https://math-sci.ui.ac.ir

ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۲۳۴۵-۶۴۹۳، شاپا(الکترونیکی): ۲۳۴۵-۶۵۰۷
جلد xx، شماره x، (۱۴۰x) صص. ۸–x

https://www.ui.ac.ir

قضایای مقایسه‌ای و کاربردهای آن روی خمینه‌های ریمانی با خمیدگی ریچی کراندار

مهین سهراب پور *، سکینه حاجی آقاسی و شاهرود اعظمی

چکیده. در این مقاله با در نظر گرفتن شرط کران پایین روی خمیدگی ریچی شامل میدان‌های برداری و میدان‌های برداری گرادیانی برای خمینه ریمانی M^n، به بررسی قضایای مقایسه‌ای پرداخته‌ایم. ما قضایای مقایسه لاپلاسین و مقایسه حجم را ابتدا برای خمینه ریمانی مجهز به خمیدگی ریچی

$$\widetilde{Ric} := Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_V g \geq (n-1)k,$$

و سپس برای خمینه‌های شامل خمیدگی ریچی بکری–امری

$$Ric + Hessh \geq (n-1)k,$$

به ازای بعضی توابع هموار h، را اثبات کردیم. همچنین نشان دادیم که این قضایا در حالت خاص برای گرادیان سولیتون ریچی کوچک‌شونده، ثابت و گسترش یافته با شرط نافروپاشی حجم و هنگامی که تابع سولیتون کراندار باشد، بدون شرط نافروپاشی نیز برقرار است و به این‌ترتیب، این نتایج را برای تقریباً سولیتون ریچی و گرادیان تقریباً سولیتون ریچی نیز به‌دست آوردیم. با استفاده از نتایج این قضایا، ما توانستیم نابرابری قطعه را برای خمینه‌های ریمانی M^n، با خمیدگی ریچی کراندار ثابت کنیم.

۱. مقدمه

فرض کنید $M \longrightarrow (0,\infty) : \gamma$ یک ژئودزیک نرمال با نقطه شروع p باشد. می‌دانیم که اگر $t > 0$ به اندازه کافی کوچک باشد، $d(p,\gamma(t)) = t$ است به این معنی که $\gamma([0,t])$ یک ژئودزیک مینیمم است. اگر $\gamma([0,t_1])$ مینیمم نباشد آنگاه $\forall t > t_1$ نیز مینیمم نخواهد بود. با ادامه این روند مجموعه اعداد مثبت t که به ازای آن‌ها $d(p,\gamma(t)) = t$ باشد به‌صورت $[0,t_0]$ یا $[0,\infty)$ حاصل می‌شود. در حالت اول $\gamma(t_0)$ نقطه برشی p در امتداد γ است و در حالت دوم چنین نقطه برشی وجود ندارد. مجموعه نقاط برشی p را با $cut(p)$ نشان می‌دهند، حال خمینه ریمانی (M,g) را به همراه عنصر حجمی $dVol = \sqrt{G \circ x^{-1}}dx^1 \cdots dx^n$، روی یک کارت (x,U) از M در نظر بگیرید که $G = \det(g_{ij})$ و $dx^1 \cdots dx^n$ اندازه لبگ روی $\mathbb{R}^n$ است. نقطه $p \in M$ را در نظر بگیرید. با توجه به اینکه نگاشت exp_p یک دیفئومورفیسم روی مجموعه مکمل

عبارات و کلمات کلیدی: مقایسه حجم، خمیدگی ریچی، مقایسه لاپلاسین، نابرابری قطعه
نوع مقاله: پژوهشی
دبیرتخصصی رابط: محمدرضا پوریای‌ولی
* نویسنده مسؤل تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۷/۱۷ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۱۱/۱۸ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰x/xx/xx
ارجاع به مقاله: م. سهراب پور، س. ک. حاجی آقاسی و ش. اعظمی، قضایای مقایسه‌ای و کاربردهای آن روی خمینه‌های ریمانی با خمیدگی ریچی کراندار، ریاضی و جامعه، **xx** شماره x (۱۴۰x) x–x. https://dx.doi.org/10.22108/msci.2026.146917.1763 .

نقاط برشی p است، کارتی چون $\{exp_p^{-1}, M \setminus cut(p), \Sigma(p)\}$ روی M می‌توان ساخت که:

$$\Sigma(p) = exp^{-1}(M \setminus cut(p)),$$

و در این مختصات عنصر حجمی M، تجزیه‌ای به‌صورت زیر خواهد داشت:

$$dVol = \lambda(r, \theta) dr \wedge d\theta. \tag{۱}$$

که در اینجا $d\theta$ عنصر حجمی استاندارد روی کره S^{n-1} است و $\lambda(r, \theta)$ یک تابع هموار روی $\Sigma(p)$ است.

با توجه به اینکه عنصر حجمی یک خمینه ریمانی تجزیه‌ای به‌صورت (۱) دارد، انگیزه‌ای برای مقایسه‌ی حجم روی خمینه‌های ریمانی و حجم متناظر با آنها روی خمینه‌های با خمیدگی ثابت K که به آنها فضای مدل می‌گویند، ایجاد شد. به‌عنوان اولین اقدامات برای پیدا کردن ارتباط بین حجم در خمینه و حجم در فضای مدل، می‌توان به قضایای مقایسه حجم بیشاب–گرومو اشاره کرد [۵]. در واقع آن‌ها به مقایسه حجم گوی‌های ژئودزیک به شعاع r روی یک خمینه ریمانی کامل با فضای مدل پرداختند و توانستند اثبات کنند که تابعی چون

