Mathematics and Society
https://math-sci.ui.ac.ir
Mathematics and Society
ISSN (print): 2345-6493, ISSN (on-line): 2345-6507
Vol. 11 No. 1 (2026), pp. 81–108.

https://www.ui.ac.ir

EQUIVARIANT T-HARMONIC MAPS BETWEEN COMPACT RIEMANNIAN MANIFOLDS OF COHOMOGENEITY ONE

MEHRAN AMINIAN* AND MEHRAN NAMJOO

Abstract. In this paper, Urakawa's work on equivariant harmonic maps between compact Riemannian manifolds with codimension one is extended to equivariant T-harmonic maps between them. The Euler-Lagrange equation for the harmonicity of these maps has been transformed into their T-harmonicity. It is assumed that both the domain and target Riemannian manifolds have codimension one, meaning they both have isometry group actions with orbits of codimension one. Then, the ordinary differential equations for equivariant T-harmonic maps between them have been derived. As an application, T-harmonic maps from 2-dimensional flat tori into spheres have been constructed. All equivariant T-harmonic maps from a flat torus into a Riemannian manifold that admits a codimension one action of a compact Lie group have been identified by solving a system of ordinary differential equations.

1. Introduction

The aim of this paper is to develop works of Urakawa [28] on equivariant harmonic maps between compact Riemannian manifolds of cohomogeneity one, to equivariant T-harmonic maps between them, which is introduced in [1] (see also [2]), and also his reduction of the Euler-Lagrange equation on

Keywords: Harmonic map, tensor, cohomogeneity.
Article Type: Research Paper.
Communicated by Mohamad Reza Pouryayevali.
*Corresponding author.
Received: 04-12-2024, Accepted: 30-04-2025, Published Online: 21-10-2025.
Cite this article: M. Aminian and M. Namjoo, Equivariant T-harmonic maps between compact riemannian manifolds of cohomogeneity one, *Mathematics and Society*, **11** no. 1 (2026) 81–108. https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.143572.1714
.

harmonicity of these maps to T-harmonicity of them. As applications, we construct T-harmonic maps from 2-flat tori into spheres.

To construct T-harmonic maps, We assume that both domain and target Riemannian manifolds are of cohomogeneity 1; that is, both admit the isometry group actions having orbits of codimension 1. Then we derive the ordinary differential equations of the equivariant T-harmonic maps between them.

We recall the prerequisites from [1, 2, 27, 28]. Let (M, g) be a compact Riemannian manifold and K a compact Lie group acting effectively and isometrically on M with cohomogeneity one; that is, there is an orbit of codimension one, so $\dim(Kx) = \dim M - 1$ for some $x \in M$. The orbit space M/K is either a closed interval $[0, l]$ or a circle. Focusing on the interval case, we describe the structure of K and (M, g), following [28]. Let $c(t)$, $0 < t < l$, be a geodesic in M representing M/K. The isotropy subgroup at $c(t)$ is J_t, which is constant J for $t \in (0, l)$. The Lie algebra $\mathtt{k}$ of K admits an orthogonal decomposition relative to an $\mathrm{Ad}(K)$-invariant inner product $\langle , \rangle$:

$$\mathtt{k} = \mathfrak{j} \oplus \mathfrak{m},$$

where $\mathfrak{j}$ is the Lie algebra of J, and $\mathfrak{m}$ is $\mathrm{Ad}(J)$-invariant.

The map $K/J \times [0, l] \to M$ defined by $(kJ, t) \mapsto kc(t)$ is surjective; restricted to $K/J \times (0, l)$ it is smooth and its image $\mathring{M}$ is an open dense subset of M. On $\mathring{M}$, the metric can be expressed as

$$g = dt^2 + g_t,$$

where g_t is the K-invariant metric on the orbit $Kc(t)$. For $X, Y \in \mathfrak{m}$,

$$g_t(X_{c(t)}, Y_{c(t)}) = \alpha_t(X, Y),$$

with X extended to a vector field on M by $X_p = \frac{d}{ds}\big|_{s=0} \exp(sX) \cdot p$. The inner product α_t on $\mathfrak{m}$ is diagonal with respect to an orthonormal basis $\{X_i\}_{i=1}^{m-1}$:

$$\alpha_t(X_i, X_j) = f_i(t)^2 \delta_{ij}, \quad 1 \le i, j \le m - 1,$$

where $m = \dim M$. Finally, an orthonormal frame $\{e_i\}_{i=1}^{m}$ near $c(t)$ is constructed on

$$W := \{kc(s) \mid k \in U \subset \exp(\mathfrak{m}), |s - t| < \varepsilon\}$$

by

$$\begin{cases} (e_i)_{kc(s)} := f_i(s)^{-1} \tau_{k*} X_{ic(s)}, & 1 \le i \le m - 1, \\ (e_m)_{kc(s)} := \tau_{k*} \dot{c}(s), \end{cases} \tag{1.1}$$

where τ_k denotes the action of $k \in K$ on M, $\dot{c}(s)$ is the tangent vector to c at s, and U is a small neighborhood of e in $\exp(\mathfrak{m})$.

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.143572.1714

Definition 1.1. [1] *Let $T : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ be a smooth tensor on M, $\phi : (M, g) \to (N, h)$ be a smooth map. The differential operator $\overset{\mathbf{T}}{\Box}$ is defined as follow:*

$$\overset{\mathbf{T}}{\Box}(\phi) = \sum_{i=1}^{m} (\tilde{\nabla}_{Te_i} \phi_*(e_i) - \phi_*(\nabla_{Te_i} e_i)).$$

Theorem 1.2. [1] *The map ϕ is T-harmonic map if and only if*

$$\overset{\mathbf{T}}{\Box}(\phi) + \frac{1}{2}\phi_* \left(\mathrm{div}(T + T^t)\right) = 0\,. \tag{1.2}$$

The L.H.S of equation (1.2), is called Amin-tension field and denoted by

$$A_T(\phi) = \overset{\mathbf{T}}{\Box}(\phi) + \frac{1}{2}\phi_* \left(\mathrm{div}(T + T^t)\right),$$

which is a generalization of the notion introduced in [2].

2. Main Results

Consider compact Riemannian manifolds (M, g) and (N, h), each admitting effective, isometric cohomogeneity-one actions by compact Lie groups K and G, respectively. Their orbit spaces can be identified as intervals $M/K = [0, l]$ and $N/G = [0, \bar{l}]$, with corresponding geodesics $c(t)$ on M for $t \in [0, l]$ and $\bar{c}(r)$ on N for $r \in [0, \bar{l}]$. Denote the isotropy subgroups at these points by $J_t \subset K$ and $H_r \subset G$. For $0 < t < l$ and $0 < r < \bar{l}$, these stabilize to fixed groups J and H, respectively [28].

Let $A : K \to G$ be a Lie group homomorphism. A map $\phi : M \to N$ is called A-equivariant if it satisfies $\phi(kx) = A(k)\phi(x)$ for all $k \in K, x \in M$. Such an ϕ induces a function $r : [0, l] \to [0, \bar{l}]$ and a map $\Psi : [0, l] \to G$ with

$$\phi(c(t)) = \Psi(t)\bar{c}(r(t)), \quad t \in [0, l].$$

The A-equivariance condition requires

$$\Psi(t)^{-1} A(J_t)\Psi(t) \subset H_{r(t)}, \quad t \in [0, l]. \tag{2.1}$$

Conversely, any pair (r, Ψ) satisfying the condition (2.1) defines an A-equivariant map by

$$\phi(kc(t)) = A(k)\Psi(t)\bar{c}(r(t)), \quad k \in K,\ t \in [0, l].$$

Moreover, all A-equivariant maps from M to N arise in this manner.

