Mathematics and Society
https://math-sci.ui.ac.ir
Mathematics and Society
ISSN (print): 2345-6493, ISSN (on-line): 2345-6507
Vol. 11 No. 3 (2026), pp. 1–8.

https://www.ui.ac.ir

RECOGNITION OF THE GROUP $E_6(5)$ BY PRIME GRAPH

ZAHRA MOMEN

Abstract. If n is an integer, the set of all prime divisors of n is denoted by $\pi(n)$. Let G be a finite group. Then $\pi(|G|)$ is denoted by $\pi(G)$. The prime graph of G, denoted by $\Gamma(G)$, is constructed as follows: the vertex set is $\pi(G)$, and two distinct primes p and q are connected by an edge if and only if G has an element of order pq. A finite nonabelian simple group P is called quasirecognizable by prime graph, if each finite group G with $\Gamma(G) = \Gamma(P)$ has a unique composition factor isomorphic to P. We denote by $k(\Gamma(G))$ the number of isomorphism classes of finite groups H satisfying $\Gamma(G) = \Gamma(H)$. Given a natural number r, a finite group G is called r-recognizable by prime graph if $k(\Gamma(G)) = r$ and if $k(\Gamma(G)) = 1$, is called recognizable . In this paper, as the main result, we show that if G is a finite group such that $\Gamma(G) = \Gamma(E_6(5))$, then $G \cong E_6(5)$.

1. Introduction

If n is an integer, then we denote by $\pi(n)$ the set of all prime divisors of n. Let G be a finite group. Then $\pi(|G|)$ is denoted by $\pi(G)$. We construct the prime graph of G, which is denoted by $\Gamma(G)$, as follows: the vertex set is $\pi(G)$ and two distinct primes p and q are joined by an edge if and only if G has an element of order pq. Let m and n be natural numbers. We write $m \sim n$ if and only if for all prime divisors $r \in \pi(m)$ and $s \in \pi(n)$, r is adjacent to s in $\Gamma(G)$. The spectrum of a finite group G, which is denoted by $\pi_e(G)$, is the set of its element orders. Let G be a finite group and $r \in \pi(G)$. We denote by $\rho(G)$ some independent set of vertices in $\Gamma(G)$ with the maximal number of elements. Also some independent set of vertices in $\Gamma(G)$ containing r with the maximal number of elements is

Keywords: finite groups, finite simple groups, element orders, prime graph of finite group.
Article Type: Research Paper.
Communicated by Alireza Abdoollahi.
Received: 07-04-2025, Accepted: 21-12-2025, Published Online: 11-01-2026.
Cite this article: Z. Momen, Recognition of the group $E_6(5)$ by prime graph *Mathematics and Society*, **11** no. 3 (2026) 1–8.
http://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.144850.1736 .

denoted by $\rho(r,G)$. Put $t(G)=|\rho(G)|$ and $t(r,G)=|\rho(r,G)|$. We denote by $M(G)$, the set of orders of maximal abelian subgroups of G.

A finite nonabelian simple group P is called quasirecognizable by prime graph, if each finite group G with $\Gamma(G)=\Gamma(P)$ has a unique composition factor isomorphic to P. We denote by $k(\Gamma(G))$ the number of isomorphism classes of finite groups H satisfying $\Gamma(G)=\Gamma(H)$. Given a natural number r, a finite group G is called r-recognizable by prime graph if $k(\Gamma(G))=r$ and unrecognizable if $k(\Gamma(G))$ is infinite. Usually a 1-recognizable group by prime graph is called a recognizable group by prime graph. So far, the recognizability of many finite simple groups by prime graph has been studied. See [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 18, 19, 26]. Note that if G is recognizable by $\Gamma(G)$, then it is also recognizable by $\pi_e(G)$ and $M(G)$, but the converse is not true in general. In [20], we proved that if q is not a Mersenne prime, then every finite group with the same orders of maximal abelian subgroups as $A_2(q)$, is isomorphic to $A_2(q)$ or an extension of $A_2(q)$ by a subgroup of the outer automorphism group of $A_2(q)$. In [22], we proved that if $L=\mathrm{PSU}_3(q)$, where q is not a Fermat prime, then every finite group with the same set of orders of maximal abelian subgroups as L is an almost simple group with socle $\mathrm{PSU}_3(q)$. In [21], we proved that if G is a finite group such that $M(G)=M(E_6(q))$, then G has a unique nonabelian composition factor which is isomorphic to $E_6(q)$. In [4, 16], it is proved that $E_6(2)$ and ${}^2E_6(2)$, are recoginable by their prime graphs. Also in [15], it is proved that $E_6(3)$ and ${}^2E_6(3)$ are recognizable by their prime graphs. In this paper we prove that $E_6(5)$ is recognizable by its prime graph.

