Mathematics and Society
University of Isfahan
https://math-sci.ui.ac.ir

Mathematics and Society
ISSN (print): 2345-6493, ISSN (on-line): 2345-6507
Vol. 11 No. 2 (2026), pp. 65–80.
© 2026 The Author(s)
https://www.ui.ac.ir

G-AMENABILITY FOR DIRECT SUM, TENSOR PRODUCT AND FREE PRODUCT OF VON-NEUMANN ALGEBRAS

MOHAMMAD REZA GHANEI

Abstract. For a family of W^*-dynamical systems $(M_i, G, \alpha_i)_{i\in I}$, where G is a locally compact group, we prove that if the direct sum $\bigoplus_{i\in I} M_i$ is G-amenable, then each M_i is also G-amenable. Conversely, if all M_i's form a countable family of G-amenable von-Neumann algebras, then $\bigoplus_{i\in I} M_i$ is G-amenable as well. For two W^*-dynamical systems (M, G, α) and (N, K, β), we show that the von-Neumann tensor product $M\bar{\otimes}N$ is $G\times K$-amenable if and only if M is G-amenable and N is K-amenable. We show that if the group G is inner amenable, then the group von-Neumann algebra $VN(G)$ is also G-amenable. Furthermore, we prove that $VN(G)\bar{\otimes}M$ is G-amenable whenever the action α is inner amenable and M is G-amenable. Finally, we show that von-Neumann algebras M and N are G-amenable if and only if their free product $M\bar{*}N$ is G-amenable. We also prove that the amenability of the group G is equivalent to the G-amenability of $L^\infty(G)\bar{*}L^\infty(G)$.

1. Introduction

Let G be a locally compact group and let $L^\infty(G)$ denote the von-Neumann algebra of essentially bounded measurable functions on G, as introduced in [5]. The concept of amenability for the group G can be described by the existence of a positive, bounded linear functional P of norm one on $L^\infty(G)$ such that for every $s \in G$ and every $f \in L^\infty(G)$, we have

$$P(\ell_s f) = P(f),$$

Keywords: Direct sum, Free product, Group amenability, Tensor product, von-Neumann algebra, W^*-dynamical system.
Article Type: Resaerch Paper.
Communicated by Majid Fakhar.
Received: 16-03-2025, Accepted: 25-08-2025, Published Online: 26-10-2025.
Cite this article: M. R. Ghanei, G-amenability for Direct Sum, Tensor Product and Free Product of von-Neumann Algebras, *Mathematics and Society*, **11** no. 2 (2026) 65–80. https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.144699.1734 .

where for almost every $t \in G$, the left translation is given by $\ell_s f(t) = f(s^{-1}t)$. For further studies on amenable groups, see [3, 8, 9].

The homomorphism $\ell : G \to \mathrm{Aut}(L^\infty(G))$ defined by $\ell_s f(t) = f(s^{-1}t)$ describes the left translation action of G on the von-Neumann algebra $L^\infty(G)$. The triple $(L^\infty(G), G, \ell)$ thus forms a W^*-dynamical system. It follows that the amenability of the group G is equivalent to the existence of a positive, norm-one, bounded linear functional P on the von-Neumann algebra $L^\infty(G)$ that is invariant under the action of G.

Motivated by this characterization, in 2006 Lau and Paterson, in [6], considered a group action of G on a von-Neumann algebra M forming a W^*-dynamical system, and introduced the notion of G-amenability for the algebra M.

We recall that by a *von-Neumann algebra* M we mean a unital $*$-subalgebra of the algebra of bounded linear operators on a Hilbert space H, which is closed in the strong operator topology.

Moreover, the algebra of all bounded linear operators on H is denoted by $B(H)$, that is,

$$B(H) = \{T \mid T : H \to H \text{ is linear and bounded}\}.$$

A triple (M, G, α) is called a W^*-dynamical system if $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(M)$ is a group homomorphism from G into the group of $*$-automorphisms of M, such that for every $m \in M$ and $\xi, \eta \in H$, the map

$$s \mapsto \langle \alpha_s(m)(\xi), \eta \rangle$$

is continuous. Equivalently, due to the boundedness of the set $\{\alpha_s(m) \mid s \in G\}$, the map

$$s \mapsto s \cdot m := \alpha_s(m) \quad (G \to (M, \sigma(M, M_*)))$$

is continuous, where M_* denotes the predual of M and $\sigma(M, M_*)$ is the weak* topology on M.

Similarly, M is called a right G-module if the action of G on M is given by

$$s \mapsto m \cdot s := \alpha_{s^{-1}}(m).$$

According to [11, p. 239], the dual space M^* is a left (right) Banach G-module; that is, the map $s \mapsto s \cdot P$ (respectively, $s \mapsto P \cdot s$) is norm continuous for every $P \in M^*$ and $s \in G$.

For every $s \in G$ and $P \in M^*$, we define:

$$s \cdot P := (\alpha_{s^{-1}})^* (P), \qquad P \cdot s := (\alpha_s)^* (P),$$

where $(\alpha_s)^* : M^* \to M^*$ denotes the adjoint map of $\alpha_s : M \to M$.

Therefore, for all $P \in M^*$, $m \in M$, and $s \in G$, we have:

$$\langle s \cdot P, m \rangle = \langle P, m \cdot s \rangle, \qquad \langle P \cdot s, m \rangle = \langle P, s \cdot m \rangle.$$

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.144699.1734

In this paper, by a *state* we mean a positive linear functional of norm one on the von-Neumann algebra M, and the set of all states on M is denoted by $S(M)$; that is,

$$S(M) = \{P \in M^* \mid \|P\| = P(1) = 1\}.$$

For more on group modules, see [10].

As a fundamental example, the triple $(L^\infty(G), G, \ell)$ forms a W^*-dynamical system. It follows that G is amenable if and only if there exists a state $P \in S(L^\infty(G))$ such that for all $f \in L^\infty(G)$,

$$P(\ell_s f) = P(f),$$

which is equivalent to $s \cdot P = P$ for every $s \in G$.

This motivates the following definition in the general setting of W^*-dynamical systems, as originally introduced in [6].

Definition 1.1. *Let (M, G, α) be a W^*-dynamical system. The von-Neumann algebra M is said to be G-amenable if there exists a state $P \in S(M)$ such that $s \cdot P = P$ for all $s \in G$. In this case, P is called a G-invariant state.*

The main goal of this paper is to investigate group amenability for three classes of W^*-dynamical systems. In Section 2, we first consider a family of W^*-dynamical systems $(M_i, G, \alpha_i)_{i\in I}$ along with a locally compact group G. We show that there exists an action of G on the direct sum $\bigoplus_{i\in I} M_i$ such that it forms a W^*-dynamical system. Moreover, we prove that if $\bigoplus_{i\in I} M_i$ is G-amenable, then each M_i is G-amenable as well. Conversely, if all M_i's form a countable family of G-amenable von-Neumann algebras, then the direct sum $\bigoplus_{i\in I} M_i$ is also G-amenable. As a consequence, we obtain a necessary and sufficient condition for the amenability of the group G.

Next, for two W^*-dynamical systems (M, G, α) and (N, K, β), we show that there exists an action of the group $G \times K$ on the von-Neumann tensor product $M\bar{\otimes}N$ such that $M\bar{\otimes}N$ is $G \times K$-amenable if and only if M is G-amenable and N is K-amenable.

Furthermore, we provide a sufficient condition for the G-amenability of the group von-Neumann algebra $VN(G)$. In particular, we prove that if the group G is inner amenable, then $VN(G)$ is G-amenable. We also show that $VN(G)\bar{\otimes}M$ is G-amenable whenever the action α is inner amenable and M is G-amenable.

In Section 3, we consider two W^*-dynamical systems (M_1, G, α_1) and (M_2, G, α_2), and show that an action of G on the free product von-Neumann algebra $M_1\bar{*}M_2$ can be defined. We prove that $M_1\bar{*}M_2$ is G-amenable if and only if both M_1 and M_2 are G-amenable.