$$f : r \longmapsto \frac{Vol(B_r(p))}{Vol(B_r^K)}$$

یک تابع ناصعودی است که وقتی $r \longrightarrow 0$ حد این تابع برابر 1 است. به‌ویژه ثابت کردند:

$$Vol(B_r(p)) \geq Vol(B_r^K)$$

که $B_r(p)$ گوی به مرکز p و شعاع r روی خمینه ریمانی و B_r^K گوی ژئودزیک به شعاع r روی فضای مدل M_K^n است. بدین ترتیب بیشاب–گرومو، کران بالایی برای رشد حجم پیدا کردند:

$$Vol(B_r(p)) \geq Vol(B_r^K) = w_n r^n,$$

که در اینجا w_n مؤلفه حجمی گوی یکه در $\mathbb{R}^n$ است و تساوی هنگامی برقرار می‌شود که (M, g) ایزومتر با $(\mathbb{R}^n, g_0)$ باشد. همین امر موجب ایجاد انگیزه‌ای قوی شد تا ریاضی‌دانان به حل این سؤال بپردازند که بزرگترین توانی از r که $Vol(B_r(p)) \geq cr^\alpha$ باشد چیست؟

در پی حل سؤال فوق، ابتدا تعاریف زیر را یادآوری می‌کنیم: فرض کنیم (M, g) یک خمینه ریمانی باشد. تانسور خمیدگی ریچی به ازای هر $X, Y \in T_pM$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$Ric(X, Y) := g^{il} g(R(\partial_i, X)Y, \partial_l).$$

مؤلفه‌های این تانسور را در مختصات موضعی معمولاً با R_{jk} نمایش می‌دهند که به‌صورت زیر است.

$$R_{jk} = g^{il} R_{ijkl}$$

خمینه ریمانی (M, g) را سولیتون ریچی گویند اگر و فقط اگر یک میدان برداری هموار V موجود باشد که:

$$Ric(g) = \lambda g - \frac{1}{2}\mathcal{L}_V g,$$

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2026.146917.1763

برای بعضی $\lambda \in \mathbb{R}$های ثابت برقرار باشد. در اینجا Ric تانسور خمیدگی ریچی و $\mathcal{L}$ مشتق لی می‌باشد. کالابی–یائو توانستند برای خمینه‌های ریمانی کامل فشرده که خمیدگی ریچی مثبت دارند ($Ric \geq 0$)، ثابت کنند که cای وجود دارد که برای هر $r > 2$:

$$Vol(B_r(p)) \geq cr.$$

برای مطالعه بیشتر راجع به پیشینه قضایای مقایسه‌ای به [۶، ۸، ۱۴، ۱۶] مراجعه شود.

(تقریباً سولیتون ریچی) میدان برداری هموار V را روی خمینه ریمانی (M,g) در نظر بگیرید. یک سولیتون ریچی روی این خمینه به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_V g = \lambda g. \tag{۲}$$

که در اینجا $\mathcal{L}_V g$ مشتق لی، Ric تانسور ریچی M و $\lambda \in \mathbb{R}$ یک ثابت است. در واقع سولیتون‌های ریچی مجموعه جواب‌های خود متشابه معادله شار ریچی هستند. یک سولیتون ریچی را به‌صورت (M,g,V,λ) نشان می‌دهند و هنگامی‌که $\lambda > 0$، $\lambda = 0$ یا $\lambda < 0$ باشد به‌ترتیب M را سولیتون کوچک شونده، ثابت یا گسترش یافته گویند. اگر در معادله ۲، λ تابعی هموار روی M باشد آنگاه M را تقریباً سولیتون ریچی گویند. در حالت خاص، هنگامی‌که میدان برداری به‌صورت $V = \nabla f$ باشد که $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی هموار روی M است معادله ۲ به‌صورت زیر تغییر می‌کند:

$$Ric + Hessf = \lambda g,$$

و در این‌حالت M را سولیتون ریچی گرادیانی گویند. همچنین وقتی λ تابعی هموار باشد، M را تقریباً سولیتون ریچی گرادیانی گویند. برای آشنایی بیشتر با سولیتون های ریچی و نتایج مقایسه حجم روی آنها به [۱، ۴] مراجعه کنید.

یکی از زیباترین نتایج قضایای مقایسه حجم که کاری از چنگ است، بیان می‌کند که اگر خمینه ریمانی کامل با $Ric \geq (n-1)H$ که H ثابتی مثبت است از قطر $\frac{\pi}{\sqrt{H}}$ باشد، آنگاه حتماً با کره‌ای به شعاع $\frac{1}{\sqrt{H}}$ ایزومتریک است. همچنین قضایای مقایسه حجم پیوند جالبی با مسائلی که مربوط به هندسه ذاتی فضاها می‌شود، دارند.

اولین بار میلنور حدس زد که خمینه ریمانی کامل M با $Ric \geq 0$، گروه بنیادی متناهی مولد دارد. او بعدها این حدس را اثبات کرد [۱۱]. همچنین گرومو و گالوت به‌طور مجزا توانستند با اثبات قضیه‌ی زیر پیوند زیبایی بین مقایسه حجم و عدد بتی یک خمینه ایجاد کنند. آن‌ها ثابت کردند [۱۰، ۱۵]: برای یک خمینه ریمانی بسته M^n با

$$Ric \geq (n-1)H, \qquad diam(M) \leq D,$$

$diam(M)$ قطر خمینه است. عدد بتی اول $b_1(M)$ به‌طور یکنواخت کراندار است و علاوه بر این اگر HD^2 بسیار کوچک باشد، $b_1(M) \leq n$.