2. **Main Results**

Lemma 2.1. [24, Theorem 1] *Let G be a finite group with $t(G)\geq 3$ and $t(2,G)\geq 2$. Then the following hold:*

(1) There exists a finite nonabelian simple group S such that $S\leq \overline{G}=G/K\leq \mathrm{Aut}(S)$ for a maximal normal solvable subgroup K of G.

(2) For every independent subset ρ of $\pi(G)$ with $|\rho|\geq 3$ at most one prime in ρ divides the product $|K|\cdot|\overline{G}/S|$. In particular, $t(S)\geq t(G)-1$.

(3) One of the following holds:

(a) Every prime $r\in\pi(G)$ nonadjacent to 2 in $\Gamma(G)$ does not divide the product $|K|\cdot|\overline{G}/S|$; in particular, $t(2,S)\geq t(2,G)$.

(b) There exists a prime $r\in\pi(G)$ nonadjacent to 2 in $\Gamma(G)$; in which case $t(G)=3$, $t(2,G)=2$, and $S\cong Alt_7$ or $A_1(q)$ for some odd q.

Lemma 2.2. [23, Lemma 1] *Suppose that N is a normal elementary abelian subgroup of a finite group G and $H=G/N$. Define an authomorphism $\phi: H\to \mathrm{Aut}(N)$ as follows: $n^{\phi(gN)}=n^g$. Then $\Gamma(G)=\Gamma(N\rtimes_\phi H)$*

 https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.144850.1736

Remark 2.3. *By* [2]*, we know that* $\pi(E_6(5)) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, 31, 71, 313, 601, 829\}$*. Using* [25, Prop 2.5, Prop 3.2, and Prop 4.5]*, we get that* $t(E_6(5)) = 5$ *and* $t(2, E_6(5)) = 3$*. Also* $\rho(2, E_6(5)) = \{2, 19, 601, 829\}$*.*

Theorem 2.4. *If G is a finite group such that $\Gamma(G) = \Gamma(E_6(5))$, then $G \cong E_6(5)$.*

3. Summary of Proofs

By Remark 2.3 and Lemma 2.1, there exists a nonabelian simple group S such that $S \le \overline{G} = G/K \le \mathrm{Aut}(S)$ for a maximal normal solvable subgroup K of G and $t(S) \ge 4$.

Step 1. We prove that K is nilpotent. We know that G acts on K by conjugation. Since by Remark 2.3, $829 \in \rho(2, G)$, so $829 \notin \pi(K)$ by Lemma 2.1. Suppose that $a \in G$ and $|a| = 829$. By [25, Prop 2.5, Prop 3.2, and Prop 4.5], 829 is nonadjacent to all vertices of $\pi(K)$. Therefore the action of a on K is fixed-point free. Hence by Thompson's theorem, K is nilpotent.

Step 2. We prove that $S \cong E_6(5)$. By Remark 2.3, 829 is the largest prime in $\pi(S)$. Using [27], S can be a group from the following groups:

$$L_3(5^3), L_4(5^3), L_2(829^2), S_4(829), U_3(829), E_6(5), U_4(829)$$

. We prove that $S \cong E_6(5)$.

Step 3. We prove that $G/K \cong E_6(5)$. By [2], $|\mathrm{Out}(E_6(5))| = 2$, so either $G/K \cong E_6(5)$ or $G/K \cong \mathrm{Aut}(E_6(5))$. Using graph automorphism of order 2, we conclude that, $G/K \cong E_6(5)$.

Step 4. We show that $\pi(K) \subseteq \{5, 31\}$. Assume that $p \in \pi(K)$. Since K is nilpotent, by [13] K is an elementary abelian p-group.We show that $601 \sim p$ in $\Gamma(G)$. So by [25], $p \in \{5, 31\}$.