Finally, we demonstrate that the amenability of G is equivalent to the G-amenability of the free product $L^\infty(G)\bar{*}L^\infty(G)$.

2. Main Results

Theorem 2.1. *Let $\{(M_i, G, \alpha_i)\}_{i\in I}$ be a family of W^*-dynamical systems. Then:*

(i). *If $\bigoplus_{i\in I} M_i$ is G-amenable, then each M_i is G-amenable.*

(ii). *If I is a countable set and each M_i is G-amenable, then the direct sum $\bigoplus_{i\in I} M_i$ is also G-amenable.*

Corollary 2.2. *Let G be a locally compact group. Then G is amenable if and only if for every countable index set I, the von-Neumann algebra $\bigoplus_{i\in I} L^\infty(G)$ is G-amenable.*

Corollary 2.3. *Let (M, G, α) be a W^*-dynamical system such that G is a countable discrete group. Then M is G-amenable if and only if $\ell^\infty(G, M)$ is G-amenable.*

Suppose that M and N are von-Neumann algebras on Hilbert spaces H_M and H_N, respectively. The von-Neumann algebra generated by the set $\{m \otimes n \mid m \in M, n \in N\}$ (on the tensor product Hilbert space $H_M \otimes H_N$) is called the tensor product of M and N, and is denoted by $M\bar{\otimes}N$; for more details, see [4].

Let (M, G, α) and (N, K, β) be two W^*-dynamical systems. Consider the homomorphism $\alpha \times \beta : G \times K \to \mathrm{Aut}(M\bar{\otimes}N)$ defined by

$$(\alpha \times \beta)_{(s,t)}(m \otimes n) = \alpha_s(m) \otimes \beta_t(n).$$

Then the triple $(M\bar{\otimes}N, G \times K, \alpha \times \beta)$ is a W^*-dynamical system.

Theorem 2.4. *Let (M, G, α) and (N, K, β) be two W^*-dynamical systems. Then, with respect to the W^*-dynamical system $(M\bar{\otimes}N, G \times K, \alpha \times \beta)$, the von-Neumann algebra $M\bar{\otimes}N$ is $G \times K$-amenable if and only if M is G-amenable and N is K-amenable.*

Corollary 2.5. *Let G be a locally compact group. Then G is amenable if and only if the von-Neumann algebra $L^\infty(G \times G)$ is G-amenable in the W^*-dynamical system $(L^\infty(G \times G), G, \ell \times \ell)$.*

Proposition 2.6. *Let G be a locally compact group. If G is inner amenable, then the group von-Neumann algebra $VN(G)$ is G-amenable.*

Corollary 2.7. *Let G be a locally compact group. If G is amenable, then the group von-Neumann algebra $VN(G)$ is G-amenable.*

Corollary 2.8. *If G is a finite or abelian group, then the direct sum of any number of copies of $VN(G)$ is a G-amenable von-Neumann algebra.*

Theorem 2.9. *Let (M, G, α) be a W^*-dynamical system and suppose that the action α is inner amenable. If M is G-amenable, then the tensor product $VN(G)\bar{\otimes}M$ is also G-amenable.*

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.144699.1734

Suppose that (M_1, G, α_1) and (M_2, G, α_2) are two W^*-dynamical systems. The free product of the von-Neumann algebras M_1 and M_2, denoted by $M_1 \bar{*} M_2$. Define the map $\alpha_1 \bullet \alpha_2 : G \to \mathrm{Aut}(M_1 \bar{*} M_2)$ by the rule:

$$(\alpha_1 \bullet \alpha_2)(s)(m_{i_1} m_{i_2} \cdots m_{i_n}) = \alpha_{i_1}(s)(m_{i_1})\alpha_{i_2}(s)(m_{i_2}) \cdots \alpha_{i_n}(s)(m_{i_n}),$$

where $m_{i_j} \in M_{i_j}$ and no two consecutive elements belong to the same von-Neumann algebra.

From now on, for simplicity of notation, we write:

$$s \cdot (m_{i_1} m_{i_2} \cdots m_{i_n}) := (\alpha_1 \bullet \alpha_2)(s)(m_{i_1} m_{i_2} \cdots m_{i_n}) = s \cdot m_{i_1}\, s \cdot m_{i_2} \cdots s \cdot m_{i_n}.$$

Lemma 2.10. *Suppose that (M_1, G, α_1) and (M_2, G, α_2) are two W^*-dynamical systems. Then $(M_1 \bar{*} M_2, G, \alpha_1 \bullet \alpha_2)$ is a W^*-dynamical system.*

Theorem 2.11. *Suppose that (M_1, G, α_1) and (M_2, G, α_2) are two W^*-dynamical systems. Then $M_1 \bar{*} M_2$ is G-amenable if and only if both M_1 and M_2 are G-amenable.*

Corollary 2.12. *Suppose that G is a discrete group. Then both $VN(G)$ and $VN(G * G)$ are G-amenable von-Neumann algebras.*

Corollary 2.13. *Suppose that G is a locally compact group. Then G is amenable if and only if $L^\infty(G) \bar{*} L^\infty(G)$ in the W^*-dynamical system $(L^\infty(G) \bar{*} L^\infty(G), G, \ell \bullet \ell)$ is a G-amenable von-Neumann algebra*

3. Conclusions

In this paper, we study the notion of G-amenability for a W^*-dynamical system (M, G, α). By using the direct sum, tensor product, and free product of von-Neumann algebras, we construct new W^*-dynamical systems. We investigate the conditions under which these three classes of von-Neumann algebras are G-amenable, leading to new characterizations for the amenability of the group G. In particular, for two W^*-dynamical systems (M, G, α) and (N, G, β), we conclude that the amenability of G is equivalent to the G-amenability of each of the following von-Neumann algebras:

- the direct sum $M \oplus N$,
- the tensor product $M \bar{\otimes} N$,
- the free product $M \bar{*} N$.

Mohammad Reza Ghanei
Department of Mathematics, Khansar Campus, University of Isfahan, Isfahan, Iran
Email: m.r.ghanei@khc.ui.ac.ir Email: mrg.ghanei@gmail.com

ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۲۳۴۵-۶۴۹۳، شاپا(الکترونیکی): ۲۳۴۵-۶۵۰۷
جلد ۱۱، شماره ۲ (۱۴۰۵)، صص. ۶۵-۸۰
© ۱۴۰۵ دانشگاه اصفهان

https://www.ui.ac.ir
https://math-sci.ui.ac.ir

G-میانگین‌پذیری جمع مستقیم، ضرب تانسوری و ضرب آزاد جبرهای فون-نویمان

محمدرضا قانعی

چکیده. برای یک خانواده از W^*-سیستم‌های دینامیکی $(M_i, G, \alpha_i)_{i\in I}$ که G گروه فشرده موضعی است، ثابت می‌کنیم اگر جمع مستقیم $\bigoplus_{i\in I} M_i$، G-میانگین‌پذیر باشد، آنگاه هر M_i نیز G-میانگین‌پذیر است و بالعکس اگر M_iها یک خانواده شمارا از جبرهای فون-نویمان G-میانگین‌پذیر باشند آنگاه $\bigoplus_{i\in I} M_i$ نیز G-میانگین‌پذیر خواهد بود. برای دو W^*-سیستم دینامیکی (M, G, α) و (N, K, β) نشان می‌دهیم که ضرب تانسوری فون-نویمانی $M\bar{\otimes}N$، $G\times K$-میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر M، G-میانگین‌پذیر و N، K-میانگین‌پذیر باشد. نشان می‌دهیم اگر گروه G میانگین‌پذیر داخلی باشد، آنگاه جبر فون-نویمان گروهی $VN(G)$ نیز G-میانگین‌پذیر می‌شود. همچنین ثابت می‌کنیم $VN(G)\bar{\otimes}M$، G-میانگین‌پذیر است اگر عمل α میانگین‌پذیر داخلی و M نیز G-میانگین‌پذیر باشد. در نهایت نشان می‌دهیم M و N دو جبر فون-نویمان G-میانگین‌پذیر هستند اگر و تنها اگر جبر فون-نویمانی ضرب آزاد آنها یعنی $M\bar{*}N$، G-میانگین‌پذیر باشد. ثابت می‌کنیم میانگین‌پذیری گروه G معادل G- میانگین‌پذیری $L^\infty(G)\bar{*}L^\infty(G)$ است.