برای مطالعه بیشتر در مورد کاربرد گسترده قضایای مقایسه‌ای روی خمینه‌های ریمانی می‌توانید [۷، ۹، ۱۲] را مطالعه کنید. اخیراً، ژو و ژانگ [۲۰] نتایج جالبی از قضایای مقایسه‌ای با در نظر گرفتن شرطی روی خمیدگی ریچی به‌دست آوردند. آن‌ها نوع خاصی از خمیدگی ریچی به‌صورت

$$Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_V g$$

در نظر گرفتند، که در اینجا Ric، V و $\mathcal{L}_V$ به‌ترتیب خمیدگی ریچی، میدان برداری هموار روی خمینه و مشتق لی در جهت میدان برداری V هستند. نتایج آنها در [۱۷] براي ریچی بکری–امریی تعمیم داده شده است.

در این مقاله ابتدا فرض کرانداری برای خمیدگی ریچی شامل میدان برداری X را به‌صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\tilde{Ric} := Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g \geq (n-1)k, \qquad |X|(y) \leq \frac{L}{d(y,O)^{\alpha}}, \ \forall y \in M. \tag{۳}$$

سپس در حالت خاصی که میدان برداری گرادیانی باشد به اثبات قضایای مقایسه‌ای می‌پردازیم.

۲. متن اصلی

در این بخش با در نظر گرفتن شرایطی روی خمیدگی ریچی شامل میدان‌های برداری در حالتی خاص که میدان کراندار است به اثبات مقایسه لاپلاسین و مقایسه حجم روی خمینه‌های ریمانی می‌پردازیم، سپس با استفاده از نتایج این قضایا، نابرابری قطعه را برای $W \subseteq M^n$ اثبات می‌کنیم.

قضیه ۱.۲. (مقایسه لاپلاسین): فرض کنید (M^n, g) یک خمینه ریمانی با نقطه ثابت $O \in M$ باشد که شرایط زیر برای آن برقرار است:

$$\tilde{Ric} := Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_V g \geq (n-1)k, \quad |V|(y) \leq \frac{L}{d(y,O)^{\alpha}}, \tag{۴}$$

برای هر $k \leq 0$ و هر $y \in M$، که در اینجا $d(y,O)$ فاصله بین O تا y است و $L \geq 0$ و $0 \leq \alpha < 1$ ثابت است. فرض کنید $r = d(y,x)$ و $\gamma : [0,r] \to M$ یک ژئودزیک مینیمال نرمال است که x را به y وصل می‌کند. آنگاه

$$\Delta r \leq (n-1)k\frac{r}{3} + \langle V, \nabla r\rangle + \frac{C(\alpha)L}{r^{\alpha}} + \frac{n-1}{r}, \tag{۵}$$

که در اینجا Δ و ∇ به‌ترتیب نشان‌دهنده لاپلاسین و گرادیان هستند و $C(\alpha)$ ثابتی وابسته به α است.

اثبات. با توجه به فرمول بوچنر داریم

$$0 = \frac{1}{2}\Delta|\nabla r|^2 = |\nabla^2 r|^2 + \langle \nabla\Delta r, \nabla r\rangle + Ric(\nabla r, \nabla r).$$

با استفاده از نامساوی کوشی–شوارتز $|\nabla^2 r|^2 \geq \frac{(\Delta r)^2}{n-1}$ ، داریم

$$\frac{\partial}{\partial r}\Delta r + \frac{(\Delta r)^2}{n-1} \leq -Ric(\nabla r, \nabla r),$$

که برابر است با

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\Delta r) + \frac{1}{n-1}(\Delta r - \frac{n-1}{r})^2 \leq \frac{n-1}{r^2} - Ric(\nabla r, \nabla r), \tag{۶}$$

با ضرب طرفین ۶ در r^2 و انتگرال گیری از 0 تا r داریم

$$\Delta r \leq \frac{n-1}{r} - \frac{1}{r^2}\int_0^r t^2 Ric(\gamma'(t), \gamma'(t))dt. \tag{۷}$$

در هر نقطه‌ی $\gamma(t)$ یک قاب متعامد یکه $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ با $e_1 = \gamma'(t)$ انتخاب می‌شود. بنابراین داریم

$$Ric(\gamma'(t), \gamma'(t)) = Ric(e_1, e_1) \geq (n-1)k - \frac{1}{2}\mathcal{L}_V g(e_1, e_1) = (n-1)k - \partial_t\langle V, \gamma'(t)\rangle.$$

بنابراین ۷ را به‌صورت زیر داریم:

$$
\begin{aligned}
\Delta r - \frac{n-1}{r} &\leq \frac{1}{r^2}\int_0^r [t^2 \frac{\partial}{\partial t}\langle V, \gamma^{'}(t)\rangle (n-1)kt^2]dt \\
&\leq \frac{1}{r^2}\frac{(n-1)k}{3} r + \frac{1}{r^2}[t^2\langle V, \gamma^{'}(t)\rangle(\gamma(t))|_0^r - 2\int_0^r t\langle V, \gamma^{'}(t)\rangle dt] \\
&\leq \frac{(n-1)k}{3} r + \langle V, \nabla r\rangle - \frac{2}{r^2}\int_0^r t\langle V, \gamma^{'}(t)\rangle dt. \qquad (۸)
\end{aligned}
$$

توجه کنید که $d_0 = d(x, O)$.

- اگر $r \leq d_0$ باشد داریم $d(\gamma(t), O) \geq d_0 - t$ و $r^{1-\alpha} + (d_0 - r)^{1-\alpha} \geq d_0^{1-\alpha}$.