Step 5. We prove that $\pi(K) \subseteq \{5\}$. Suppose that $31 \in \pi(K)$. Using [17], we see that $O_8(5) < E_6(5)$. According to the orders of the groups $O_8(5)$ and $E_6(5)$, we get that their Sylow 13-subgroups are isomorphic. By [6], we see that $E_6(5)$ has a torus that is a direct product of two cyclic groups of order $(5-1)(5^2+1)$. Since 13 divides into $5^2 + 1$, hence we conclude that the Sylow 13-subgroup is non-cyclic. Now consider a Sylow 13-subgroup P of $E_6(5)$. Denote by $\widetilde{P}$ the full preimage of P in G. The conjugation action of 13-elements of $\widetilde{P}$ on K is fixed-point free, so $\widetilde{P}$ is a Frobenius group. By [3], P is cyclic, which is a contradiction.

Step 6. We prove that $K = 1$. Suppose that $K \ne 1$. Similarly to the above, we can assume that K is elementary abelian. By [17], $F_4(5) \le G/K$. Consider the action of $F_4(5)$ on K by Lemma 2.2. According to [5], any element of order 601 in $F_4(5)$ fixes some non-identity element in K. Thus $601 \sim 5$ in $\Gamma(G)$, which is a contradiction. So $K = 1$. Therefore $G \cong E_6(5)$ and the proof of the Main Theorem is completed.

Zahra Momen

Department of Mathematics Education, Farhangian University , P.O.Box 14665-889, Tehran, Iran

Email: `z.momen@cfu.ac.ir`

ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۲۳۴۵-۶۴۹۳، شاپا(الکترونیکی): ۲۳۴۵-۶۵۰۷
جلد ۱۱، شماره ۳ (۱۴۰۵)، صص. ۱-۸

https://www.ui.ac.ir
https://math-sci.ui.ac.ir

شناسایی پذیری گروه $E_6(5)$ به وسیله گراف اول

زهرا مومن

چکیده. اگر n یک عدد صحیح باشد، مجموعه تمام مقسوم علیه‌های اول n را با $\pi(n)$ نشان می‌دهیم. فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. در این‌صورت $\pi(|G|)$ را با $\pi(G)$ نشان می‌دهیم. گراف اول G، با $\Gamma(G)$ نشان داده و به‌صورت زیر ساخته می‌شود: مجموعه رئوس آن $\pi(G)$ است و دو عدد اول متمایز p و q توسط یک یال به هم وصل می‌شوند اگر و تنها اگر G یک عضو از مرتبه pq داشته باشد. یک گروه ساده غیرآبلی متناهی P، شبه شناسایی‌پذیر به وسیله گراف اول نامیده می‌شود اگر هر گروه متناهی G که در آن $\Gamma(G)=\Gamma(P)$، یک عامل ترکیبی یکتایکریخت با P داشته باشد. تعداد کلاس‌های یکریختی گروه‌های متناهی H که در آن $\Gamma(G)=\Gamma(H)$ است را با $k(\Gamma(G))$ نشان می‌دهیم. برای یک عدد طبیعی r، یک گروه متناهی G، r-شناسایی‌پذیر به‌وسیله گراف اول نامیده می‌شود اگر $k(\Gamma(G))=r$ و هر گاه $k(\Gamma(G))=1$، شناسایی‌پذیر نامیده می‌شود. در این مقاله، به‌عنوان نتیجه اصلی نشان می‌دهیم که اگر G یک گروه متناهی باشد به‌طوری‌که $\Gamma(G)=\Gamma(E_6(5))$، آنگاه $G\cong E_6(5)$.

۱. مقدمه

اگر n یک عدد صحیح باشد، مجموعه تمام مقسوم علیه‌های اول n را با $\pi(n)$ نشان می‌دهیم. فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. در این‌صورت $\pi(|G|)$ را با $\pi(G)$ نشان می‌دهیم. گراف اول G، با $\Gamma(G)$ نشان داده و به‌صورت زیر ساخته می‌شود: مجموعه رئوس آن $\pi(G)$ است و دو عدد اول متمایز p و q توسط یک یال به هم وصل می‌شوند اگر و تنها اگر G یک عضو از مرتبه pq داشته باشد. اگر m و n اعداد طبیعی باشند، می‌نویسیم $m\sim n$ اگر و تنها اگر برای هر مقسوم علیه اول $r\in\pi(m)$ و $s\in\pi(n)$، r و s در $\Gamma(G)$ مجاور باشند. طیف یک گروه متناهی G که با $\pi_e(G)$ نشان داده می‌شود، مجموعه مرتبه‌های عناصر آن گروه است. فرض کنید G یک گروه متناهی باشد و $r\in\pi(G)$. یک مجموعه مستقل از رئوس در $\Gamma(G)$ با حداکثر تعداد اعضا را با $\rho(G)$ نشان می‌دهیم. همچنین، یک مجموعه مستقل از رئوس در $\Gamma(G)$ که شامل r باشد و حداکثر تعداد اعضا را داشته باشد، با $\rho(r,G)$ نشان می‌دهیم. قرار می‌دهیم $t(G)=|\rho(G)|$ و $t(r,G)=|\rho(r,G)|$. مجموعه مرتبه‌های زیرگروه‌های آبلی ماکسیمال G را با $M(G)$ نشان می‌دهیم.