Since G act isometrically on (M, g) , we get $\{\tau_{k*}e_i\}_{i=1}^{m}$ a local orthonormal frame field on M and

$$\overset{\mathbf{T}}{\Box}(\phi)(kx) = \sum_i (\tilde{\nabla}_{T\tau_{k*}e_i} \phi_*(\tau_{k*}e_i) - \phi_*(\nabla_{T\tau_{k*}e_i} \tau_{k*}e_i)).$$

Throughout the paper, assume that $T \circ \tau_{k*} = \tau_{k*} \circ T$. Therefore

$$\overset{\mathbf{T}}{\Box}(\phi)(kx) = \sum_i (\tilde{\nabla}_{\tau_{k*}Te_i} \phi_*(\tau_{k*}e_i) - \phi_*(\nabla_{\tau_{k*}Te_i} \tau_{k*}e_i)).$$

Since $\phi \circ \tau_k = \tau_{A(k)} \circ \phi,\ k \in K$, we have $\phi_* \circ \tau_{k*} = \tau_{A(k)*} \circ \phi_*$, and by isometry of $\tau_{A(k)}$,

$$\begin{aligned}\overset{\mathbf{T}}{\square}(\phi)(kx) &= \sum_i \left(\tilde{\nabla}_{\tau_{k*}Te_i}\phi_*\left(\tau_{k*}(e_i)\right) - \phi_*\tau_{k*}\nabla_{Te_i}e_i\right)\\ &= \sum_i \left(\tilde{\nabla}_{\tau_{k*}Te_i}\tau_{A(k)*}\left(\phi_*(e_i)\right) - \tau_{A(k)*}\circ\phi_*\nabla_{Te_i}e_i\right)\\ &= \tau_{A(k)*}\overset{\mathbf{T}}{\square}(\phi)(x),\end{aligned}$$

where $k \in K,\ x \in \mathring{M}$. Then we only have to calculate $\overset{\mathbf{T}}{\square}(\phi)$ at $c(t),\ 0 < t < l$.

To proceed, recall that the metrics g and h on M and N are described as follows: Let $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{k}$ and $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}$ be the subspaces invariant under $\mathrm{Ad}(J)$ and $\mathrm{Ad}(H)$, respectively, and orthogonal to $\mathfrak{j}$ and $\mathfrak{h}$ with respect to the inner products $\langle , \rangle$ on $\mathfrak{k}$ and $\mathfrak{g}$. Then

$$g = dt^2 + g_t,\ h = dr^2 + h_r,$$

and the inner products α_t, and β_r, on $\mathfrak{m}$ and $\mathfrak{n}$ are induced from g_t, and h_r. Choose orthonormal bases $\{X_j\}_{j=1}^{m-1}$ and $\{Y_a\}_{a=1}^{n-1}$ of $(\mathfrak{m}, \langle , \rangle)$ and $(\mathfrak{n}, \langle , \rangle)$ in such a way that

$$\alpha_t(X_i, X_j) = f_i(t)^2\delta_{ij} \quad \text{and} \quad \beta_r(Y_a, Y_b) = h_a(r)^2\delta_{ab}.$$

As in formula (1.1), define orthonormal frame fields $\{e_j\}_{j=1}^{m-1}$ and $\{\bar{e}_a\}_{a=1}^{n-1}$ on neighborhoods W and $\bar{W}$ of $c(t)$ and $\bar{c}(r)$, respectively. Then we obtain the following proposition.

Proposition 2.1. *Assume that the function $r(t) : [0, l] \to [0, \bar{l}]$ satisfies $r(0) = 0,\ r(l) = \bar{l}$, and $0 < r(t) < \bar{l}$ for $0 < t < l$. Then $\overset{\mathbf{T}}{\square}(\phi)$ which $\phi : (M, g) \to (N, h)$ is an A-equivariant map and smooth on $\mathring{M}$, can be described as*