بنابراین

$$
\begin{aligned}
-\frac{2}{r^2}\int_0^r t\langle V, \gamma^{'}(t)\rangle dt &\leq \frac{1}{r^2}\int_0^r 2t\frac{L}{(d_0 - t)^\alpha}dt \\
&\leq \frac{C(\alpha)L}{r}[-(d_0 - t)^{1-\alpha}|_0^r] \\
&= \frac{C(\alpha)L}{r}[d_0^{1-\alpha} - (d_0 - r)^{1-\alpha}] \\
&\leq \frac{C(\alpha)L}{r^\alpha}, \qquad (۹)
\end{aligned}
$$

که $C(\alpha)$ ثابتی وابسته به α است. اگر در نامساوی فوق داشته باشیم $x = \frac{r}{d_0 - r}$ پس داریم

$$
x^{1-\alpha} + 1 \geq (1 + x)^{1-\alpha}, \quad x > 0.
$$

با جایگذاری ۹ در ۸ داریم

$$
\Delta r - \frac{n-1}{r} \leq \frac{(n-1)k}{3} r + \langle V, \nabla r\rangle + \frac{C(\alpha)L}{r^\alpha}. \qquad (۱۰)
$$

- اگر $r > d_0$ باشد برای هر $d_0 \leq t \leq r$ داریم $d(\gamma(t), O) \geq t - d_0$، و داریم

$$
\begin{aligned}
-\frac{2}{r^2}\int_0^r t\langle V, \gamma^{'}(t)\rangle dt &\leq \frac{1}{r^2}\int_0^{d_0} 2t\frac{L}{(d_0 - t)^\alpha}dt + \frac{1}{r^2}\int_{d_0}^r 2t\frac{L}{(t - d_0)^\alpha}dt \\
&\leq \frac{C(\alpha)Ld_0}{r^2} d_0^{1-\alpha} + \frac{C(\alpha)L(r - d_0)^{1-\alpha}}{r} \\
&= \frac{C(\alpha)L\alpha}{r^\alpha}. \qquad (۱۱)
\end{aligned}
$$

بنابراین با توجه به ۱۱ داریم

$$
\Delta r - \frac{n-1}{r} \leq \frac{(n-1)k}{3} r + \langle V, \nabla r\rangle + \frac{C(\alpha)L}{r^\alpha}. \qquad (۱۲)
$$

و اثبات تمام می شود. □

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2026.146917.1763

قضیه ۲.۲. (مقایسه حجم): خمینه ریمانی M^n را با شرط ۴ در نظر بگیرید، در این‌صورت

$$w(r,\theta) \le e^{C(\alpha)Lr^{1-\alpha}+(n-1)kr^2} r^{n-1},$$

که $\omega = \omega(r,\theta)$ مؤلفه حجم در مختصات قطبی ژئودزیکی است و 0 در مکان برش در نظر گرفته می‌شود.

اثبات. می‌دانیم که $\partial_r w(r,\theta) = w(r,\theta)\Delta r$. از ۱۲ داریم

$$\partial_r ln(w(r,\theta)) = \frac{\partial_r w}{w} = \Delta r \le -(n-1)k\frac{r}{3} + \frac{n-1}{r} + \langle V, \nabla r\rangle + \frac{C(\alpha)L}{r^\alpha}. \tag{۱۳}$$

برای ادامه اثبات موارد زیر را در نظر می گیریم:

حالت اول : $r_1 < r_2 \le d_0$

حالت دوم : $d_0 \le r_1 < r_2$

حالت سوم : $r_1 \le d_0 \le r_2$

با استفاده از ۴ و انتگرال از نامعادله ۱۳ داریم

$$\partial_r ln(w(r,\theta)) \le \frac{n-1}{r} - (n-1)k\frac{r}{3} + \frac{L}{(d_0-r)^\alpha} + \frac{C(\alpha)L}{r^\alpha}, \tag{۱۴}$$

با انتگرال‌گیری از هر دو طرف از r_1 تا r_2 داریم

$$\begin{aligned} ln\frac{w(r_2,\theta)}{w(r_1,\theta)} &\le ln(\frac{r_2}{r_1})^{n-1} - \frac{(n-1)k}{6}(r_2^2 - r_1^2) \\ &+ C(\alpha)L(r_2^{1-\alpha} - r_1^{1-\alpha}) + C(\alpha)L[(d_0-r_1)^{1-\alpha} - (d_0-r_2)^{1-\alpha}] \\ &\le ln(\frac{r_2}{r_1})^{n-1} - \frac{(n-1)k}{6}r_2^2 + C(\alpha)Lr_2^{1-\alpha} + C(\alpha)L(r_2-r_1)^{1-\alpha} \\ &\le ln(\frac{r_2}{r_1})^{n-1} - \frac{(n-1)k}{6}r_2^2 + C(\alpha)Lr_2^{1-\alpha}. \end{aligned} \tag{۱۵}$$

به‌خصوص برای $r_1 \le d_0$ عبارت ۱۵ را به‌صورت زیر داریم

$$ln\frac{w(d_0,\theta)}{w(r_1,\theta)} \le ln(\frac{d_0}{r_1})^{n-1} + \frac{(n-1)k}{6}d_0^2 + C(\alpha)Ld_0^{1-\alpha} \tag{۱۶}$$

توجه کنید که

$$\langle V, \nabla r\rangle \le |V|(\gamma(r)) \le \frac{L}{(r-d_0)^\alpha},$$

پس از ۱۳ داریم

$$\begin{aligned} ln\frac{w(r_2,\theta)}{w(r_1,\theta)} &\le ln(\frac{r_2}{r_1})^{n-1} + \frac{(n-1)k}{6}(r_2^2 - r_1^2) \\ &+ C(\alpha)L(r_2^{1-\alpha} - r_1^{1-\alpha}) + C(\alpha)L[(r_2^{1-\alpha}) - (r_1-d_0)^{1-\alpha}] \\ &\le ln(\frac{r_2}{r_1})^{n-1} + \frac{(n-1)k}{6}r_2^2 + C(\alpha)Lr_2^{1-\alpha} + C(\alpha)L(r_2-r_1)^{1-\alpha} \\ &\le ln(\frac{r_2}{r_1})^{n-1} + \frac{(n-1)k}{6}r_2^2 + C(\alpha)Lr_2^{1-\alpha}. \end{aligned} \tag{۱۷}$$