یک گروه ساده غیرآبلی متناهی P، شبه شناسایی‌پذیر به وسیله گراف اول نامیده می‌شود، اگر هر گروه متناهی G که $\Gamma(G)=\Gamma(P)$، یک عامل ترکیبی یکتا یکریخت با P داشته باشد. تعداد کلاس‌های یکریختی گروه‌های متناهی H که در آن $\Gamma(G)=\Gamma(H)$ است را با $k(\Gamma(G))$ نشان می‌دهیم. برای یک عدد طبیعی r، یک گروه متناهی G، r- شناسایی‌پذیر به وسیله گراف اول نامیده می‌شود اگر $k(\Gamma(G))=r$ باشد و هر گاه $k(\Gamma(G))=\infty$، شناسایی‌ناپذیر نامیده می‌شود.

عبارات و کلمات کلیدی: گروه‌های متناهی، گروه‌های ساده متناهی، مرتبه عناصر، گراف اول گروه متناهی.
نوع مقاله: پژوهشی
دبیرتخصصی رابط: علیرضا عبدالهی
تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۱/۱۸ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۹/۳۰ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۴/۱۰/۲۱
ارجاع به مقاله: ز. مومن، شناسایی پذیری گروه $E_6(5)$ به وسیله گراف اول، ریاضی و جامعه، ۱۱ شماره ۳ (۱۴۰۵) ۱-۸. https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.144850.1736
.

ثابت شده است که اگر $q = 3^{2n+1}$ (با شرط $n > 0$)، آنگاه گروه ساده‌ی $^2G_2(q)$ توسط گراف اول شناسایی‌پذیر است [۷، ۲۶]. همچنین در [۱۱] نشان داده شده است که $PSL(2, p)$، جایی‌که $p > 11$ یک عدد اول است و $p \not\equiv 1 \pmod{12}$، از طریق گراف اول قابل شناسایی است. در [۸، ۱۲]، گروه‌های متناهی با گراف اول یکسان با $PSL(2, q)$ (که در آن q عدد اول نیست) مشخص شده‌اند. همچنین در [۹، ۱۰، ۱۳، ۱۴]، گروه‌های متناهی با گراف اول یکسان با $PSL(n, 2)$، $PSU(n, 2)$، $D_n(2)$ و $^2D_n(2)$ تعیین شده‌اند.

در [۱۸] ما ثابت کرده‌ایم که اگر G یک گروه متناهی باشد به‌طوری‌که $\Gamma(G) = \Gamma(B_p(3))$، جایی‌که $p > 3$ یک عدد اول فرد است، آنگاه $G \cong B_p(3)$ یا $C_p(3)$. همچنین اگر $\Gamma(G) = \Gamma(B_3(3))$ باشد، آنگاه G با یکی از گروه‌های $B_3(3)$، $C_3(3)$ یا $D_4(3)$ یکریخت است در غیر این‌صورت $G/O_2(G) \cong Aut(^2B_2(8))$. همچنین در [۱۹] ثابت کرده‌ایم که اگر G یک گروه متناهی باشد به‌طوری‌که $\Gamma(G) = \Gamma(B_n(3))$، جایی‌که $n \geq 6$، آنگاه G دارای یک عامل ترکیبی غیرآبلی یکتا است که یکریخت با $B_n(3)$ یا $C_n(3)$ می‌باشد. همچنین اگر $\Gamma(G) = \Gamma(B_4(3))$ باشد، آنگاه G دارای یک عامل ترکیبی غیرآبلی یکتا است که یکریخت با $B_4(3)$، $C_4(3)$ یا $^2D_4(3)$ می‌باشد.

