^k(q)=p} \frac{1}{|Jg^k(q)| (m(D_q g^k))^\mu} < 1.$$

برای اثبات این نامساوی، از تخمین زیر استفاده می کنیم:

$$m(D_q(h^{-1} \circ f^k \circ h)) \geq m(D_{f^k \circ h(q)}(h^{-1})) \cdot m(D_{h(q)}(f^k)) \cdot m(D_q(h)).$$

همچنین فرض کنید:

$$H = \sup_{x,y} \frac{1}{J(h^{-1})(x) \cdot J(h)(y) \cdot m(D_x h^{-1}) \cdot m(D_y(h))}.$$

برای $k \in \mathbb{N}$ داریم:

$$\sum_{g^k(q)=p} \frac{1}{|Jg^k(q)| (m(D_q g^k))^{\mu}} \leq H \sum_{g^k(q)=p} \frac{1}{|J(f^k)(h(q))| (m(D_{h(q)}(f^k)))^{\mu}} \\ \leq H \cdot c^{\mu}(f^k).$$

□

۳. عملگر انتقال

^{۲۱} در این بخش، به مطالعه طیف عملگرهای پرون-فروبنیوس برای درون‌ریختی‌های مجازاً انبساطی می‌پردازیم و وجود اندازه‌های ناوردای مطلقاً پیوسته را برای تمام درون‌ریختی‌های هموار در مجموعه‌های باز C^1 ساخته شده در بخش قبل را اثبات می‌کنیم.

۱.۳. عملگرهای شبه-دیفرانسیل. ^{۲۲} در این قسمت، مقدمات و تعاریف پایه‌ای در آنالیز نیمه‌کلاسیک که برای مطالعه طیف عملگرهای پرون-فروبنیوس مورد نیاز است را ارائه می‌دهیم. برای جزئیات بیشتر در مورد آنالیز نیمه‌کلاسیک به [۲]، [۱۴] و [۱۸] ارجاع می‌دهیم. یک روش استاندارد برای تعریف عملگرهای شبه-دیفرانسیل روی یک خمینه هاسدورف فشرده M ، ساخت یک افزاز واحد تابع یک پوشش از اطلس‌های مختصاتی و اعمال آنالیز نیمه‌کلاسیک روی $\mathbb{R}^d$ در هر چارت است. با این حال، هنگامی که عملگر به این صورت تعریف می‌شود، نماد ^{۲۳} عملگر عموماً به انتخاب چارت‌ها بستگی دارد.

تعریف ۱.۳. عملگرهای شبه-دیفرانسیل $\hat{P}$ به فرم زیر هستند:

$$\hat{P}(\varphi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i\xi(x-y)} P(x, \xi) \varphi(y) dy d\xi$$

که در آن $P(x, \xi)$ یک تابع هموار است که «نماد» $\hat{P}$ نامیده می‌شود و به رده مناسبی از توابع تعلق دارد که شرایط منظم بودن ^{۲۴} خاصی را در بی‌نهایت ارضا می‌کنند.

۲.۳. طیف عملگر پرون-فروبنیوس. عملگر پرون-فروبنیوس $\mathcal{P}_f$ القا شده توسط f نقش مهمی در مطالعه تکامل چگالی‌ها تحت دینامیک f ایفا می‌کند. ابتدا فرض می‌کنیم k درجه نگاشت f باشد و یک زیرمجموعه همبند باز کوچک $W \subset M$ را چنان انتخاب می‌کنیم که پیش‌تصویر آن $f^{-1}(W)$ شامل زیرمجموعه‌های باز همبند $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_k$ باشد. حال فرض کنید $h \in C^\infty(M)$ یک تابع هموار با تکیه‌گاه روی $f^{-1}(W) = \bigcup_{j=1}^k \Omega_j$ باشد. فرض کنید h_j تحدید h به Ω_j و f_j تحدید f به Ω_j باشد که یک دیفئومورفیسم روی W است. در این صورت داریم:

$$\mathcal{P}_f(h)(x) = \sum_{j=1}^k P_j(h_j(x)),$$

که در آن $P_j = \frac{h_j}{J} \circ f_j^{-1}$ است و P_j نشان‌دهنده تحدید P به توابعی است که تکیه‌گاه آن‌ها در Ω_j قرار دارد. اکنون از آنالیز نیمه‌کلاسیک و نظریه عملگرهای شبه-دیفرانسیل برای مطالعه طیف عملگر پرون-فروبنیوس استفاده می‌کنیم. فرض کنید $\mu \geq 0$ و تابع فرار ^{۲۵} از کلاس C^∞ را روی T^*M به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_\mu(x, \xi) := \langle |\xi| \rangle^\mu \in S^\mu, \quad \langle s \rangle = \sqrt{1 + s^2}.$$