$$\begin{aligned}\overset{\mathbf{T}}{\square}(\phi)(c(t)) &= \sum_{a=1}^{n-1}\sum_{i,j=1}^{m-1} T_{ij}(c(t))\Big(f_i(t)^{-1}f_j(t)^{-1}h_a(r)^{-1}\beta_r(Y_a, [V_i, U_j])\Big)\bar{e}_a\\ &+ \sum_{a=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1}(T_{jm} + T_{mj})\Big(\ \dot{r}(t)\ h_a(r)^{-2}f_j(t)^{-1}\big(\frac{d}{dr}h_a(r)\big) - f_j(t)^{-2}\big(\frac{d}{dt}f_j(t)\big)h_a(r)^{-1}\Big)\beta_r(Y_a, U_j)\bar{e}_a\\ &+ \sum_{a=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1} T_{mj}(c(t))h_a(r)^{-1}f_j(t)^{-1}\beta_r(Y_a, \frac{d}{dt}U_j)\bar{e}_a\\ &+ \Bigg(T_{mm}(c(t))\ddot{r}(t) + \sum_{i=1}^{m-1} T_{ii}\ f_i(t)^{-1}\frac{df_i}{dt}\dot{r}(t)\\ &- \sum_{a=1}^{n-1}\sum_{i,j=1}^{m-1} T_{ij}\ h_a(r)^{-3}\big(\frac{d}{dr}h_a(r)\big)f_i(t)^{-1}f_j(t)^{-1}\beta_r(Y_a, U_i)\beta_r(Y_a, U_j)\Bigg)\bar{e}_n\end{aligned}$$

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.143572.1714

$$+\sum_{i,j=1}^{m-1} T_{ij}\ f_i(t)^{-1} f_j(t)^{-1} \tau_{\Psi *}\left\{\frac{1}{2}[U_i,U_j]+V_r(U_i,U_j)-\left(\mathrm{Ad}(\Psi^{-1})A\Big(\frac{1}{2}[X_i,X_j]_{\mathfrak{m}}+U_t(X_i,X_j)\Big)\right)_{\mathfrak{n}}\right\}_{\bar{c}(r)},$$

for $r=r(t)$, $\Psi=\Psi(t)$, $0<t<l$. Here we put $T_{ij}=\langle T(e_j),e_i\rangle_g$ where $\{e_i\}_{i=1}^m$ is an orthonormal frame field given by equations (1.1), $A(X_j)=\mathrm{Ad}(\Psi)(U_j+V_j)$, $U_j\in\mathfrak{n}$, $V_j\in\mathfrak{h}$, and $X_{\mathfrak{n}}$ is the $\mathfrak{n}$-component of $X\in\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}$. Also $U_t(X,Y)\in\mathfrak{m}$ and $V_r(X',Y')\in\mathfrak{n}$ are defined by

$$2\alpha_t(U_t(X,Y),\ Z)=\alpha_t(X,\ [Z,Y]_{\mathfrak{m}})+\alpha_t([Z,X]_{\mathfrak{m}},\ Y),\qquad X,Y,Z\in\mathfrak{m};$$
$$2\beta_r(V_r(X',Y'),\ Z')=\beta_r(X',\ [Z',Y']_{\mathfrak{n}})+\beta_r([Z',X']_{\mathfrak{n}},\ Y'),\qquad X',Y',Z'\in\mathfrak{n}.$$

Now By Theorem 1.2 and Proposition 2.1 we get the following result.

Theorem 2.2. *(i) Assume that the function $r(t):[0,l]\to[0,\bar{l}]$ satisfies $r(0)=0$, $r(l)=\bar{l}$, and $0<r(t)<\bar{l}$ for $0<t<l$. Then the Amin-tension field $A_T(\phi)$ which $\phi:(M,g)\to(N,h)$ is an A-equivariant map and smooth on $\mathring{M}$, can be described as*