توجه داشته باشید که اگر G توسط $\Gamma(G)$ قابل تشخیص باشد، آنگاه توسط $\pi_e(G)$ و $M(G)$ نیز قابل تشخیص است، اما عکس این موضوع به‌طور کلی درست نیست. در مرجع [۲۰]، ثابت کردیم که اگر q یک عدد اول مرسن نباشد، هر گروه متناهی با مرتبه‌های زیرگروه‌های آبلی ماکسیمال یکسان با $PSL(3, q)$، یا با $PSL(3, q)$ یکریخت است یا با یک توسیع از $PSL(3, q)$ توسط یک زیرگروه از گروه خودریختی‌های خارجی $PSL(3, q)$ یکریخت است. در مرجع [۲۲]، نشان دادیم که اگر $L = PSU_3(q)$ باشد (جایی که q عدد اول فرما نیست)، هر گروه متناهی با مجموعه مرتبه‌های زیرگروه‌های آبلی ماکسیمال یکسان با L، یک گروه تقریباً ساده با هسته $PSU_3(q)$ است. در مرجع [۲۱]، ثابت کردیم که اگر G یک گروه متناهی باشد به‌طوری‌که $M(G) = M(E_6(q))$، آنگاه G دارای یک عامل ترکیبی غیرآبلی یکتا است که با $E_6(q)$ یکریخت می‌باشد. در مراجع [۴، ۱۶]، ثابت شده است که $E_6(2)$ و $^2E_6(2)$ توسط گراف اولشان شناسایی‌پذیر هستند. همچنین در مرجع [۱۵]، نشان داده شد که $E_6(3)$ و $^2E_6(3)$ نیز توسط گراف اولشان شناسایی‌پذیر می‌باشند. در این مقاله، ثابت می‌کنیم که $E_6(5)$ توسط گراف اولش، شناسایی‌پذیر است.

در سرتاسر این مقاله، همه گروه‌ها متناهی هستند و منظور از گروه‌های ساده، گروه‌های ساده غیرآبلی است. تمام نمادها و علائم دیگر استاندارد هستند و به مرجع [۲] ارجاع داده می‌شوند.

۲. متن اصلی

لم ۱.۲. [۲۴] فرض کنید G یک گروه متناهی باشد به‌طوری‌که $t(G) \geq 3$ و $t(2, G) \geq 2$. در این‌صورت موارد زیر برقرارند:

۱ . یک گروه ساده غیرآبلی متناهی S وجود دارد به‌طوری‌که

$$S \leq \overline{G} = G/K \leq Aut(S)$$

برای زیرگروه نرمال حل‌پذیر ماکسیمال K از G.

۲ . برای هر زیرمجموعه مستقل ρ از $\pi(G)$ با $|\rho| \geq 3$، حداکثر یک عدد اول در ρ، $|K| \cdot |\overline{G}/S|$ را عاد می‌کند. به‌ویژه، $t(S) \geq t(G) - 1$.

۳ . یکی از دو حالت زیر برقرار است:

(الف) هر عدد اول $r \in \pi(G)$ که در $\Gamma(G)$ به ۲ متصل نیست، $|K| \cdot |\overline{G}/S|$ را عاد نمی‌کند؛ به‌ویژه، $t(2, S) \geq t(2, G)$.

(ب) یک عدد اول $r \in \pi(G)$ وجود دارد که در $\Gamma(G)$ به ۲ متصل نیست؛ در این‌صورت $t(G) = 3$، $t(2, G) = 2$، و $S \cong A_7$ یا $PSL(2, q)$ برای یک q فرد.

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.144850.1736

لم ۲.۲. [۲۳] فرض کنید N یک زیرگروه آبلی مقدماتی نرمال از گروه متناهی G باشد و $H = G/N$. خودریختی $\phi : H \to Aut(N)$ را به این‌صورت تعریف می‌کنیم: اگر $n^{\phi(gN)} = n^g$، آنگاه $\Gamma(G) = \Gamma(N \rtimes_\phi H)$.

تبصره ۳.۲. طبق [۲]، می‌دانیم که $\pi(E_۶(۵)) = \{۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۹, ۳۱, ۷۱, ۳۱۳, ۶۰۱, ۸۲۹\}$. با استفاده از [۲۵، قضیه ۵.۲، قضیه ۲.۳ و قضیه ۵.۴]، داریم $t(E_۶(۵)) = ۵$، $t(۲, E_۶(۵)) = ۴$ و $\rho(۲, E_۶(۵)) = \{۲, ۱۹, ۶۰۱, ۸۲۹\}$.

قضیه ۴.۲. اگر G یک گروه متناهی باشد به‌طوری‌که $\Gamma(G) = \Gamma(E_۶(۵))$، آنگاه $G \cong E_۶(۵)$.