²¹transfer operator ²²pseudo-differential operators ²³symbol ²⁴regular ²⁵escape function

A_μ به رده نمادهای $S_{1,0}^\mu$ تعلق دارد و شرایط منظم بودن خاصی را در بی‌نهایت ارضا می‌کند که اجازه می‌دهد عملگر شبه-دیفرانسیل مناسب $\hat{A}_\mu$ را بنا کنیم:

$$\hat{A}_\mu(\varphi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \int e^{i\xi \cdot (x-y)} A_\mu(x, \xi) \varphi(y) dy d\xi.$$

ما اکنون یک فضای باناخ مناسب و مجموعه‌ای از نُرم‌ها را تعریف می‌کنیم تا نامساوی‌های لازوتا-یورک^{۲۶} مورد نیاز برای اثبات شبه-فشرده بودن عملگر پرون-فروبنیوس را به دست آوریم. در اینجا از فضای سوبولف $H^\mu(M)$ با نُرم زیر $\|\cdot\|_{H^\mu}$ استفاده می‌کنیم:

$$\|\varphi\|_{H^\mu}^2 = \|\hat{A}_\mu(\varphi)\|_{L^2}^2 + \|\varphi\|_{L^2}^2.$$

چارچوب عملگر پرون-فروبنیوس را برای نگاشت‌های مجازاً انبساطی به صورت زیر بنا می‌کنیم. شرایط زیر مفروض است:

- دو فضای باناخ: فرض کنید $(H^\mu(M), \|\cdot\|_\mu)$ یک فضای باناخ (فضای قوی) و $(H^{\mu'}(M), \|\cdot\|_{\mu'})$ یک فضای باناخ (فضای ضعیف) باشد، به طوری که عملگر $\mathcal{P}_f$ روی هر دو به طور پیوسته عمل کند.
- پیوستگی: برای هر μ ، یک ثابت $\bar{C} > 0$ وجود دارد به طوری که:

$$\|h\|_{H^{\mu'}} \leq \bar{C} \|h\|_{H^\mu}.$$

- غالب بودن: نُرم ضعیف توسط نُرم قوی کنترل می‌شود، یعنی ثابت $\tilde{C} > 0$ وجود دارد به طوری که:

$$\|h\|_{H^{\mu'}} \leq \tilde{C} \|h\|_{H^\mu}, \quad \forall \mu' \leq \mu, \quad \forall h \in H^\mu(M).$$

- فشردگی: گوی واحد در $H^\mu(M)$ در $H^{\mu'}(M)$ نسبتاً فشرده است، یعنی شمول $H^{\mu'}(M) \hookrightarrow H^\mu(M)$ فشرده است.

- نامساوی‌های لازوتا-یورک: برای تمام $\mu' < \mu$ ، $\max\{0, \mu - \frac{1}{2}\} \leq \mu' < \mu$ ، ثابت‌های $C, C' \geq 0$ و $0 < \rho < 1$ وجود دارند به طوری که برای تمام $h \in H^\mu(M)$:

$$\|\mathcal{P}_f(h)\|_{H^\mu} \leq C' \rho \|h\|_{H^\mu} + C \|h\|_{H^{\mu'}}, \quad \|\mathcal{P}_f(h)\|_{H^{\mu'}} \leq C \|h\|_{H^\mu}.$$

با استفاده از قضیه هنیون^{۲۷} [۸]، نتیجه می‌گیریم که تحت این شرایط، عملگر $\mathcal{P}_f$ روی $H^\mu(M)$ شبه-فشرده است و شعاع طیفی اساسی آن از بالا توسط ρ کران دار می‌شود.

انگیزه اصلی، ام. تسوجی [۱۵] برای معرفی مفهوم درون‌ریختی مجازاً انبساطی، اثبات قضایای اساسی زیر بود.

قضیه ۲.۳. [۱۵] فرض کنید f یک درون‌ریختی از کلاس C^∞ و $\mu - \mu$ مجازاً انبساطی با $\mu > 0$ باشد. آنگاه عملگر پرون-فروبنیوس P روی فضای سوبولف $H^\mu(M)$ شبه-فشرده است. به بیان دقیق‌تر، شعاع طیفی اساسی

$$\mathcal{P}_f : H^\mu(M) \rightarrow H^\mu(M)$$

اکیداً کوچکتر از شعاع طیفی آن (که برابر با ۱ است) می‌باشد.