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2026.146917.1763

همچنین برای $r_2 \geq d_0$ داریم

$$ln\frac{w(r_2,\theta)}{w(d_0,\theta)} \leq ln(\frac{r_2}{d_0})^{n-1} + \frac{(n-1)k}{6}r_2^2 + C(\alpha)Lr_2^{1-\alpha}. \tag{۱۸}$$

با جایگذاری ۱۶ در ۱۸ داریم

$$ln\frac{w(r_2,\theta)}{w(r_1,\theta)} \leq ln(\frac{r_2}{r_1})^{n-1} + \frac{(n-1)k}{6}r_2^2 + C(\alpha)Lr_2^{1-\alpha}. \tag{۱۹}$$

بنابراین با توجه به ۱۵، ۱۷ و ۱۹ نامعادله زیر به‌دست می‌آید.

$$\frac{w(r_2,\theta)}{w(r_1,\theta)} \leq e^{C(\alpha)Lr_2^{1-\alpha}+(n-1)kr_2^2}(\frac{r_2}{r_1})^{n-1}. \tag{۲۰}$$

وقتی $r_1 \longrightarrow 0$ داریم

$$w(r,\theta) \leq e^{C(\alpha)Lr^{1-\alpha}+(n-1)kr^2}r^{n-1}, \quad \forall r > 0.$$

$\square$

۱.۲. شرط ریچی بکری–امری. در این قسمت حالت خاصی را که V یک میدان برداری گرادیان باشد، در نظر می‌گیریم، در واقع خمیدگی ریچی بکری–امری را در نظر می‌گیریم. برای بعضی توابع هموار h قرار دهید $V = \nabla h$ و فرض کنید

$$Ric + Hessh \geq (n-1)k. \tag{۲۱}$$

از آنجا که با انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء، شرط روی گرادیان پتانسیل را می‌توان به انتگرال یگانه کاهش داد. در این‌حالت شرط زیر روی h اعمال می‌شود:

$$|h(y)-h(z)| \leq L_2 d(y,z)^{\alpha}, \quad \sup_{x\in M, 0\leq r\leq 1}\left(r^{\beta}\|\nabla h\|_q^*, B_{(x,r)}\right) \leq L_3 \tag{۲۲}$$

برای هر $y,z \in M$ با $d(y,z) \leq 1$. در اینجا $L_2, L_3 \geq 0$ و $0 < \alpha < 1$ ، $0 < \beta < 1$ و $q \geq 1$ ثابت هستند و

$$\|\nabla h\|_{q,B_{(x,r)}}^* = \left(\oint_{B_{(x,r)}} |\nabla h|^q(y)dV(y)\right)^{\frac{1}{q}}.$$

در این‌حالت دیگر نیازی به شرط نافروپاشی نیست. فرض فوق برای تابع h نشان دهنده این است که تابع همواره پیوسته است و $|\nabla h|$ تکینگی از مرتبه کمتر از 1 دارد. به راحتی می‌توان دید که خواص موضعی h روی گوی‌هایی به اندازه 1 نیز برقرار است.

قضیه ۳.۲. فرض کنید شرطهای ۲۱ و ۲۲ برقرار هستند.

1) فرض کنید $r = d(x,y)$ فاصله هر نقطه دلخواه y تا نقطه مشخص x باشد و $\gamma : [0,r] \longrightarrow M$ یک ژئودزیک نرمال مینیمال با $\gamma(0) = x$ و $\gamma(r) = y$ باشد. آنگاه داریم

$$\Delta r - \frac{n-1}{r} \leq \frac{(n-1)k}{3}r + \frac{4L_2}{r^{1-\alpha}} + <\nabla h, \nabla r>, \quad \forall r < 1, \tag{۲۳}$$

و

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{\omega(r,\theta)}{r^{n-1}} \leq \left[\frac{(n-1)k}{3}r + \frac{4L_2}{r^{1-\alpha}} + <\nabla h, \nabla r>\right]\frac{\omega(r,\theta)}{r^{n-1}}. \tag{۲۴}$$

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2026.146917.1763

2) برای هر $0 < r_1 < r_2 \leq 1$ داریم:

$$\frac{Vol(B_{(x,r_2)})}{r_2^n} \leq e^{(n-1)k(r_2^2-r_1^2)+L_3(r_2-r_1)^{1-\beta}+4L_2(r_2-r_1)^{\alpha}} . \frac{Vol(B_{(x,r_1)})}{r_1^n}. \tag{۲۵}$$

در [۱۶، ۲۰] اثبات آن شرح داده شده است.