اثبات. با توجه به تبصره ۳.۲ و لم ۱.۲، یک گروه ساده غیرآبلی S، به‌طوری‌که $S \leq \overline{G} = G/K \leq Aut(S)$ برای زیرگروه نرمال حل‌پذیر ماکسیمال K از G و $t(S) \geq ۴$ وجود دارد.
گام ۱. ثابت می‌کنیم که K پوچتوان است. می‌دانیم که G بر K با تزویج عمل می‌کند. از آنجایی‌که طبق تبصره ۳.۲، $۸۲۹ \in \rho(۲, G)$، پس $۸۲۹ \notin \pi(K)$ طبق لم ۱.۲ برقرار است. فرض کنید $a \in G$ و $|a| = ۸۲۹$. با توجه به [۲۵، قضیه ۵.۲، قضیه ۲.۳ و قضیه ۵.۴]، ۸۲۹ به هیچ یک از رئوس $\pi(K)$ متصل نیست. بنابراین عمل a بر K بدون نقطه ثابت است. در نتیجه، طبق قضیه تامپسون، K پوچتوان است.
گام ۲. ثابت می‌کنیم $S \cong E_۶(۵)$. طبق تبصره ۳.۲، ۸۲۹ بزرگ‌ترین عدد اول در $\pi(S)$ است. با استفاده از [۲۷]، S می‌تواند یکی از گروه‌های زیر باشد:

$$A_{۸۲۹}, PSL(۳, ۵^۳), PSL(۴, ۵^۳), PSL(۲, ۸۲۹), PSL(۲, ۸۲۹^۲), S_۴(۸۲۹), PSU(۳, ۸۲۹), E_۶(۵), PSU(۴, ۸۲۹)$$

اگر S برابر $PSL(۳, ۵^۳)$، $PSL(۲, ۸۲۹)$، $PSL(۲, ۸۲۹^۲)$، $S_۴(۸۲۹)$، $PSU(۳, ۸۲۹)$ یا $PSU(۴, ۸۲۹)$ باشد، آنگاه $۶۰۱ \notin \pi(S)$. این تناقض است زیرا $۶۰۱ \in \rho(۲, G)$. اگر S با $PSL(۴, ۵^۳)$ یکریخت باشد، آنگاه $t(PSL(۴, ۵^۳)) = ۳$ که با شرط $t(S) \geq ۴$ در تناقض است. اگر S با $A_{۸۲۹}$ یکریخت باشد، آنگاه $t(A_{۸۲۹}) = ۱$ که با شرط $t(S) \geq ۴$ در تناقض است، بنابراین $S \cong E_۶(۵)$.
گام ۳. ثابت می‌کنیم $G/K \cong E_۶(۵)$. طبق [۲]، چون $|Out(E_۶(۵))| = ۲$ است لذا یکی از روابط زیر برقرار است: $G/K \cong E_۶(۵)$ یا $G/K \cong Aut(E_۶(۵))$.

فرض کنید $G/K \cong Aut(E_۶(۵))$. اگر γ یک خودریختی گرافی از $E_۶(۵)$ با مرتبه ۲ باشد، طبق [۱، قضیه ۶.۱۳]، $C_{E_۶(۵)}(\gamma) \cong F_۴(۵)$. از آنجا که $۶۰۱ \in \pi(F_۴(۵))$ و $۶۰۱ \in \rho(۲, G)$، به تناقض می‌رسیم. پس $G/K \cong E_۶(۵)$.
گام ۴. نشان می‌دهیم $\pi(K) \subseteq \{۵, ۳۱\}$. می‌دانیم K حل‌پذیر است و اگر $K \neq ۱$، آنگاه عدد اول p وجود دارد به‌طوری‌که $O^p(K) \neq K$. می‌دانیم $O^p(K)$ زیرگروه مشخصه‌ی K است و $O^p(K)$ زیرگروه نرمال G است. فرض کنید $\hat{K} = K/O^p(K)$ و $\hat{G} = G/O^p(K)$. می‌دانیم $\hat{K}$ یک p–گروه غیربدیهی است. اگر زیرگروه فراتینی $\hat{K}$ را با $\Phi(\hat{K})$ نشان دهیم، آنگاه $\hat{K}/\Phi(\hat{K})$ یک p–گروه آبلی مقدماتی است و داریم:

$$\frac{G}{K} \cong \frac{\hat{G}}{\hat{K}} \cong \frac{\hat{G}/\Phi(\hat{K})}{\hat{K}/\Phi(\hat{K})}$$