۱. مقدمه و مفاهیم مورد نیاز

فرض کنید G یک گروه فشرده‌ی موضعی، $L^\infty(G)$ جبر توابع اندازه‌پذیر و اساسی کران‌دار روی G که در [۵] معرفی شده است، باشند. مفهوم میانگین‌پذیری گروه G را می‌توان این‌چنین بیان کرد که تابعک خطی و کراندار مثبت با نرم ۱ مانند P روی $L^\infty(G)$ به‌گونه‌ای موجود باشد که برای هر $s\in G$ و برای هر $f\in L^\infty(G)$ داشته باشیم $P(\ell_s f) = P(f)$ که در آن تقریباً برای هر $t\in G$ داریم $\ell_s f(t) = f(s^{-1}t)$. برای مطالعه بیشتر روی گروه‌های میانگین‌پذیر، رجوع کنید به [۳، ۸، ۹][1].

همریختی $\ell : G \to \mathrm{Aut(L^\infty(G))}$ با ضابطه‌ی $\ell_s f(t) = f(s^{-1}t)$ عمل انتقال چپ گروه G روی جبر فون-نویمان $L^\infty(G)$ می‌شود و سه‌تایی $(L^\infty(G), G, \ell)$ تشکیل یک W^*-سیستم دینامیکی می‌دهد. می‌توان گفت میانگین‌پذیری گروه G معادل وجود یک تابعک خطی کراندار مثبت با نرم واحد مانند P روی جبر فون-نویمان $L^\infty(G)$ است که نسبت به عمل G روی $L^\infty(G)$ پایا باشد. لذا در سال ۲۰۰۶ لائو [2] و پترسون [3] در [۶] عمل گروه G روی یک جبر فون-نویمان M که تشکیل یک W^*-سیستم دینامیکی را می‌دهد را در نظر گرفتند و مفهوم G-میانگین‌پذیری برای M را تعریف کردند.

عبارات و کلمات کلیدی: جبر فون-نویمان، ضرب تانسوری جبرهای فون-نویمان، ضرب آزاد جبرهای فون-نویمان، W^*-سیستم دینامیکی، میانگین‌پذیری گروهی
نوع مقاله: پژوهشی
دبیرتخصصی رابط: مجید فخار
تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱۲/۲۶ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۶/۰۳ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۴/۰۸/۰۴
ارجاع به مقاله: م. ر. قانعی، G-میانگین‌پذیری جمع مستقیم، ضرب تانسوری و ضرب آزاد جبرهای فون-نویمان، ریاضی و جامعه، ۱۱ شماره ۲ (۱۴۰۵) ۶۵-۸۰.
https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.144699.1734 .

[1]This research was in part supported by a grant from IPM (No. 1404460318) [2]A. T. Lau [3]A. L. T. Paterson

یادآوری می‌کنیم منظور از جبر فون-نویمان M یک $*$-جبر یکدار از عملگرهای خطی کراندار روی یک فضای هیلبرت H می‌باشد که در توپولوژی عملگری قوی بسته است. علاوه بر این، عملگرهای خطی کراندار روی H را با نماد $B(H)$ نشان می‌دهیم؛ در واقع

$$B(H) = \{T | \ T : H \to H \text{ خطی و کراندار است.} T\}.$$

سه‌گانه (M, G, α) یک W^*-سیستم دینامیکی نامیده می‌شود اگر $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(M)$ یک همریختی از G به گروه خودریختی‌های M باشد، به‌طوری‌که برای هر $m \in M$ و هر $\xi, \eta \in H$ تابع $s \mapsto \langle \alpha_s(m)(\xi), \eta \rangle$ پیوسته است یا به‌طور معادل با توجه به کراندار بودن $\{\alpha_s(m) \mid s \in G\}$، همریختی

$$s \mapsto s \cdot m := \alpha_s(m) \ \ (G \to (M, \sigma(M, M_*))),$$

پیوسته است؛ که در اینجا M_* پیش‌دوگان M و $\sigma(M, M_*)$ توپولوژی ضعیف* بر روی M است. بر این اساس M به‌عنوان G-مدول چپ نامیده می‌شود. به‌طور مشابه M، G-مدول راست است هرگاه عمل G روی M را به‌صورت $s \mapsto m \cdot s := \alpha_{s^{-1}}(m)$ در نظر بگیریم. طبق [۱۱، ص. ۲۳۹]، M^* یک G-مدول باناخ چپ (راست) است؛ یعنی، نگاشت $s \mapsto P \cdot s$ $(s \mapsto s \cdot P)$ برای هر $P \in M^*$ و $s \in G$ نرم پیوسته است. برای هر $s \in G$ و $P \in M^*$ تعریف می‌کنیم

$$s \cdot P := (\alpha_{s^{-1}})^*(P), \quad P \cdot s := (\alpha_s)^*(P)$$

که در آن $(\alpha_s)^* : M^* \to M^*$ نگاشت الحاقی $\alpha_s : M \to M$ است. بنابراین، برای هر $P \in M^*$ و $s \in G$ داریم

$$\langle s \cdot P, m \rangle = \langle P, m \cdot s \rangle, \quad \langle P \cdot s, m \rangle = \langle P, s \cdot m \rangle.$$

در این متن منظور از یک حالت[۴] تابعک خطی و مثبت با نرم واحد روی جبر فون-نویمان M است و ما مجموعه‌ی همه حالت‌ها روی M را با نماد $S(M)$ نشان می‌دهیم؛ یعنی، $S(M) = \{P \in M^* : \ \|P\| = P(1) = 1\}$. برای مطالعه بیشتر مدول‌های گروهی به [۱۰] مراجعه کنید.

به‌عنوان یک مثال اساسی سه تایی $(L^\infty(G), G, \ell)$ یک W^*-سیستم دینامیکی می‌شود. در نتیجه G میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر حالت $P \in S(L^\infty(G))$ به‌گونه‌ای وجود داشته باشد که برای هر $f \in L^\infty(G)$ داشته باشیم $P(\ell_s f) = P(f)$؛ و این یعنی برای هر $s \in G$ داریم $s \cdot P = P$. لذا تعریف زیر برای حالت کلی W^*-سیستمهای دینامیکی بیان می‌شود که اصل تعریف در [۶] ذکر شده است.

تعریف ۱.۱. فرض کنید (M, G, α) یک W^*-سیستم دینامیکی باشد. M یک جبر فون-نویمان G-میانگین‌پذیر نامیده می‌شود اگر یک حالت $P \in S(M)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $s \in G$ داشته باشیم $s \cdot P = P$. در این‌صورت P یک حالت G-پایا نامیده می‌شود.

هدف اصلی این مقاله بررسی میانگین‌پذیری گروهی برای سه رده از W^*-سیستم‌های دینامیکی است. در بخش ۲ ابتدا یک خانواده از W^*-سیستم‌های دینامیکی (M_i, G, α_i) به همراه گروه فشرده موضعی G را در نظر می‌گیریم. ثابت می‌کنیم یک عمل از گروه G روی جمع مستقیم $\bigoplus_{i \in I} M_i$ می‌توان تعریف نمود به‌طوری‌که یک W^*-سیستم دینامیکی درست شود و نشان می‌دهیم که اگر $\bigoplus_{i \in I} M_i$، G-میانگین‌پذیر باشد، آنگاه هر M_i نیز G-میانگین‌پذیر است و بالعکس اگر M_iها یک خانواده شمارای G-میانگین‌پذیر باشند، آنگاه $\bigoplus_{i \in I} M_i$ نیز G-میانگین‌پذیر خواهد بود. به‌عنوان نتیجه یک شرط معادل برای میانگین‌پذیری G به‌دست‌می‌آوریم. در ادامه برای دو W^*-سیستم دینامیکی (M, G, α) و (N, K, β) نشان‌می‌دهیم یک عمل

[4] state

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.144699.1734

از گروه $G\times K$ روی حاصل ضرب تانسوری فون-نویمانی $M\bar{\otimes}N$ می‌توان به‌دست آورد که $M\bar{\otimes}N$، $G\times K$-میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر M، G-میانگین‌پذیر و N، K-میانگین‌پذیر باشد. در ادامه یک شرط کافی برای G-میانگین‌پذیری جبر فون-نویمان گروهی $VN(G)$ به‌دست‌می‌آوریم. ثابت می‌کنیم اگر گروه G میانگین‌پذیر داخلی باشد، آنگاه $VN(G)$ نیز G-میانگین‌پذیر می‌شود. هم‌چنین ثابت می‌کنیم $VN(G)\bar{\otimes}M$، G-میانگین‌پذیر است اگر عمل α میانگین‌پذیر داخلی باشد و M نیز G-میانگین‌پذیر باشد.