قضیه ۳.۳. [۱۵] فرض کنید f یک درون‌ریختی از کلاس C^∞ و $\mu - \mu$ مجازاً انبساطی با $\mu > 0$ باشد. در این صورت، تعداد متناهی اندازه ارگودیک مطلقاً پیوسته وجود دارد که چگالی آن‌ها نسبت به اندازه هموار در $H^\mu(M)$ است و تقریباً هر نقطه روی M نسبت به اندازه هموار برای یکی از آن‌ها ژنریک^{۲۸} است.

²⁶Lasota-Yorke ²⁷Hennion ²⁸generic

۴. ساخت اندومورفیسم‌های مجازاً انبساطی

ما ابتدا لم زیر را ثابت می‌کنیم.

لم ۱.۴. فرض کنید A یک ماتریس قطری 2×2 با مؤلفه‌های مثبت باشد. به ازای هر $r > 0$ و $\epsilon > 0$ ، یک دیفئومورفیسم $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ و عدد $\delta > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که:

$$(۱.۴) \quad f(x) = \begin{cases} Ax & \text{اگر } x \in B_\delta(0) \\ x & \text{اگر } x \notin B_r(0), \end{cases}$$

و مشتق آن در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$\bullet \quad m(Df) > \min\{1, m(A)\} - \epsilon$$

$$\bullet \quad \det(Df) > \min\{\det(A), 1\} - \epsilon.$$

اثبات. فرض کنید $N > 2\|A - I\|/\epsilon$ عددی بزرگ باشد. حال یک تابع هموار C^∞ به‌صورت $\rho: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ تعریف می‌کنیم که در شرایط زیر صدق کند:

برای تمام t ها، $|\rho'(t)| \leq \epsilon$ و $|\rho'(t)| \leq 2/N$. علاوه بر این:

$$\rho(t) := \begin{cases} 1, & |t| \leq 1 \\ 0 & |t| \geq N \end{cases}$$

و

$$\rho'(t) := \begin{cases} 0 & |t| \leq 1 \\ \frac{1}{Nt} & |t| \in [1 + \epsilon, N - \epsilon] \\ 0 & |t| \geq N \end{cases}$$

اکنون دیفئومورفیسم $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(x) = \rho(|x|)Ax + (1 - \rho(|x|))x,$$

مشتق F به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} (D_x F)(v) &= \rho(|x|)Av + (1 - \rho(|x|))v + \rho'(|x|)\frac{x^T}{|x|}v(A - I)x \\ &= (\rho(|x|)A + (1 - \rho(|x|))I)v + \rho'(|x|)\frac{x^T}{|x|}v(A - I)x \end{aligned}$$

حال نرم زیرین^{۲۹} و ژاکوبی $D_x F$ را تخمین می‌زنیم:

$$\begin{aligned} m(D_x F) &\geq m\left(\rho(|x|)A + (1 - \rho(|x|))I\right) - |\rho'(|x|)| \cdot \|x\| \|A - I\| \\ &\geq \min\{m(A), 1\} - \frac{2}{N} \|A - I\| \\ &> \min\{m(A), 1\} - \epsilon. \end{aligned}$$

²⁹co-norm

برای تخمین دترمینان، از این نامساوی استفاده می‌کنیم که برای هر ماتریس X و $\varepsilon > 0$ به قدر کافی کوچک:

$$|\det(I + \varepsilon X)| \geq 1 - \varepsilon(1 + |\operatorname{tr}(X)|).$$

فرض کنید $E_x := \frac{1}{|x|^2}(\rho(|x|)A + (1 - \rho(|x|))I)^{-1}(A - I)(xx^T)$. آنگاه یک کران بالای N_A برای $1 + |\operatorname{tr}(E_x)|$ می‌تواند برحسب A بیان شود. لذا برای ε به قدر کافی کوچک:

$$\begin{aligned} |\det(D_x F)| &\geq |\det(\rho(|x|)A + (1 - \rho(|x|))I)| \left| (1 - |\rho'(|x|)| \cdot |x| \cdot (1 + |\operatorname{tr}(E)|)) \right| \\ &\geq \min\{|\det(A)|, 1\} \left(1 - \frac{2N_A}{N}\right) \\ &> \min\{|\det(A)|, 1\} - \varepsilon, \end{aligned}$$

که نامساوی آخر اگر N به قدر کافی بزرگ باشد برقرار است.