نتیجه ۴.۲. مشابهاً با در نظر گرفتن کران پایین برای تقریباً سولیتون ریچی نتایج به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\Delta r - \frac{n-1}{r} \leq \frac{(n-1)k}{3} r + \frac{4L_2}{r^{1-\alpha}} + < \nabla h, \nabla r >, \quad \forall r < 1,$$

به‌علاوه داریم:

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{\omega(r,\theta)}{r^{n-1}} \leq [(n-1)k3r + \frac{4L_2}{r^{1-\alpha}} + < \nabla h, \nabla r >] \frac{\omega(r,\theta)}{r^{n-1}}.$$

سپس برای هر $0 < r_1 < r_2 \leq 1$ داریم:

$$\frac{Vol(B_{(x,r_2)})}{r_2^n} \leq e^{(n-1)k} 3(r_2^2 - r_1^2) + L_3(r_2 - r_1)^{1-\beta} + 4L_2(r_2 - r_1)^{\alpha} \frac{Vol(B_{(x,r_1)})}{r_1^n}.$$

با توجه به لم زیر، هنگامی‌که در رابطه $Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_V g \geq (n-1)k$ ، $V = \nabla h$ است فرض ۲۲ در واقع یک شرط ضعیف‌تر نسبت به

$$|\nabla h(y)| \leq \frac{L}{d(y,O)^{\alpha}}, \tag{۲۶}$$

به ازای هر y متعلق به M و نقطه ثابت $O \in M$ و ثابت‌های $L \geq 0$ و $0 \leq \alpha < 1$ و

$$Vol(B_{(x,r)}) \geq \rho, \tag{۲۷}$$

به ازای $x \in M$ و بعضی $\rho > 0$ های ثابت، می‌باشد.

لم ۵.۲. فرض کنید که $Ric + Hessh \geq (n-1)k$ و روابط ۲۶ و ۲۷ برقرار هستند، سپس برای $\forall q \in (n, \dfrac{n}{\alpha})$ نابرابری

$$|h(y) + h(z)| \leq \frac{2L}{1-\alpha} d(y,z)^{1-\alpha}, \tag{۲۸}$$

و برای هر $y, z \in M$،

$$\sup_{x \in M, 0 < r \leq 1} r^{\alpha} \|\nabla h\|^*_{q, B_{(x,r)}} \leq C(n, L, (n-1)k, \alpha, \rho)L, \tag{۲۹}$$

به‌دست می‌آید.

که می‌توان برای اثبات آن به [۲۰] مراجعه کرد.

نتیجه ۶.۲. به‌طور مشابه روند اثبات در بالا برای تقریباً سولیتون ریچی با کران $(n-1)k$ نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\sup_{x \in M, 0 < r \leq 1} r^{\alpha} \|\nabla h\|^*_{q, B_{(x,r)}} \leq C(n, L, (n-1)k, \alpha, \rho)L.$$

نتیجه بعد حالتی از گرادیان سولیتون ریچی را بیان می‌کند که نتایج قوی‌تر هستند. خمینه ریمانی کامل (M, g_{ij}) به اصطلاح گرادیان سولیتون ریچی نامیده می‌شود هرگاه که معادله زیر برقرار باشد:

$$R_{ij} + \nabla_i \nabla_j h = (n-1)kg_{ij}, \tag{۳۰}$$

که در اینجا $(n-1)k$ ثابت و h تابع هموار روی M است. حالاتی‌که $(n-1)k > 0$ و $(n-1)k = 0$ و $(n-1)k < 0$ است، به‌ترتیب مطابق با کوچک شدن، ثابت ماندن و گسترش یافتن سولیتون‌ها است. سولیتون‌های ریچی نه تنها نماینده خودمتشابه سولیتون‌های شار ریچی هستند بلکه مهمتر از آن به‌عنوان مدل‌های تکینگی ظاهر می‌شوند، یعنی گسترش در موقعیت‌های زیادی در شار ریچی محدود به سولیتون‌های ریچی است. بنابراین مطالعه سولیتون‌های ریچی برای آنالیز تکینگی در شار ریچی ضروری است.

برای سولیتون ریچی ۳۰، رابطه زیر را داریم

$$R + |\nabla h|^2 - 2(n-1)kh = C_0, \tag{۳۱}$$

که R خمیدگی اسکالر M و C_0 ثابت است. بنابراین، برای کوچک شدن و گسترش یافتن سولیتون‌ها یعنی وقتی که $(n-1)k \neq 0$ است، با افزودن یک ثابت به U شرط نرمال سازی زیر حاصل می‌شود.

$$R + |\nabla h|^2 - 2(n-1)kh = 0. \tag{۳۲}$$

برای سولیتون ثابت معادله بالا به‌صورت زیر است:

$$R + |\nabla h|^2 = C_0. \tag{۳۳}$$

که در آن اگر $C_0 = 0$ باشد با توجه به مطالعات ژانگ [۱۹] و چن [۳] برای سولیتون ثابت، $R \geq 0$ نتیجه می‌شود. هنگامی‌که $C_0 \neq 0$ باشد از ۳۳ نتیجه می‌شود که $R \equiv 0$ است. بنابراین با توجه به R در معادله زیر، $Ric \equiv 0$ می‌باشد.

$$\Delta R = < \nabla R, \nabla h > + 2|Ric|^2.$$

پس برای سولیتون‌های ثابت باید در معادله refs۵۵ حالتی‌که $C_0 \neq 0$ است را در نظر گرفت. حال متریک g را یک ثابت در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که سولیتون ریچی به‌صورت زیر نرمال‌سازی شود:

$$R + |\nabla h|^2 = 1. \tag{۳۴}$$

اگر (M, g) یک گرادیان سولیتون ریچی در حال کوچک شدن یا در حال گسترش باشد، با نرمال‌سازی (۳۲) است و اگر یک سولیتون ثابت باشد با نرمال‌سازی ۳۴ می‌باشد. پس با توجه به نتایجی که در مطالعات ژانگ و چن در [۱۹] و [۳] به دست آمده است، $R \geq 0$ است وقتی‌که $(n-1)k \geq 0$ باشد و $R \geq -C_1(n)$ است وقتی‌که $(n-1)k < 0$ باشد. علاوه بر این نتایج اگر فرض کنیم $|h| \leq L$ باشد آنگاه با توجه به ۳۲ و ۳۴ به‌دست می‌آید:

$$|\nabla h| \leq \Lambda(n, (n-1)k, L), \tag{۳۵}$$

به‌طوری‌که

$$\Lambda(n, (n-1)k, L) = \begin{cases} \sqrt{2(n-1)kL}, & (n-1)k > 0; \\ 1, & (n-1)k = 0; \\ \sqrt{-2(n-1)kL + C_1(n)}, & (n-1)k < 0. \end{cases} \tag{۳۶}$$