در بخش ۳ برای دو W^*-سیستم دینامیکی (M_1,G,α_1) و (M_2,G,α_2) نشان می‌دهیم می‌توان یک عمل از G روی ضرب آزاد جبر فون-نویمانی $M_1\bar{*}M_2$ تعریف کرد و ثابت می‌کنیم $M_1\bar{*}M_2$، G-میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر M_1 و M_2، G-میانگین‌پذیر باشند. درنهایت نشان می‌دهیم میانگین‌پذیری G، معادل G-میانگین‌پذیری $L^\infty(G)\bar{*}L^\infty(G)$ می‌شود.

۲. میانگین‌پذیری گروهی جمع مستقیم و ضرب تانسوری

در این بخش، دوگان پیوسته فضای نرم‌دار X با X^* و مقدار $P\in X^*$ در $\xi\in X$ با $P(\xi)$ یا $\langle P,\xi\rangle$ نشان داده می‌شود. فرض کنید $(M_i)_{i\in I}$ یک خانواده از جبرهای فون-نویمان با پیش‌دوگان‌های $((M_i)_*)_{i\in I}$ باشد. در این‌صورت جمع مستقیم

$$\bigoplus_{i\in I}M_i=\left\{T:I\to\bigcup_{i\in I}M_i\mid T_i:=T(i)\in M_i,\ \sup_{i\in I}\|T_i\|<\infty\right\}$$

یک پیش‌دوگان طبیعی دارد، یعنی

$$\bigoplus_{i\in I}(M_i)_*=\left\{x:I\to\bigcup_{i\in I}(M_i)_*\mid x_i:=x(i)\in(M_i)_*,\ \sum_{i\in I}\|x_i\|<\infty\right\}.$$

طبق [۴، گزاره ۱.۶.۵] جمع مستقیم $\bigoplus_i M_i$ یک جبر فون-نویمان است. اگر $(M_i,G,\alpha_i)_{i\in I}$ یک خانواده از W^*-سیستم‌های دینامیکی باشد، آنگاه $(\bigoplus_i M_i,G,\alpha)$ با ضابطه‌ی $\alpha_s(T)=(\alpha_i(s)(T_i))_{i\in I}$ یا به‌طور معادل $s\cdot T=(s\cdot T_i)_{i\in I}$ برای هر $T\in\bigoplus_i M_i$ و $s\in G$ یک W^*-سیستم دینامیکی می‌شود. همچنین فضای حالت‌های روی $\bigoplus_i M_i$ به‌صورت زیر می‌شود

$$S(\bigoplus_i M_i)=\{\varphi=\sum_{i\in I}\lambda_i\varphi_i\ :\ \lambda_i\geq 0,\sum_{i\in I}\lambda_i=1,\varphi_i\in S(M_i)\}.$$

در این‌صورت برای هر $T=(T_i)_{i\in I}$ عضو $\bigoplus_{i\in I}M_i$ و $\varphi\in S(\bigoplus_{i\in I}M_i)$ داریم $\varphi(T)=\sum_{i\in I}\lambda_i\varphi_i(T_i)$.

قضیه ۱.۲. فرض کنید $(M_i,G,\alpha_i)_{i\in I}$ یک خانواده از W^*-سیستم‌های دینامیکی است. در این‌صورت

(i). اگر $\bigoplus_{i\in I}M_i$، G-میانگین‌پذیر باشد، آنگاه هر M_i، G-میانگین‌پذیر است.

(ii). اگر I مجموعه‌ایی شمارا و همه M_iها G-میانگین‌پذیر باشند، آنگاه $\bigoplus_{i\in I}M_i$، G-میانگین‌پذیر است.

اثبات. (i). ابتدا نشان می‌دهیم $\bigoplus_{i\in I}M_i$ یک W^*-سیستم دینامیکی می‌سازد. عمل $\alpha:G\to\mathrm{Aut}(\bigoplus_{i\in I}M_i)$ با ضابطه‌ی $\alpha_s(T)=(\alpha_i(s)(T_i))_{i\in I}$ یک همریختی است. لذا، $(\bigoplus_{i\in I}M_i,G,\alpha)$ یک W^*-سیستم دینامیکی می‌شود. عمل G روی $S(M_i)$ها نیز به‌صورت طبیعی به یک عمل از G روی $S(\bigoplus_i M_i)$ به‌صورت زیر گسترش می‌یابد.

$$\langle s\cdot P,T\rangle=\langle P,T\cdot s\rangle=\sum_{i\in I}\lambda_iP_i(T_i\cdot s)\qquad(\sum_{i\in I}\lambda_i=1,s\in G,P_i\in S(M_i)).$$

فرض کنید $\bigoplus_{i\in I} M_i$، G-میانگین‌پذیر باشد. لذا، حالت $P : \bigoplus_i M_i \to \mathbb{C}$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $s \in G$ داریم $s \cdot P = P$. بنابراین برای هر $T \in \bigoplus_{i\in I} M_i$ می‌توان گفت

$$\langle s \cdot P, T\rangle = \langle P, T \cdot s\rangle = \langle P, T\rangle,$$

که در آن $T \cdot s = (T_i \cdot s)_{i\in I}$ تعریف می‌شود. برای هر $i \in I$ و $m \in M_i$ حالت $P_i : M_i \to \mathbb{C}$ را با ضابطه‌ی $P_i(m) = P(T^i_m)$ تعریف می‌کنیم، که در آن $T^i_m(j) = 0$ برای هر $j \neq i$ و $T^i_m(i) = m$ است. در این‌صورت $T^i_m \cdot s = T^i_{m\cdot s}$ و داریم

$$\begin{aligned}\langle s \cdot P_i, m\rangle = \langle P_i, m \cdot s\rangle = \langle P, T^i_{m\cdot s}\rangle &= \langle P, T^i_m \cdot s\rangle \\ &= \langle s \cdot P, T^i_m\rangle = \langle P, T^i_m\rangle = \langle P_i, m\rangle.\end{aligned}$$

بنابراین، $s \cdot P_i = P_i$. در نتیجه، برای هر $i \in I$، M_i یک جبر فون-نویمان G-میانگین‌پذیر است.

(ii). فرض کنیم $\{M_i\}_{i\in I}$ یک خانواده متناهی از جبرهای فون-نویمان با عدد اصلی n که برای هر $i \in I$ حالت $P_i : M_i \to \mathbb{C}$، G-پایا باشد. در این‌صورت $P : \bigoplus_{i=1}^n M_i \to \mathbb{C}$ با ضابطه $P(T) = \sum_{i=1}^n \frac{P_i(T_i)}{n}$ یک حالت G-پایا روی $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ می‌شود. اگر I شمارای نامتناهی باشد در این‌صورت برای هر $i \in I$ حالت $P_i : M_i \to \mathbb{C}$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $s \in G$ داریم $s \cdot P_i = P_i$. فرض کنید $P : \bigoplus_i M_i \to \mathbb{C}$ با ضابطه‌ی $P(T) = \sum_{i=1}^\infty \frac{P_i(T_i)}{2^i}$ تعریف شود. به‌راحتی می‌توان دید که $\|P\| = P(1) = 1$. علاوه بر این، برای هر $T = (T_i)_{i=1}^\infty \in \bigoplus_{i=1}^\infty M_i$ داریم

$$\langle s \cdot P, T\rangle = \langle P, T \cdot s\rangle = \sum_{i=1}^\infty \frac{\langle P_i, T_i \cdot s\rangle}{2^i} = \sum_{i=1}^\infty \frac{\langle P_i, T_i\rangle}{2^i} = \langle P, T\rangle.$$

بنابراین، $\bigoplus_{i=1}^\infty M_i$ یک جبر فون-نویمان G-میانگین‌پذیر است. □

با توجه به قضیه ۱.۲، نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۲.۲. فرض کنید G یک گروه فشرده‌ی موضعی باشد. در این‌صورت، G میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر برای هر مجموعه اندیس شمارای I، $\bigoplus_{i\in I} L^\infty(G)$ یک جبر فون-نویمان G-میانگین‌پذیر است.