در نهایت نشان می‌دهیم که F یک به یک و پوشاست. چون دترمینان همیشه مثبت است، F یک دیفئومورفیسم موضعی است. کافی است نشان دهیم F یک نگاشت سره^{۳۰} است. اگر K فشرده باشد، برای $|x| > N$ داریم $F(x) = x$ ، لذا پیش‌تصویر مجموعه‌های بزرگ خودشان هستند که فشرده‌گی را حفظ می‌کند. بنابراین F یک دیفئومورفیسم است. در انتها، با تعریف $b := N/r$ و $f(x) := F(bx)/b$ ، f ثابت می‌شود. $\square$

اثبات قضیه ۳.۱. ما یک ساختار مشخص از مجموعه‌های باز از اندومورفیسم‌های مجازاً انبساطی در کلاس ایزوتوپی یک اتومورفیسم خطی انبساطی روی $\mathbb{T}^2$ ارائه می‌دهیم که فاقد شکافتگی غالب است. فرض کنید ماتریس‌های H و R به صورت زیر باشند:

$$H = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad a, b > 0$$

توجه کنید که R انبساطی است و $m(R) = \sqrt{5}$ و $J(R) = 5$. با اعمال H روی H ، دیفئومورفیسم G را می‌سازیم. اگر $ab > 1$ و $b < 1$ باشد، تخمین‌های نرم زیرین و دترمینان به صورت $b - \varepsilon$ و $1 - \varepsilon$ خواهند بود. نگاشت $F := G \circ R$ روی $\mathbb{R}^2$ تعریف می‌شود. از آنجاکه F فقط روی گوی کوچک $B_r(0)$ با R تفاوت دارد، برای r به قدر کافی کوچک، یک اندومورفیسم f روی $\mathbb{T}^2$ تعریف می‌کند. برای نشان دادن اینکه f مجازاً انبساطی است، طبق لم ۱.۴ کافی است مجموع وزن‌دار پیش‌تصویرها کمتر از یک باشد. با انتخاب a و b کوچک، نشان می‌دهیم:

$$\sum_{f(q)=p} \frac{1}{|Jf(q)|(m(D_q f))^\mu} < \frac{4}{5(\sqrt{5})^\mu} + \frac{1}{5(1 - \varepsilon)5^{\mu/2}(b - \varepsilon)^\mu}$$

این مقدار برای $\mu = 4$ و پارامترهای مناسب (مانند $a = 32, b = 0.1$) کمتر از یک می‌شود. از آنجاکه f دارای یک نقطه ثابت زینی و یک نقطه انبساطی با مقادیر ویژه مختلط است (توجه داریم که به تعداد کافی نقطه ثابت یا تناوبی برای اختلال وجود دارد)، هیچ شکافتگی غالبی نمی‌تواند وجود داشته باشد. این موضوع اثبات را کامل می‌کند. $\square$

³⁰proper

۵. چند مسئله باز

- در بخش پایانی به بیان چندین پرسش باز پرداخته خواهد شد و جهت‌گیری‌های پژوهشی جدیدی را پیشنهاد می‌دهیم.
- (۱) دسته‌بندی درون‌ریختی‌های مجازاً انبساطی. یک مطالعه سیستماتیک و دسته‌بندی دقیق برای رده درون‌ریختی‌های مجازاً انبساطی^{۳۱} مورد نیاز است.
- (الف) چگال بودن (مسئله تسوجی): آیا مجموعه درون‌ریختی‌های مجازاً انبساطی در فضای تمام درون‌ریختی‌های منبسط‌کننده حجم^{۳۲} چگال است؟
- (ب) هذلولوی بودن غیریکنواخت: آیا مجازاً انبساطی مستلزم هذلولوی بودن غیریکنواخت یا انبساط غیریکنواخت است؟
- (۲) اندازه با آنتروپی بیشینه^{۳۳}. برای رده درون‌ریختی‌های مجازاً انبساطی، وجود و منحصر به فرد بودن یک اندازه با آنتروپی بیشینه (MME) را بررسی کنید. علاوه بر این، ویژگی‌های آماری آن، مانند توزیع مجانبی نقاط متناوب و پیوند آن با وضعیت‌های تعادلی را مطالعه نمایید.
- (۳) مجازاً هذلولوی بودن. مفهومی تحت عنوان درون‌ریختی‌های مجازاً هذلولوی صورت‌بندی کنید. یک نمونه اولیه، درون‌ریختی هموار f است که مشتق آن یک شکافتگی ناوردای پیوسته را می‌پذیرد و در مختصات موضعی، به فرم بلوکی-قطری زیر در می‌آید:

$$Df_x \sim \begin{pmatrix} A_x & 0 \\ 0 & E_x \end{pmatrix},$$

- که در آن A به‌طور یکنواخت منقبض‌شونده و E مجازاً انبساطی است. برای چنین سیستم‌هایی، باید عملگر انتقال مرتبط را با تمرکز بر شکاف طیفی آن، زوال همبستگی‌های ناشی از آن و منظم بودن چگالی‌های ناوردای تحلیل کرد.
- (۴) تعمیم به دیفئومورفیسم‌ها. آیا ایده مجازاً هذلولوی بودن می‌تواند برای بستر دیفئومورفیسم‌ها سازگار شود؟ یک ایده اولیه، در نظر گرفتن دیفئومورفیسم f است که یک شکافتگی غالب $E^s \oplus E^v$ را می‌پذیرد، به‌طوری‌که E^s به‌طور یکنواخت منقبض‌شونده و E^v به معنای زیر مجازاً انبساطی باشد: برای هر زیرکلاف یک‌بعدی $L \subset E^v$ ، کنش تصویر شده $Df|_{E^v}$ در L در میانگین انبساطی باشد. در اینجا، میانگین‌گیری مشابه حالت درون‌ریختی مجازاً انبساطی تعریف می‌شود، اما میانگین به‌جای پیش‌تصویرها، در طول خمینه‌های پایدار موضعی گرفته می‌شود.

۶. تشکر و قدردانی

از اساتید راهنمای خود، دکتر میثم نصیری و دکتر علی تهذیبی، که در تدوین این مقاله مرا یاری و راهنمایی کردند، نهایت تشکر و سپاسگزاری را دارم.

مراجع

- [1] V. Baladi, *Positive transfer operators and decay of correlations*, World Scientific, 2000.
- [2] V. Baladi, *Dynamical zeta functions and dynamical determinants for hyperbolic maps*, Springer, 2018.
- [3] M. Benedicks and L. Carleson, On iterations of $1 - ax^2$ on $(-1, 1)$, *Ann. of Math.*, **122** (1985) 1–25.
- [4] G. D. Birkhoff, Proof of the ergodic theorem, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **17** (1931) 656–660.

³¹virtually expanding endomorphisms ³²volume-expanding ³³measure of maximal entropy

- [5] R. Bowen, Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms. *Lecture Notes in Math.*, **470**, Springer, (1975).
- [6] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and PDEs*, Springer, 2011.
- [7] M. Hedyehloo, M. Nassiri, H. Rajabzadeh and A. Tahzibi, Stably exponentially mixing endomorphisms, *Preprint*, (2026).
- [8] H. Hennion and L. Herve, *Limit theorems for Markov Chains*, Springer, 2000.
- [9] M. V. Jakobson, Absolutely continuous invariant measures, *Comm. Math. Phys.*, **81** (1981) 39–88.
- [10] A. Lasota and M. C. Mackey, *Chaos, fractals, and noise: stochastic aspects of dynamics*, Springer, 1994.
- [11] A. Lasota and J. A. Yorke, On the existence of invariant measures, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **186** (1973) 481–488.
- [12] D. Ruelle, A measure associated with axiom-A attractors, *Amer. J. Math.*, **98** no. 3 (1976) 619–654.
- [13] Ya. G. Sinai, Gibbs measures in ergodic theory, *Russian Math. Surveys*, **27** (1972) 21–69.
- [14] M. E. Taylor, *Pseudodifferential operators*, Princeton Univ. Press, 1981.
- [15] M. Tsujii, Virtually expanding dynamics, *Kyushu J. Math.*, **77** (2023) 291–298.
- [16] M. Viana, *Stochastic dynamics of deterministic systems*, IMPA, 1997.
- [17] J. von Neumann, Proof of the quasi-ergodic hypothesis, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **18** (1932) 70–82.
- [18] M. W. Wong, *An introduction to pseudo-differential operators*, World Scientific, 1999.

میشم هدی‌لو

پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، ضلع جنوبی میدان شهید باهنر (نیاوران)، تهران، ایران
maisam.hedyehloo@ipm.ir

میشم هدی‌لو متولد مهرماه ۱۳۶۹ در شهر قم است. وی در سال ۱۳۸۸ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی محض دانشگاه قم شد و در سال ۱۳۹۳ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض دانشگاه صنعتی امیرکبیر شد. در سال ۱۳۹۷ مقطع دکتری ریاضی را در پژوهشگاه دانش‌های بنیادی آغاز کرد.