$$\begin{aligned}
A_T(\phi)(c(t)) &= \sum_{a=1}^{n-1}\Bigg[\sum_{i,j=1}^{m-1} T_{ij}(c(t))\Big(f_i(t)^{-1}f_j(t)^{-1}h_a(r)^{-1}\beta_r(Y_a,[V_i,U_j])\Big)\\
&+\sum_{j=1}^{m-1}(T_{jm}+T_{mj})\Big(\ \dot{r}(t)\ h_a(r)^{-2}f_j(t)^{-1}\big(\frac{d}{dr}h_a(r)\big)-f_j(t)^{-2}\big(\frac{d}{dt}f_j(t)\big)h_a(r)^{-1}\Big)\beta_r(Y_a,U_j)\\
&+\sum_{j=1}^{m-1} T_{mj}(c(t))h_a(r)^{-1}f_j(t)^{-1}\beta_r(Y_a,\frac{d}{dt}U_j)\\
&+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1}\Bigg(\Big(\frac{d}{dt}(T_{jm}+T_{mj})\Big)+\Big((T_{mj}+T_{jm})\ f_j(t)^{-1}\big(\frac{d}{dt}f_j(t)\big)\Big)+\sum_{i=1}^{m-1}f_i(t)^{-1}\frac{df_i}{dt}(T_{jm}+T_{mj})\\
&-\sum_{i,k=1}^{m-1}(T_{jk}+T_{kj})\,f_i(t)^{-2}f_k(t)^{-1}\alpha_t\left(U_t(X_i,X_i),X_k\right)\Bigg)h_a(r)^{-1}f_j(t)^{-1}\beta_r(Y_a,U_j)\Bigg]\bar{e}_a\\
&+\Bigg[T_{mm}(c(t))\ddot{r}(t)-\sum_{a=1}^{n-1}\sum_{i,j=1}^{m-1}T_{ij}\ h_a(r)^{-3}\big(\frac{d}{dr}h_a(r)\big)f_i(t)^{-1}f_j(t)^{-1}\beta_r(Y_a,U_i)\beta_r(Y_a,U_j)\\
&+\Bigg(\frac{d}{dt}T_{mm}+\sum_{i=1}^{m-1}f_i(t)^{-1}\frac{df_i}{dt}T_{mm}\\
&-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m-1}(T_{mj}+T_{jm})\,f_i(t)^{-2}f_j(t)^{-1}\alpha_t\left(U_t(X_i,X_i),X_j\right)\Bigg)\dot{r}(t)\Bigg]\bar{e}_n\\
&+\sum_{i,j=1}^{m-1}T_{ij}\ f_i(t)^{-1}f_j(t)^{-1}\tau_{\Psi *}\left\{\frac{1}{2}[U_i,U_j]+V_r(U_i,U_j)-\frac{1}{2}\left(\mathrm{Ad}(\Psi^{-1})A\Big([X_i,X_j]_{\mathfrak{m}}\Big)\right)_{\mathfrak{n}}\right\}_{\bar{c}(r)}.
\end{aligned}$$

(ii) In particular, ϕ is T-harmonic map if and only if the following equations satisfied

$$\sum_{i,j=1}^{m-1} T_{ij}(c(t))\Big(f_i(t)^{-1}f_j(t)^{-1}h_a(r)^{-1}\beta_r(Y_a,[V_i,U_j])\Big)$$
$$+\sum_{j=1}^{m-1}(T_{jm}+T_{mj})\Big(\ \dot r(t)\ h_a(r)^{-2}f_j(t)^{-1}\big(\frac{d}{dr}h_a(r)\big)-f_j(t)^{-2}\big(\frac{d}{dt}f_j(t)\big)h_a(r)^{-1}\Big)\beta_r(Y_a,U_j)$$
$$+\sum_{j=1}^{m-1}T_{mj}(c(t))h_a(r)^{-1}f_j(t)^{-1}\beta_r(Y_a,\frac{d}{dt}U_j)$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1}\Bigg(\Big(\frac{d}{dt}\left(T_{jm}+T_{mj}\right)\Big)+\Big(\left(T_{mj}+T_{jm}\right)\ f_j(t)^{-1}\big(\frac{d}{dt}f_j(t)\big)\Big)+\sum_{i=1}^{m-1}f_i(t)^{-1}\frac{df_i}{dt}\left(T_{jm}+T_{mj}\right)$$
$$-\sum_{i,k=1}^{m-1}\left(T_{jk}+T_{kj}\right)f_i(t)^{-2}f_k(t)^{-1}\alpha_t\left(U_t(X_i,X_i),X_k\right)\Bigg)h_a(r)^{-1}f_j(t)^{-1}\beta_r(Y_a,U_j)$$
$$+\sum_{i,j=1}^{m-1}T_{ij}\ f_i(t)^{-1}f_j(t)^{-1}h_a(r)^{-1}\beta_r\left(\frac{1}{2}[U_i,U_j]+V_r(U_i,U_j)-\frac{1}{2}\Big(\mathrm{Ad}(\Psi^{-1})A\Big([X_i,X_j]_{\mathfrak{m}}\Big)\Big)_{\mathfrak{n}},Y_a\right)=0,$$