فرض کنید M یک جبر فون-نویمان و G یک گروه گسسته باشد. تعریف می‌کنیم

$$\ell^\infty(G, M) = \{f : G \to M \mid \|f\| = \sup_{s\in G} \|f(s)\| < \infty\}.$$

واضح است که $\ell^\infty(G, M) \cong \bigoplus_{i\in G} M$. حال با توجه به قضیه ۱.۲ نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۳.۲. فرض کنید (M, G, α) یک W^*-سیستم دینامیکی باشد به‌طوری‌که G گروه گسسته شمارش‌پذیر است. آنگاه M، G-میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر $\ell^\infty(G, M)$، G-میانگین‌پذیر باشد.

فرض کنید M و N جبرهای فون-نویمان بر فضاهای هیلبرت H_M و H_N باشند. جبر فون-نویمان تولید شده توسط مجموعه $\{m \otimes n \mid m \in M, n \in N\}$ (بر روی ضرب تانسوری فضاهای هیلبرت $H_M \otimes H_N$) حاصل‌ضرب تانسوری M و N نامیده می‌شود و با $M\bar{\otimes}N$ نشان داده می‌شود؛ برای جزئیات بیشتر به [۴] مراجعه کنید. فرض کنید (M, G, α) و (N, K, β) دو W^*-سیستم دینامیکی باشند. هم‌ریختی $\alpha \times \beta : G \times K \to \mathrm{Aut}(M\bar{\otimes}N)$ با ضابطه‌ی

$$(\alpha \times \beta)_{(s,t)}(m \otimes n) = \alpha_s(m) \otimes \beta_t(n)$$

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.144699.1734

را در نظر می‌گیریم. در این‌صورت سه تایی $(M\bar{\otimes}N, G\times K, \alpha\times\beta)$ یک W^*-سیستم دینامیکی است.

قضیه ۴.۲. فرض کنید (M,G,α) و (N,K,β) دو W^*-سیستم دینامیکی باشند. در این‌صورت با توجه به W^*-سیستم دینامیکی $(M\bar{\otimes}N, G\times K, \alpha\times\beta)$، $M\bar{\otimes}N$ یک جبر فون-نویمان $G\times K$-میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر M، G-میانگین‌پذیر و N، K-میانگین‌پذیر باشد.

اثبات. فرض کنید $P : M \to \mathbb{C}$ و $Q : N \to \mathbb{C}$ به‌ترتیب حالت‌های G-پایا و K-پایا باشند. هم‌چنین $P\otimes Q : M\bar{\otimes}N \to \mathbb{C}$ با ضابطه‌ی $(P\otimes Q)(m\otimes n) = P(m)Q(n)$ تعریف شده باشد. سپس برای هر $(s,t)\in G\times K$ داریم

$$(s,t)\cdot(P\otimes Q) = s\cdot P\otimes t\cdot Q = P\otimes Q.$$

علاوه براین، به‌راحتی می‌توان دید $\|P\otimes Q\| = (P\otimes Q)(1\otimes 1) = 1$. بنابراین، $M\bar{\otimes}N$ جبر فون-نویمان $G\times K$-میانگین‌پذیر است. به‌عکس، فرض کنید $T : M\bar{\otimes}N \to \mathbb{C}$ یک حالت $G\times K$-پایا باشد. $P : M \to \mathbb{C}$ را با ضابطه‌ی $P(m) = T(m\otimes 1_N)$ تعریف می‌کنیم، که در آن 1_N عنصر واحد جبر فون-نویمان N است. اگر e_K عنصر واحد گروه K باشد، آنگاه برای هر $s\in G$ داریم

$$\begin{aligned}(s\cdot P)(m) = P(m\cdot s) = T(m\cdot s\otimes 1_N) &= ((s,e_K)\cdot T)(m\otimes 1_N)\\ &= T(m\otimes 1_N) = P(m).\end{aligned}$$

به‌طور مشابه می‌توانیم ثابت کنیم N نیز H-میانگین‌پذیر است. □

یادآوری می‌کنیم که $L^\infty(G\times G) = L^\infty(G)\bar{\otimes}L^\infty(G)$. هم‌چنین سه‌تایی $(L^\infty(G\times G), G, l\times l)$ با ضابطه‌ی $(l\times l)_s(f)(r,t) = f(s^{-1}r, s^{-1}t)$ یک W^*-سیستم دینامیکی است. بنابراین، نتیجه‌گیری زیر را داریم.

نتیجه ۵.۲. فرض کنید G یک گروه فشرده‌ی موضعی باشد. G میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر $L^\infty(G\times G)$ یک جبر فون-نویمان G-میانگین‌پذیر در W^*-سیستم دینامیکی $(L^\infty(G\times G), G, l\times l)$ باشد.

اثبات. اگر G میانگین‌پذیر باشد، آنگاه $L^\infty(G)$، G-میانگین‌پذیر است و با توجه به قضیه ۴.۲، $L^\infty(G\times G)$ یک جبر فون-نویمان $G\times G$-میانگین‌پذیر است. حال W^*-سیستم دینامیکی $(L^\infty(G\times G), G, \alpha)$ را با ضابطه‌ی

$$\alpha_s(f)(r,t) = (l_s\times l_s)f(r,t) = f(s^{-1}r, s^{-1}t), \qquad (s,r,t\in G)$$

در نظر می‌گیریم. از آنجا که $L^\infty(G\times G)$، $G\times G$-میانگین‌پذیر است حالت $P\in L^\infty(G\times G)^*$ وجود دارد که $(s,t)\cdot P = P$. حال برای هر $f\in L^\infty(G\times G)$ داریم

$$s\cdot P(f) = P(f\cdot s) = P(\alpha_{s^{-1}}(f)) = P((l_{s^{-1}}\times l_{s^{-1}})(f)) = (s,s)\cdot P(f) = P(f).$$

بنابراین، $L^\infty(G\times G)$، G-میانگین‌پذیر است. برعکس، فرض کنید $Q : L^\infty(G\times G) \to \mathbb{C}$ یک حالت G-پایا باتوجه به W^*-سیستم دینامیکی $(L^\infty(G\times G), G, l\times l)$ باشد. $P : L^\infty(G) \to \mathbb{C}$ را با ضابطه‌ی $P(f) = Q(f\otimes 1)$ تعریف می‌کنیم، که در آن $1\in L^\infty(G)$ تابع ثابت با مقدار ۱ است. در نتیجه برای هر $s\in G$ داریم

$$s\cdot P(f) = P(l_{s^{-1}}(f)) = Q((l_{s^{-1}}\times l_{s^{-1}})(f\otimes 1)) = s\cdot Q(f\otimes 1) = Q(f\otimes 1) = P(f).$$

بنابراین G یک گروه میانگین‌پذیر می‌شود. □

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.144699.1734

یادآوری می‌کنیم که نمایش منظم چپ یک گروه فشرده موضعی G نمایش $\lambda : G \to B(L^2(G))$ با ضابطه‌ی $s \mapsto \lambda_s$ است، که در آن $\lambda_s\xi(t) = \xi(s^{-1}t)$ برای هر $\xi \in L^2(G)$ تعریف می‌شود. جبر فون-نویمان گروهی $VN(G)$ به‌عنوان جبر فون-نویمان تولید شده توسط مجموعه‌ی $\{\lambda_s : s \in G\}$ روی فضای هیلبرت $L^2(G)$ تعریف می‌شود.