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2026.146917.1763

۲.۲. حالت گرادیان سولیتون ریچی. فرض کنید که (M, g_{ij}) گرادیان سولیتون ریچی رابطه ۳۰ باشد و اگر $(n-1)k \neq 0$ باشد رابطه ۳۲ و اگر $(n-1)k = 0$ است رابطه ۳۴ برقرار باشند و فرض کنید در $B_{(O,2\delta)}$ برای نقاط مشخص $O \in M$ و شعاع δ داشته باشیم:

$$|h| \leq L. \tag{۳۷}$$

ثابت $\Lambda(n,(n-1)k,L)$ را در ۳۶ در نظر بگیرید. بنابراین گزاره‌های زیر برقرار هستند.

1) فرض کنید $r = d(y,x)$ فاصله بین هر دو نقطه $x, y \in B_{(O,\delta)}$ باشد و $\gamma : [0,r] \longrightarrow M$ ژئودزیک نرمال مینیمال با $\gamma(0) = x$ و $\gamma(r) = y$ باشد. آنگاه در مفهوم توزیع رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\Delta r - \frac{n-1}{r} \leq \frac{|(n-1)k|}{3} r + 2\Lambda(n,(n-1)k,L). \tag{۳۸}$$

2) فرض کنید r به‌صورت تعریف شده در 1 باشد و $\omega(r,.)$ عنصر حجمی متر g در مختصات قطبی ژئودزیکی باشد. بنابراین برای هر $0 < r_1 < r_2 < d(x, \partial B_{(O,\delta)})$، رابطه

$$\frac{\omega(r_2,.)}{r_2^{n-1}} \leq e^{2\Lambda(n,(n-1)k,L)r_2 + |(n-1)k|,r_2^2} \frac{\omega(r_1,.)}{r_1^{n-1}} \tag{۳۹}$$

را داریم و وقتی $r_1 \longrightarrow 0$ داریم

$$\omega(r,.) \leq e^{2\Lambda(n,(n-1)k,L) + |(n-1)k| r^2} r^{n-1}, \tag{۴۰}$$

برای هر $0 < r < d(x, \partial B_{(O,\delta)})$ به‌دست می‌آید و از این‌رو برای هر $0 < r < d(x, \partial B_{(O,\delta)})$ داریم:

$$Vol(B_{(x,r)}) \leq C(n) e^{2\Lambda(n,(n-1)k,L)r + |(n-1)k| r^2} r^n. \tag{۴۱}$$

3) برای هر $x \in B_{(O,\delta)}$ و $0 < r_1 < r_2 < d(x, \partial B_{(O,\delta)})$، نابرابری زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{Vol(B_{(x,r_2)})}{r_2^n} \leq e^{[|(n-1)k|(r_2^2 - r_1^2) + 2\Lambda(n,(n-1)k,L)(r_2 - r_1)]} . \frac{Vol(B_{(x,r_1)})}{r_1^n}. \tag{۴۲}$$

نتیجه ۷.۲. با در نظر گرفتن گرادیان تقریباً سولیتون ریچی و با توجه به شرط کران بالای L_1 برای تابع سولیتون h، می‌توان $\Lambda(n,(n-1)k,L) = \sqrt{2L_1L}$ را در نظر گرفت، آنگاه نتایج به‌صورت زیر تغییر پیدا می‌کند:

$$\Delta r - \frac{n-1}{r} \leq L_1 r + 2\sqrt{2L_1L}.$$

برای $0 < r_1 < r_2 < d(x, \partial B_{(O,\delta)})$ داریم:

$$\frac{\omega(r_2,.)}{r_2^{n-1}} \leq e^{2\sqrt{2L_1L}r_2 + L_1 r_2^2} \frac{\omega(r_1,.)}{r_1^{n-1}},$$

و وقتی $r_1 \longrightarrow 0$ داریم

$$\omega(r,.) \leq e^{2\sqrt{2L_1L}r + L_1 r^2} r^{n-1},$$

سپس برای هر $0 < r < d(x, \partial B_{(O,\delta)})$ رابطه زیر برقرار می‌شود:

$$Vol(B_{(x,r)}) \leq C(n) e^{2\sqrt{2L_1L}r + L_1 r^2} r^n,$$

و در نهایت برای هر $0 < r_1 < r_2 < d(x, \partial B_{(O,\delta)})$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{Vol(B_{(x,r_2)})}{r_2^n} \leq e^{[2\sqrt{2L_1 L}(r_2-r_1)+L_1(r_2^2-r_1^2)]}\frac{Vol(B_{(x,r_1)})}{r_1^n}.$$

تبصره ۸.۲. این قضایای مقایسه حجم [۲] توسط کو و ژو برای سولیتون های ریچی گرادیانی کوچک شده بررسی و اثبات شده‌اند، همچنین ژانگ در [۱۸] نشان می‌دهد که برای این نوع سولیتون های ریچی گرادیانی اگر حجم M و متر هر دو کراندار باشند، آنگاه تابع پتانسیل و خمیدگی ریچی نیز کراندار می‌شوند.