for $a=1,\ldots,n-1$, and

$$T_{mm}(c(t))\ddot r(t)-\sum_{a=1}^{n-1}\sum_{i,j=1}^{m-1}T_{ij}\ h_a(r)^{-3}\big(\frac{d}{dr}h_a(r)\big)f_i(t)^{-1}f_j(t)^{-1}\beta_r(Y_a,U_i)\beta_r(Y_a,U_j)$$
$$+\left(\frac{d}{dt}T_{mm}+\sum_{i=1}^{m-1}f_i(t)^{-1}\frac{df_i}{dt}T_{mm}-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m-1}\left(T_{mj}+T_{jm}\right)f_i(t)^{-2}f_j(t)^{-1}\alpha_t\left(U_t(X_i,X_i),X_j\right)\right)\dot r(t)=0.$$

3. Summary of Proofs/Conclusions

From this point on, we will consider an A-equivariant map ϕ satisfying the condition

$$\phi(c(t))=\bar c(r(t)),\ \text{that is, } \Psi\equiv 1. \tag{3.1}$$

and classify all A-equivariant T-harmonic maps satisfying the condition (3.1) from a flat torus into a Riemannian manifold (N,h). Let $(M,g)=(T^2,g)$ be a flat torus where

$$K=SO(2)=\left\{\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix};\theta\in\mathbb{R}\right\}$$

acts cohomogeneity 1. Then $T^2=R/2\pi\mathbb{Z}\times R/T\mathbb{Z}$ with some $T>0$. The constant $T>0$ will be determined as the period of the periodic solution of some ODE. In this case, the isotropy subgroup J_t of K consists only of the identity,

$$\mathfrak{m}=\mathbb{R}X_1 \text{ with } X_1=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \text{ and } f_1(t)\equiv 1\,.$$

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.143572.1714

Let A be a homomorphism of $K = SO(2)$ with the compact Lie group G. Then any A-equivariant map ϕ with condition (3.1) of (T^2, g) into (N, h) is of the form

$$\phi(t,\,\theta) := \exp\theta A(X_1)\bar{c}(r(t)),$$

where $\bar{c}(r)$, $0 \le r \le \bar{l}$, is the representing geodesic of (N, h), and A satisfies always the condition (2.1).

Proposition 3.1. *Let A be a homomorphism $K = SO(2) \to G$ satisfying $A(X_1) = U_1 + V_1$, $U_1 \in \mathfrak{n}$, $V_1 \in \mathfrak{h}$, and $[U_1, V_1] = 0$. Then all the A-equivariant T-harmonic maps $\phi : (T^2, g) \to (N, h)$ with condition (3.1) which admit cohomogeneity 1 action of G are exhausted by all solutions $r(t)$ of ODE system*

$$\begin{aligned}&(T_{12}+T_{21})\,(c(t))\;\dot r(t)\;\,h_a(r)^{-1}\big(\frac{d}{dr}h_a(r)\big)\beta_r(Y_a,U_1)+\frac{d}{dt}\left((T_{12}+T_{21})\,(c(t))\right)\beta_r(Y_a,U_1)\\&+T_{11}(c(t))\;\,\beta_r\left(V_r(U_1,U_1),Y_a\right)=0,\end{aligned}$$

for $a = 1, \dots, n-1$, and

$$T_{22}(c(t))\ddot r(t)-\sum_{a=1}^{n-1}T_{11}(c(t))\;\,h_a(r)^{-3}\big(\frac{d}{dr}h_a(r)\big)\beta_r(Y_a,U_1)^2+\dot r(t)\frac{d}{dt}(T_{22}(c(t)))=0,$$

such that $\bar{c}(r(t))$ is periodic in t with period T, and the corresponding T-harmonic maps are given by

$$\phi(t,\,\theta) := \exp\theta U_1\bar{c}(r(t)).$$

Proof. Since $\exp\theta A(X_1) = \exp\theta U_1 \exp\theta V_1$ due to $[U_1, V_1] = 0$ and $\exp\theta V_1\bar{c}(r(t)) = \bar{c}(r(t))$, and by Theorem 2.2 we get the result. $\square$