یادآوری می‌کنیم گروه فشرده‌ی موضعی G را میانگین‌پذیر داخلی گوییم هرگاه حالت $P \in L^\infty(G)^*$ به‌گونه‌ای موجود باشد که

$$P({}_{s^{-1}}f_s) = P(f) \qquad (f \in L^\infty(G),\ s \in G),$$

و در آن ${}_{s^{-1}}f_s \in L^\infty(G)$ با ضابطه‌ی ${}_{s^{-1}}f_s(t) = f(s^{-1}ts)$ برای تقریباً هر $t \in G$ تعریف می‌شود.

گزاره ۶.۲. فرض کنید G یک گروه فشرده‌ی موضعی باشد. اگر G میانگین‌پذیر داخلی باشد، آنگاه $VN(G)$، G-میانگین‌پذیر است.

اثبات. می‌دانیم که $B(L^2(G))$ با ضابطه‌ی $T \cdot s = \lambda_{s^{-1}}T\lambda_s$ برای هر $s \in G$ و $T \in B(L^2(G))$ یک G-مدول راست می‌شود. طبق فرض G میانگین‌پذیر داخلی است. لذا طبق [۲، گزاره ۳.۲]، یک حالت P بر $VN(G)$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $s \in G$ و $T \in VN(G)$ داریم $P(\lambda_{s^{-1}}T\lambda_s) = P(T)$. بنابراین، $P(T \cdot s) = P(T)$ و در نتیجه $VN(G)$، G-میانگین‌پذیر است. □

با توجه به اینکه هرگاه G میانگین‌پذیر باشد، در این‌صورت میانگین‌پذیر داخلی می‌شود نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۷.۲. فرض کنید G یک گروه فشرده‌ی موضعی باشد. اگر G میانگین‌پذیر باشد، آنگاه $VN(G)$ یک جبر فون-نویمان G-میانگین‌پذیر است.

نتیجه ۸.۲. هرگاه G گروهی متناهی یا آبلی باشد، آنگاه جمع مستقیم هر تعداد از $VN(G)$ یک جبر فون-نویمان G-میانگین‌پذیر می‌شود.

اثبات. هر گروه متناهی یا آبلی میانگین‌پذیر داخلی است. لذا طبق قضیه ۱.۲ و گزاره ۶.۲ نتیجه، به‌دست می‌آید. □

فرض کنید (M, G, α) یک W^*-سیستم دینامیکی باشد. یادآوری می‌شود α عمل میانگین‌پذیر داخلی نامیده می‌شود اگر تصویر $Q : VN(G)\bar{\otimes}M \to M$ با نرم یک وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$Q(s \cdot U) = s \cdot Q(U) \quad (U \in VN(G)\bar{\otimes}M,\ s \in G)$$

که در آن $s \cdot (f \otimes m) = \lambda_s f \lambda_{s^{-1}} \otimes s \cdot m$ و $s \cdot m = \alpha_s(m)$ برای هر $f \in VN(G)$ و $m \in M$؛ برای جزئیات بیشتر به [۷] مراجعه کنید. علاوه براین می‌توان گفت $(f \otimes m) \cdot s = \lambda_{s^{-1}} f \lambda_s \otimes m \cdot s$ و $Q(U \cdot s) = Q(U) \cdot s$.

قضیه ۹.۲. فرض کنید (M, G, α) یک W^*-سیستم دینامیکی و α عمل میانگین‌پذیر داخلی باشد. اگر M، G-میانگین‌پذیر باشد، آنگاه $VN(G)\bar{\otimes}M$ نیز G-میانگین‌پذیر است.

اثبات. فرض کنید $P : M \to \mathbb{C}$ یک حالت G-پایا و $Q : VN(G)\bar{\otimes}M \to M$ تصویری باشد که از میانگین‌پذیر داخلی بودن α نتیجه می‌شود. بنابراین برای هر $s \in G$ و $U \in VN(G)\bar{\otimes}M$ داریم

$$\begin{aligned} s \cdot (P \circ Q)(U) &= P(Q(U \cdot s)) \\ &= P(Q(U) \cdot s) \\ &= (P \circ Q)(U). \end{aligned}$$

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.144699.1734

در نتیجه، $VN(G)\bar{\otimes}M$ یک جبر فون–نویمان G–میانگین‌پذیر است. □

۳. G–میانگین‌پذیری برای ضرب آزاد جبرهای فون–نویمان G–میانگین‌پذیر

فرض کنید H_1 و H_2 دو فضای هیلبرت باشند و بردارهای یکه $\omega_i \in H_i$ که $i \in \{1,2\}$ را انتخاب می‌کنیم. نمادگذاری زیر را در نظر می‌گیریم:

$$H_i^\circ := \omega_i^\perp = \{\eta \in H_i | \langle \eta, \omega_i \rangle = 0\}.$$

در این‌صورت می‌توان گفت $H_i = \mathbb{C}\omega_i \oplus H_i^\circ$ و ضرب آزاد دو فضای هیلبرت به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} H_1 * H_2 &= \mathbb{C}\Omega \oplus H_1^\circ \oplus H_2^\circ \oplus (H_1^\circ \otimes H_2^\circ) \oplus (H_2^\circ \otimes H_1^\circ) \oplus (H_1^\circ \otimes H_2^\circ \otimes H_1^\circ) \oplus \cdots \\ &= \mathbb{C}\Omega \oplus \bigoplus_{n \geqslant 1} \left(\bigoplus_{i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_n} H_{i_1}^\circ \otimes \cdots \otimes H_{i_n}^\circ \right), \end{aligned}$$

که در آن Ω به‌عنوان بردار یکه و جمع‌وندهای این جمع مستقیم را به‌عنوان فضاهای متعامد بر یکدیگر در نظر می‌گیریم و برخی از روابط به‌صورت زیر است.

$$\langle \Omega, \Omega \rangle = 1 \quad \Omega \otimes \Omega = \Omega \quad \Omega \otimes v = v \quad \langle \Omega, v \rangle = 0 \quad (v \in H_{i_1}^\circ \otimes \cdots \otimes H_{i_n}^\circ)$$

فرض کنید دو دنباله $x = x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n$ و $y = y_1 \otimes y_2 \otimes \cdots \otimes y_m$ در $H_1 * H_2$ باشند. ضرب داخلی $\langle x, y \rangle$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

(i). اگر $n = m$ و همه‌ی x_iها و y_iها نظیربه‌نظیر در یک فضای یکسان باشند (یعنی هر دو از H_1° یا هر دو از H_2°)، آنگاه $\langle x, y \rangle = \Pi_{i=1}^n \langle x_i, y_i \rangle$.

(ii). در غیر این‌صورت $\langle x, y \rangle = 0$. برای $i \in \{1,2\}$، تعریف می‌کنیم $H(i) = C\Omega \oplus \bigoplus_{n \geq 1} \left(\bigoplus_{\substack{(i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_n) \\ i_1 \neq i}} \mathcal{H}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{i_n} \right)$.