بنابراین بدون از دست دادن کلیت، می‌توانیم فرض کنیم K، p–گروه آبلی مقدماتی است. مطابق [۱۷]، $^۳D_۴(۵) \leq G/K$. عمل $^۳D_۴(۵)$ بر K را در نظر بگیرید که توسط ϕ در لم ۲.۲ تعریف شده است. یک عنصر $b \in {}^۳D_۴(۵)$ با مرتبه ۶۰۱ انتخاب کنید. اگر $p \neq ۵$، آنگاه b یک عنصر در K را ثابت نگه می‌دارد [۲۸]. بنابراین $p \sim ۶۰۱$ در $\Gamma(G)$. پس طبق [۲۵]، $p \in \{۵, ۳۱\}$.
گام ۵. ثابت می‌کنیم $\pi(K) \subseteq \{۵\}$. فرض کنید $۳۱ \in \pi(K)$. با استفاده از [۱۷]، می‌بینیم $O^+_۸(۵) < E_۶(۵)$. با توجه به مرتبه گروه‌های $O^+_۸(۵)$ و $E_۶(۵)$، ۱۳–زیرگروه‌های سیلوی آنها یکریخت هستند. طبق [۶]، $E_۶(۵)$ یک چنبره دارد که حاصلضرب مستقیم دو گروه دوری با مرتبه $(۵ - ۱)(۵^۲ + ۱)$ است. از آنجا که ۱۳ مقسوم‌علیه $۵^۲ + ۱$ است، ۱۳–زیرگروه سیلو غیر دوری

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.144850.1736

است. اکنون یک ۱۳–زیرگروه سیلو P، از $E_6(5)$ در نظر بگیرید. $\widetilde{P}$ را تصویر وارون P در G بنامید. عمل تزویج ۱۳–عناصر در $\widetilde{P}$ بر K بدون نقطه ثابت است، بنابراین $\widetilde{P}$ یک گروه فروبنیوس است. طبق [3]، P دوری است که تناقض ایجاد می‌کند.

گام ۶. ثابت می‌کنیم $K = 1$. فرض کنید $K \neq 1$. مشابه قبل، می‌توان فرض کرد K آبلی مقدماتی است. طبق [17]، $G/K \leq F_4(5)$. عمل $F_4(5)$ بر K را مطابق لم ۲.۲ در نظر بگیرید. بر اساس [5]، هر عنصر با مرتبه ۶۰۱ در $F_4(5)$ یک عنصر غیر همانی در K را ثابت نگه می‌دارد. بنابراین $5 \sim 601$ در $\Gamma(G)$ که تناقض است. پس $K = 1$. در نتیجه $G \cong E_6(5)$ و اثبات قضیه اصلی کامل می‌شود. $\square$

نتیجه ۵.۲. اگر G یک گروه متناهی باشد به‌طوری‌که $\pi_e(G) = \pi_e(E_6(5))$، آنگاه $G \cong E_6(5)$.

نتیجه ۶.۲. اگر G یک گروه متناهی باشد به‌طوری‌که $M(G) = M(E_6(5))$، آنگاه $G \cong E_6(5)$.

مراجع

[1] R. W. Carter, *Simple groups of Lie type*, Pure and Applied Mathematics, **28**, John Wiley & Sons, London-New York-Sydney, 1972.

[2] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker and R. A. Wilson, $\mathbb{ATLAS}$ *of finite groups*, Maximal subgroups and ordinary characters for simple groups, With computational assistance from J. G. Thackray, Oxford University Press, Eynsham, 1985.

[3] D. Gorenstein, *Finite groups*, Harper & Row, Publishers, New York-London, 1968.

[4] W. Guo, A. S. Kondrat'ev and N. V. Maslova, Recognition of the group $E_6(2)$ by Grunberg-Kegel graph, *Tr. Inst. Mat. Mekh.*, **27** no. 4 (2021) 263–268.

[5] R. M. Guralnick and P. H. Tiep, Finite simple unisingular groups of Lie type, *J. Group Theory*, **6** no. 3 (2003) 271–310.

[6] W. M. Kantor and A. Seress, Prime power graphs for groups of Lie type, *J. Algebra*, **247** no. 2 (2002) 370–434.

[7] A. Khosravi and B. Khosravi, Quasirecognition of the simple group ${}^2G_2(q)$ by a prime graph, *Siberian Math. J.*, **48** no. 3 (2007) 570–577.

[8] B. Khosravi, n-recognition by prime graph of the simple group $PSL(2,q)$, *J. Algebra Appl.*, **7** no. 6 (2008) 735–748.