Example 3.2. Consider the natural action of $G = SO(p+1)\times SO(n-p) \subset SO(n+1)$ on $\mathbb{S}^n$, (cf. [28]). In this case, the map ϕ in Proposition 3.1, is of the form

$$\phi(t,\,\theta)=\cos r(t)\exp\theta\begin{pmatrix}0 & -X^t\\ X & 0\end{pmatrix}\xi_1+\sin r(t)\exp\theta\begin{pmatrix}0 & -Y^t\\ Y & 0\end{pmatrix}\xi_{p+2}\in\mathbb{S}^n,$$

where $\{\xi_j\}_{j=1}^{n+1}$ is the standard basis of $\mathbb{R}^{n+1}$, and $X \in \mathbb{R}^p$ and $Y \in \mathbb{R}^{n-p-1}$ are arbitrary vectors such that both matrices

$$\exp\theta\begin{pmatrix}0 & -X^t\\ X & 0\end{pmatrix}\quad\text{and}\quad\exp\theta\begin{pmatrix}0 & -Y^t\\ Y & 0\end{pmatrix},$$

are periodic in θ with period 2π. The function $r(t)$ is a solution of ODE system

$$\begin{cases}\Big(-(T_{12}+T_{21})\,(c(t))\;\dot r(t)\;\,\sin r+\dfrac{d}{dt}\left((T_{12}+T_{21})\,(c(t))\right)\cos r\Big)\|X\|=0,\\ \Big((T_{12}+T_{21})\,(c(t))\;\dot r(t)\;\,\cos r+\dfrac{d}{dt}\left((T_{12}+T_{21})\,(c(t))\right)\sin r\Big)\|Y\|=0,\\ T_{22}(c(t))\ddot r(t)+T_{11}(c(t))\;\,\left(\|X\|^2-\|Y\|^2\right)\cos r\sin r+\dot r(t)\dfrac{d}{dt}(T_{22}(c(t)))=0,\end{cases}$$

such that $(\cos r(t), \sin r(t))$ is periodic in t with period T. Then these exhaust all the A-equivariant T-harmonic maps with the condition (3.1) of (T^2, g) into $(\mathbb{S}^n, \mathrm{can})$ with the $(SO(p+1)\times SO(n-p))$–action. In special case $T = fI$, where f is a smooth function on torus and $f(kc(t)) = f(c(t))$, the function $r(t)$ is a solution of ODE

$$f(t)\ddot{r}(t) + f(t)\left(\|X\|^2 - \|Y\|^2\right)\cos r \sin r + \dot{f}(t)\dot{r}(t) = 0.$$

The case f is a non zero constant, we recover [28, equation (3.6)].

Mehran Aminian

Department of Mathematics, Vali-e-Asr University of Rafsanjan, Rafsanjan, Iran

Email: mehran.aminian@vru.ac.ir

Mehran Namjoo

Department of Mathematics, Vali-e-Asr University of Rafsanjan, Rafsanjan, Iran

Email: namjoo@vru.ac.ir

 https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.143572.1714

ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۲۳۴۵-۶۴۹۳، شاپا(الکترونیکی): ۲۳۴۵-۶۵۰۷
جلد ۱۱، شماره ۱ (۱۴۰۵)، صص. ۸۱-۱۰۸