در نتیجه یکریختی‌های طبیعی زیر وجود دارند:

$$H_1 * H_2 \simeq (\mathbb{C}\Omega \oplus H_i^\circ) \otimes H(i) \simeq H_i \otimes H(i).$$

در یکریختی فوق Ω به ω_i نظیر می‌شود و لذا می‌توان گفت $\omega_i \otimes \Omega$ به Ω نظیر می‌شود. حال عملگر یکانی $U_i : H_i \otimes H(i) \to H_1 * H_2$ برای هر $\eta \in H_i^\circ$ و $v \in H(i)$ به این‌صورت تعریف می‌کنیم که

$$U_i(\omega_i \otimes \Omega) = \Omega \quad U_i(\eta \otimes \Omega) = \eta \quad U_i(\omega_i \otimes v) = v \quad U_i(\eta \otimes v) = \eta \otimes v.$$

فرض کنید M_i به‌عنوان C^*–جبر روی H_i با نمایش $\pi_i = \mathrm{id}_{M_i}$ عمل کند؛ در این‌صورت نمایش $\lambda_i : M_i \to B(H_1 * H_2)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\lambda_i(m_i) = U_i(\pi_i(m_i) \otimes \mathrm{id}_{H(i)})U_i^* = U_i(m_i \otimes \mathrm{id}_{H(i)})U_i^*, \quad (m_i \in M_i,\ i \in \{1,2\}).$$

برای سادگی در نمادگذاری $\lambda_i(m_i)$ را با همان نماد m_i نشان می‌دهیم و می‌توان گفت ضرب آزاد دو C^*–جبر M_1 و M_2 که با نماد $M_1 * M_2$ آن‌را نشان می‌دهیم عبارت است از C^*–جبر تولید شده توسط مجموعه

$$B = \{m_1 m_2 \cdots m_n \mid n \in \mathbb{N}, m_j \in M_{i_j}, i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_n\} \subseteq B(H_1 * H_2),$$

که روابط زیر برقرار هستند:

$$m_1 \cdots m_{j-1} \left(\lambda m_j^{(0)} + \mu m_j^{(1)}\right) m_{j+1} \cdots m_n$$
$$= \lambda m_1 \cdots m_{j-1} m_j^{(0)} m_{j+1} \cdots m_n + \mu m_1 \cdots m_{j-1} m_j^{(1)} m_{j+1} \cdots m_n \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{C}).$$
$$m_j = 1 \Longrightarrow m_1 \cdots m_n = m_1 \cdots m_{j-1} m_{j+1} \cdots m_n.$$

از طرف دیگر ضرب آزاد نمایش‌های π_1 و π_2 که با نماد $\pi_1 * \pi_2$ آنرا نشان می‌دهیم عبارت است از

$$\pi_1 * \pi_2 : M_1 * M_2 \to B(H_1 * H_2), \quad m_{i_1} m_{i_2} \cdots m_{i_n} \mapsto \pi_{i_1}(m_{i_1}) \cdots \pi_{i_n}(m_{i_n}).$$

اگر $P_i : M_i \to \mathbb{C}$ تابعک‌های خطی کراندار با نرم ۱ باشند به‌طوری‌که $P_i(x) = \langle x\omega_i, \omega_i \rangle$، آنگاه ضرب آزاد آنها به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P = P_1 * P_2 : M_1 * M_2 \to \mathbb{C}, \quad P_1 * P_2(x) = \langle \pi_1 * \pi_2(x)\Omega, \Omega \rangle.$$

توجه کنید که P محدود به هر M_i همان P_i است.

ضرب آزاد جبرهای فون-نویمان M_1 و M_2 که با نماد $M_1 \bar{*} M_2$ نشان می‌دهیم به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$M_1 \bar{*} M_2 := (M_1 * M_2)'' = (\lambda_1(M_1) \cup \lambda_2(M_2))'' \subseteq B(H_1 * H_2).$$

برای جزئیات بیشتر به [۱۲] مراجعه کنید. این نکته نیز مشهور است که $*$-نمایش $\pi_1 * \pi_2$ قابل توسیع به یک نمایش نرمال $\pi_1 \bar{*} \pi_2 : M_1 \bar{*} M_2 \to B(H_1 * H_2)$ است به‌طوری‌که $\pi_1 * \pi_2(m_i)\Omega = m_i(\omega_i)$. هم‌چنین $P_1 * P_2$ قابل توسیع به یک تابعک خطی کراندار نرمال روی $M_1 \bar{*} M_2$ است که آن‌را با نماد $P_1 \bar{*} P_2$ نشان می‌دهیم.

فرض کنید (M_1, G, α_1) و (M_2, G, α_2) دو W^*-سیستم دینامیکی باشند. نگاشت $\alpha_1 \bullet \alpha_2 : G \to Aut(M_1 \bar{*} M_2)$ را با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌کنیم

$$(\alpha_1 \bullet \alpha_2)(s)(m_{i_1} m_{i_2} \cdots m_{i_n}) = \alpha_{i_1}(s)(m_{i_1}) \alpha_{i_2}(s)(m_{i_2}) \cdots \alpha_{i_n}(s)(m_{i_n}),$$

که در آن $m_{i_j} \in M_{i_j}$ و دو عضو متوالی در یک جبر فون-نویمان نیستند. از این به بعد برای سادگی در محاسبات نماد زیر را انجام می‌دهیم.

$$s \cdot (m_{i_1} m_{i_2} \cdots m_{i_n}) := (\alpha_1 \bullet \alpha_2)(s)(m_{i_1} m_{i_2} \cdots m_{i_n}) = s \cdot m_{i_1} s \cdot m_{i_2} \cdots s \cdot m_{i_n}.$$

لم ۱.۳. فرض کنید (M_1, G, α_1) و (M_2, G, α_2) دو W^*-سیستم دینامیکی باشند. در این‌صورت $(M_1 \bar{*} M_2, G, \alpha_1 \bullet \alpha_2)$ یک W^*-سیستم دینامیکی است.

اثبات. فرض کنید $s, t \in G$. در این‌صورت داریم

$$\begin{aligned}
(\alpha_1 \bullet \alpha_2)(st)(m_{i_1} m_{i_2} \cdots m_{i_n}) &= st \cdot (m_{i_1} m_{i_2} m_{i_n}) \\
&= (st) \cdot m_{i_1} (st) \cdot m_{i_2} \cdots (st) m_{i_n} \\
&= s \cdot (t \cdot m_{i_1}) s \cdot (t \cdot m_{i_2}) \cdots s \cdot (t \cdot m_{i_n}) \\
&= s \cdot (t \cdot m_{i_1} t \cdot m_{i_2} \cdots t \cdot m_{i_n}) \\
&= (\alpha_1 \bullet \alpha_2)(s)\big((\alpha_1 \bullet \alpha_2)(t)(m_{i_1} m_{i_2} \cdots m_{i_n})\big).
\end{aligned}$$

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.144699.1734

نمایش‌های همانی $\pi_1 = \mathrm{id}_{M_1} : M_1 \to B(H_1)$ و $\pi_2 = \mathrm{id}_{M_2} : M_2 \to B(H_2)$ را در نظر می‌گیریم. در این‌صورت C^*-نمایش $\pi_1 * \pi_2 : M_1 * M_2 \to B(H_1 * H_2)$ وجود دارد. بنابراین طبق [۴، قضیه ۴.۲.۷] نمایش $\pi_1 \bar{*} \pi_2 : M_1 \bar{*} M_2 \to B(H_1 * H_2)$ وجود دارد که نرمال است. تور $(s_j)_{j\in J} \subseteq G$ که $s_j \to s$ را در نظر می‌گیریم. بنابراین برای $i_k \in \{1,2\}$ داریم

$$\begin{aligned} s_j \cdot (m_{i_1} m_{i_2} \cdots m_{i_n}) &= (s_j \cdot m_{i_1} \cdots s_j \cdot m_{i_n}) = \lambda_{i_1}(s_j \cdot m_{i_1}) \cdots \lambda_{i_n}(s_j \cdot m_{i_n}) \\ &= U_{i_1}(\pi_{i_1}(s_j \cdot m_{i_1}) \otimes \mathrm{id}) U_{i_1}^* \cdots U_{i_n}(\pi_{i_n}(s_j \cdot m_{i_n}) \otimes \mathrm{id}) U_{i_n}^* \\ &= U_{i_1}((s_j \cdot m_{i_1}) \otimes \mathrm{id}) U_{i_1}^* \cdots U_{i_n}((s_j \cdot m_{i_n}) \otimes \mathrm{id}) U_{i_n}^*. \end{aligned}$$

حال با توجه به اینکه هر دو سیستم دینامیکی از نوع W^*- سیستم دینامیکی هستند، داریم

$$w^* - \lim_j s_j \cdot (m_{i_1} m_{i_2} \cdots m_{i_n}) = s \cdot m_{i_1} \cdots s \cdot m_{i_n} = s \cdot (m_{i_1} m_{i_2} \cdots m_{i_n}).$$

در نتیجه $(M_1 \bar{*} M_2, G, \alpha_1 \bullet \alpha_2)$ یک W^*- سیستم دینامیکی است. □

قضیه ۲.۳. فرض کنید (M_1, G, α_1) و (M_2, G, α_2) دو W^*-سیستم دینامیکی باشند. در این‌صورت $M_1 \bar{*} M_2$، G-میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر M_1 و M_2، G-میانگین‌پذیر باشند.