[9] B. Khosravi, Quasirecognizability of $L_{10}(2)$ by a prime graph, *Sib. Math. J.*, **50** no. 2 (2009) 355–359.

[10] B. Khosravi, Some characterizations of $L_9(2)$ related to its prime graph, *Publ. Math. Debrecen*, **75** no. 3-4 (2009) 375–385.

[11] B. Khosravi, B. Khosravi and B. Khosravi, On the prime graph of $PSL(2,p)$ where $p > 3$ is a prime number, *Acta Math. Hungar.*, **116** no. 4 (2007) 295–307.

[12] A. Khosravi and B. Khosravi, 2-recognizability of $PSL(2,p^2)$ by a prime graph, *Sib. Math. J.*, **49** no. 4 (2008) 749–757.

[13] B. Khosravi, B. Khosravi and B. Khosravi, A characterization of the finite simple group $L_{16}(2)$ by its prime graph, *Manuscripta Math.*, **126** no. 1 (2008) 49–58.

[14] B. Khosravi and H. Moradi, Quasirecognition by prime graph of some orthogonal groups over the binary field, *J. Algebra Appl.*, **11** no. 3 (2012) 1250056, 15 pp.

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.144850.1736

[15] A. P. Khramova, N. V. Maslova, V. V. Panshin and A. M. Staroletov, Characterization of groups $E_6(3)$ and $^2E_6(3)$ by Gruenberg-Kegel graph, *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, **18** no. 2 (2021) 1651–1656.

[16] A. S. Kondrat'ev, Recognizability by a prime graph of the group $^2E_6(2)$, *J. Math. Sci.*, New York, **259** no. 4 (2021) 463–466.

[17] M. W. Liebeck, J. Saxl and G. M. Seitz, Subgroups of maximal rank in finite exceptional groups of Lie type, *Proc. London Math. Soc. (3)*, **65** no. 2 (1992) 297–325.

[18] Z. Momen and B. Khosravi, On r-recognition by prime graph of $B_p(3)$ where p is an odd prime, *Monatsh. Math.*, **166** no. 2 (2012) 239–253.

[19] Z. Momen and B. Khosravi, Groups with the same prime graph as the orthogonal group $B_n(3)$, *Sib. Math. J.*, **54** no. 3 (2013) 487–500.

[20] Z. Momen and B. Khosravi, Groups with the same orders of maximal abelian subgroups as $A_2(q)$, *Monatsh. Math.*, **174** no. 2 (2014) 285–303.

[21] Z. Momen and B. Khosravi, Quasirecognition of $E_6(q)$ by the orders of maximal abelian subgroups, *J. Algebra Appl.*, **17** no. 7 (2018) 1850122, 14 pp.

[22] Z. Momen and B. Khosravi, On the recognizability of the groups $PSU_3(q)$ by the orders of maximal abelian subgroups, *Sib. Math. J.*, **60** no. 1 (2019) 124–139.

[23] A. M. Staroletov, On recognition of alternating groups by prime graph, *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, **14** (2017) 994–1010.

[24] A. V. Vasil'ev, On a relation between the structure of a finite group and the properties of its prime graph, *Siberian Math. J.*, **46** no. 3 (2005) 396–404.

[25] A. V. Vasil'ev and E. P. Vdovin, An adjacency criterion in the prime graph of a finite simple group, *Algebra Logic*, **44** no. 6 (2005) 381–406.

[26] A. V. Zavarnitsin, On the recognition of finite groups by the prime graph, *Algebra Logic*, **43** no. 4 (2006) 220–231.

[27] A. V. Zavarnitsine, Finite simple groups with narrow prime spectrum, *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, **6** (2009) 1–12.

[28] A. V. Zavarnitsine, Finite groups with a five-component prime graph, *Sib. Math. J.*, **54** no. 1 (2013) 40–46.

زهرا مومن
گروه آموزش ریاضی، دانشکده شهید شرافت، دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران
z.momen@cfu.ac.ir

زهرا مومن متولد بهمن ماه ۱۳۶۲ در شهر تهران است. وی در سال ۱۳۸۱ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی محض دانشگاه صنعتی امیرکبیر شد و در سال ۱۳۸۵ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش جبر دانشگاه صنعتی امیرکبیر و در سال ۱۳۸۸ وارد مقطع دکتری رشته ریاضی محض گرایش جبر دانشگاه صنعتی امیرکبیر شد. وی هم اکنون عضو هیات علمی دانشگاه فرهنگیان تهران می‌باشد.