به‌عنوان کاربردی بسیار مهم از قضایای مقایسه حجم، مشابه [۱۳] نتیجه زیر را داریم:

نتیجه ۹.۲. فرض کنید خمینه ریمانی (M, g) دارای خمیدگی ریچی $\tilde{Ric} \geq (n-1)K$ باشد. اگر $f : M \to [0, \infty)$ یک تابع هموار روی M و $A, B \subset W \subset M$ باشند و همچنین پاره خط $c_{x,y}(t) : [0, 1] \to M$ واصل بین x و y روی M باشد، اگر برای هر $x \in A, y \in B$ و $t \in [0, 1]$ داشته باشیم $c_{x,y}(t) \in W$ و $diamW \leq D$ آنگاه

$$\int_{A\times B}\int_0^1 f\circ c_{x,y}(t)dtVol_x \wedge Vol_y \leq C(\alpha, L, n)(VolA + VolB)\int_W fVol. \tag{۴۳}$$

مراجع

[1] S. Azami and S. Hajiaghasi, New volume comparison with almost Ricci soliton, *Commun. Korean Math Soc.*, **37** no. 3 (2022) 839–849.

[2] H.-D. Cao and D. Zhou, On complete gradient shrinking Ricci solitons, *J. Differential Geom.*, **85** no. 2 (2010) 175–185.

[3] B.-L. Chen, Strong uniqueness of the Ricci flow, *J. Differential Geom.*, **82** no. 2 (2009) 363–382.

[4] B. Y. Chen, Ricci solitons on Riemannian submanifolds, *In book: Riemannian Geometry and Applications, Proceedings RIGA*, 2014.

[5] K. Grove and P. Petersen, *Comparison geometry*, Mathematical Sciences Research In-stitute Publications, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[6] X. Hu, D. Ji and Y. Shi, Volume comparison of conformally compact manifolds with scalar curvature $Rn(n1)$, *Ann. Henri Poincar ´e*, **17** no. 4 (2016) 953–977.

[7] Z. Hu and and S. Xu, Bounds on the fundamental groups with integral curvature bound. *Geom. Dedicata.*, **134** (2008) 1–16.

[8] J. Lott, Some geometric properties of the Bakry-´Emery-Ricci tensor, *Comment. Math. Helv.*, **78** no. 4 (2003) 865–883.

[9] M. Gromov, Groups of polynomial growth and expanding maps, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.*, **53** (1981) 53–73.

[10] M. Gromov, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, **152**, Progress in Mathematics, 1991.

[11] J. Milnor, A note on curvature and fundamental group, *J. Differential Geometry*, **2** (1968 1–7.

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2026.146917.1763

[12] P. Li, Large time behavior of the heat equation on complete manifolds with nonnegative Ricci curvature, *Ann. of Math.*, **124** no. 1 (1986) 1–21.

[13] P. Petersen, *Riemannian geometry*, GTM, Springer, third edition.

[14] Z. Qian, Estimates for weighted volumes and applications, *Quart. J. Math. Oxford*, **2** no. 48 (1997) 235–242.

[15] G. Sylvestre, In´egalit´es isop´erim´etriques, courbure de Ricci et invariants g´eom´etriques, *I. C. R. Acad. Sci. Paris S´er. I Math.*, **296** no. 7 (1983) 333–336.

[16] G. Wei and W. Wylie, Comparison geometry for the Bakry-Emery Ricci tensor, *J. Dif-ferential Geom.*, **83** no. 2 (2009) 377–405.

[17] S. Xingyu, W. Ling and M. Zhu, Heat kernel estimate for the Laplace-Beltrami operator under Bakry-Emery Ricci curvature condition and applications, *Math. DG*, 2023.

[18] Z. Zhang, Degeneration of shrinking Ricci solitons, *Int. Math. Res. Not.*, **21** (2010) 4137–4458.

[19] Z. H. Zhang, On the completeness of gradient Ricci solitons, *Proe. Amer. Math. Soc.*, **137** no. 8 (2009) 2755–2759.

[20] Q. S. Zhang and M. Zhu, New volume comparison results and applications to degenera-tion of Riemannian metrics, *Adv. Math.*, **352** (2019) 1096–1154.

مهین سهراب‌پور

گروه ریاضی محض، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران

m.sohrabpour@edu.ikiu.ac.ir

مهین سهراب‌پور متولد شهریور ماه سال ۱۳۶۴ است. وی در سال ۱۳۸۴ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی کاربردی دانشگاه تفرش شد و در سال ۱۳۹۱ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض، گرایش هندسه، دانشگاه زنجان شد و در سال ۱۴۰۱ وارد مقطع دکتری در رشته ریاضی محض گرایش هندسه دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره) گردید.

سکینه حاجی آقاسی

گروه ریاضی محض، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران

s.hajiaghasi@edu.ikiu.ac.ir

سکینه حاجی آقاسی متولد دی ماه ۱۳۷۳ است. وی در سال ۱۳۹۳ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضیات و کاربردها دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره) شد و در سال ۱۳۹۸ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض، گرایش هندسه، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره) شد. وی در سال ۱۴۰۰ وارد مقطع دکتری در رشته ریاضی محض گرایش هندسه دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره) گردید.

شاهرود اعظمی

گروه ریاضی محض، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران

azami@sci.ikiu.ac.ir

شاهرود اعظمی متولد اسفند ماه سال ۱۳۵۸ است. وی در سال ۱۳۷۸ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی محض دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی شد و در سال ۱۳۸۲ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض، گرایش هندسه، دانشگاه صنعتی شریف شد. وی در سال ۱۳۸۸ وارد مقطع دکتری در رشته ریاضی محض گرایش هندسه دانشگاه صنعتی امیرکبیر گردید و در سال ۱۳۹۲ فارغ التحصیل شد. او اکنون عضو هیأت علمی دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره) می‌باشد. تخصص اصلی وی هندسه دیفرانسیل، آنالیز هندسی روی خمینه‌ها و شارهای هندسی می‌باشد.