اثبات. فرض کنید P_1 و P_2 حالت‌های G-پایا بر روی M_1 و M_2 باشند. برای هر $s \in G$ و $m_{i_k} \in M_{i_k}$ که $i_k \in \{1,2\}$ داریم

$$s \cdot P_{i_k}(m_{i_k}) = P_{i_k}(m_{i_k} \cdot s) = P_{i_k}(m_{i_k}).$$

بنابراین طبق لم ۱.۳، می‌توان گفت $(M_1 \bar{*} M_2, G, \alpha_1 \bullet \alpha_2)$ یک W^*-سیستم دینامیکی است. لذا عمل

$$s \cdot (m_{i_1} \cdots m_{i_n}) := (\alpha_1 \bullet \alpha_2)_s (m_{i_1} \cdots m_{i_n})$$

خوش‌تعریف است. واضح است که $P_1 \bar{*} P_2$ یک حالت بر روی $M_1 \bar{*} M_2$ است. در نتیجه برای هر $s \in G$ و $m_{i_k} \in M_{i_k}$ که $i_k \in \{1,2\}$ داریم

$$\begin{aligned} s \cdot (P_1 \bar{*} P_2)(m_{i_1} \cdots m_{i_n}) &= P_1 \bar{*} P_2((m_{i_1} \cdots m_{i_n}) \cdot s) \\ &= P_{i_1}(m_{i_1} \cdot s) \cdots P_{i_n}(m_{i_n} \cdot s) \\ &= P_{i_1}(m_{i_1}) \cdots P_{i_n}(m_{i_n}) \\ &= (P_1 \bar{*} P_2)(m_{i_1} \cdots m_{i_n}). \end{aligned}$$

بنابراین، $M_1 \bar{*} M_2$ یک جبر فون-نویمان G-میانگین‌پذیر است. به‌عکس، اگر P یک حالت G-پایا بر روی $M_1 \bar{*} M_2$ باشد، آنگاه $P|_{M_1}$ و $P|_{M_2}$ حالت‌های G-پایا بر روی M_1 و M_2 هستند. □

فرض کنید $G * K$ حاصل‌ضرب آزاد دو گروه G و K باشد. در این‌صورت نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۳.۳. فرض کنید G یک گروه گسسته باشد. در این‌صورت $VN(G)$ و $VN(G * G)$ جبرهای فون-نویمان G-میانگین‌پذیر می‌شوند.

اثبات. W^*–سیستم دینامیکی $(VN(G),G,\alpha)$ را با ضابطه‌ی $\alpha_s(T)=\lambda_s T\lambda_{s^{-1}}$ در نظر می‌گیریم. با توجه به گسسته بودن G، می‌توان حالت $P\in\ell^\infty(G)^*$ را با ضابطه‌ی $P(f)=f(e)$ در نظر بگیریم که در آن e عنصر همانی G است. بنابراین G میانگین‌پذیر داخلی است. لذا طبق لم ۶.۲، $VN(G)$ یک جبر فون–نویمان G–میانگین‌پذیر است. حال طبق لم ۱.۳، $(VN(G)\bar{*}VN(G),G,\alpha\bullet\alpha)$ یک W^*–سیستم دینامیکی است و طبق قضیه ۲.۳، $VN(G)\bar{*}VN(G)$ یک جبر فون–نویمان G–میانگین‌پذیر است. از طرف دیگر طبق [۱۲] داریم $VN(G)\bar{*}VN(G)=VN(G*G)$ و در نتیجه حکم واضح می‌شود. □

نتیجه ۴.۳. فرض کنید G یک گروه فشرده موضعی باشد. در این‌صورت G میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر $L^\infty(G)\bar{*}L^\infty(G)$ در W^*–سیستم دینامیکی $(L^\infty(G)\bar{*}L^\infty(G),G,\ell\bullet\ell)$، یک جبر فون–نویمان G–میانگین‌پذیر است.

اثبات. با توجه به فرض حالت P روی $L^\infty(G)$ به گونه‌ایی وجود دارد که $P(\ell_s f)=P(f)$. لذا در W^*–سیستم دینامیکی $(L^\infty(G),G,\ell)$، جبر فون–نویمان $L^\infty(G)$، G–میانگین‌پذیر است. طبق قضیه ۲.۳، $L^\infty(G)\bar{*}L^\infty(G)$ یک جبر فون–نویمان G–میانگین‌پذیر است. هم‌چنین عکساین فرض نیز طبق قضیه ۲.۳، برقرار است.

□

تشکر و قدردانی

این تحقیق تا حدودی با کمک مالی از سوی پژوهشگاه دانش‌های بنیادی (IPM) (کد: ۱۴۰۴۴۶۰۳۱۸) پشتیبانی شده است.

مراجع

[1] M. E. B. Bekka, Amenable unitary representations of locally compact groups, *Invent. Math.*, **100** no. 2 (1990) 383–401.

[2] J. Crann and Z. Tanko, On the operator homology of the Fourier algebra and its *cb*-multiplier completion, *J. Funct. Anal.*, **273** (2017) no. 7 2521–2545.

[3] F. P. Greenleaf, *Invariant means on topological groups and their applications*, Van Nostrand Mathematical Studies, No. 16, Van Nostrand Reinhold Co., New York-Toronto-London, 1969.

[4] L. Bing-Ren, *Introduction to operator algebras*, Academia Sinica, Beijing, 1992. https://doi.org/10.1142/1635

[5] E. Hewitt and K. A. Ross, *Abstract harmonic analysis. Vol. I: Structure of topological groups Integration theory, group representations*, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **115**, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg; Academic Press, Inc., Publishers, New York, 1963.

[6] A. T. Lau and A. L. T. Paterson, Group amenability properties for von Neumann algebras, *Indiana Univ. Math. J.*, **55** no. 4 (2006) 1363–1388.

[7] A. McKee and R. Pourshahami, Amenable and inner amenable actions and approximation properties for crossed products by locally compact groups, *Canad. Math. Bull.*, **65** no. 2 (2022) 381–399.

[8] A. L. T. Paterson, *Amenability*, mathematical surveys and monographs, **29**, American mathematical society, Providence, RI, 1988.

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.144699.1734

[9] J.-P. Pier, *Amenable locally compact groups*, Pure and Applied Mathematics (New York), A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1984.

[10] R. Stokke, Quasi-central bounded approximate identities in group algebras of locally compact groups, *Illinois J. Math.*, **48** no. 1 (2004) 151–170.

[11] M. Takesaki, *Theory of operator algebras. II*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, **125**, Operator Algebras and Non-commutative Geometry, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[12] D. V. Voiculescu, K. J. Dykema and A. Nica, *Free random variables*, A noncommutative probability approach to free products with applications to random matrices, operator algebras and harmonic analysis on free groups. CRM Monograph Series, American Mathematical Society, Providence, RI, 1992.

محمدرضا قانعی
گروه ریاضی و آمار، دانشکده ریاضی و کامپیوتر خوانسار، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران
m.r.ghanei@khc.ui.ac.ir
mrg.ghanei@gmail.com

محمدرضا قانعی متولد شهریور ماه ۱۳۵۶ در شهر خمینی شهر است. وی در سال ۱۳۷۵ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی محض دانشگاه اصفهان شد و در سال ۱۳۸۱ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض دانشگاه صنعتی اصفهان شد. وی در سال ۱۳۸۸ وارد مقطع دکتری دانشگاه صنعتی اصفهان رشته ریاضی محض گرایش آنالیز هارمونیک شد.

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.144699.1734