https://www.ui.ac.ir
https://math-sci.ui.ac.ir

نگاشت‌های Tـ همساز هموردا بین خمینه‌های ریمانی فشرده با نقص همگنی یک

مهران امینیان* و مهران نامجو

چکیده. در این مقاله، کارهای اوراکاوا روی نگاشت‌های همساز هموردا بین خمینه‌های ریمانی فشرده با نقص همگنی یک، به نگاشت‌های Tـ همساز هموردا بین آن‌ها گسترش داده شده است. معادله اویلر-لاگرانژ برای همسازی این نگاشت ها به Tـ همسازی آنها تبدیل شده است. فرض شده است که هر دو خمینه ریمانی دامنه و هدف از نقص همگنی یک برخوردارند، یعنی هر دو عمل گروه طولپایی دارند که مدارهایی با نقص بعد یک دارند. سپس معادلات دیفرانسیل معمولی نگاشت‌های Tـ همساز هموردا بین آن‌ها استخراج شده است. به‌عنوان کاربرد، نگاشت‌های Tـ همساز از چنبره‌های تخت ۲-بعدی به درون کره‌ها ساخته شده است. همه نگاشت‌های Tـ همساز هموردا از یک چنبره تخت به‌توی یک خمینه ریمانی که عمل نقص همگنی یک از گروه لی فشرده را می‌پذیرد، با حل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی شناسایی شده‌اند.

۱. مقدمه

در مطالعه هندسه دیفرانسیل، درک روابط پیچیده بین ساختارهای هندسی و رفتار نگاشت‌ها بین آن‌ها به مثابه تمرکز اصلی، باقی‌مانده است. یکی از حوزه‌های تحقیق در این زمینه، بررسی نگاشت‌های همساز است که نقاط بحرانی تابع انرژی تعریف شده، بر فضای نگاشت‌های هموار بین خمینه‌های ریمانی هستند. نگاشت‌های همساز که در کار برجسته‌ای از ایلز و سامپسون معرفی شدند [۱۰]، نه‌تنها بینش عمیقی در خصوص ویژگی‌های هندسی خمینه‌ها فراهم می‌کنند، بلکه در کاربردهای مختلفی در فیزیک و علم مواد مانند نظریه کریستال‌های مایع نیز ظاهر می‌شوند [۱۶]. یک رده به‌ویژه جالب از نگاشت‌های همساز، نگاشت‌های همساز هموردایی است که ویژگی‌های تقارن خمینه‌های مربوطه را در نظر می‌گیرند [۲۴، ۲۳، ۹].

نگاشت‌های همساز هموردا به‌طور طبیعی در مطالعه خمینه‌های دارای عمل گروهی ظاهر می‌شوند، به‌ویژه زمانی‌که این اعمال طولپا باشند. مفهوم نقص همگنی اشاره به نقص بعد مدارهای عمومی عمل گروهی است و نقش محوری در تحلیل این نگاشت‌ها ایفا می‌کند. فضاهای با نقص همگنی یک، جایی‌که عمل یک گروه لی‌فشرده منجر به مدارهای با نقص بعد یک می‌شود، چارچوب غنی‌ای برای کاوش ویژگی‌ها و رفتارهای نگاشت‌های همساز هموردا فراهم می‌کنند [۲۹، ۲۱، ۵].

کارهای بنیادی اوراکاوا، [۲۵، ۲۶، ۲۸، ۲۷]، زمینه‌ساز درک این نگاشت‌ها در بستر خمینه‌های ریمانی فشرده بوده است، جایی‌که فشردگی وجود نقاط بحرانی برای تابع انرژی را تضمین می‌کند. با تکیه بر این مفاهیم، معرفی نگاشت‌های Tـ همساز مفهوم کلاسیک همسازی را، [۱۰، ۲۲، ۳، ۱۲، ۱۵، ۱۴]، با وارد کردن یک میدان تانسوری هموار T به تعریف نگاشت‌های همساز گسترش می‌دهد [۱، ۲]. این تعمیم امکان استفاده از دامنه وسیع‌تری از کاربردها را فراهم کرده و درک عمیق‌تری از تعامل

عبارات و کلمات کلیدی: نگاشت همساز، تانسور، نقص همگنی.
نوع مقاله: پژوهشی
دبیرتخصصی رابط: محمدرضا پوریای‌ولی
تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۹/۱۴ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۲/۱۰ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۴/۰۷/۲۹
ارجاع به مقاله: م. امینیان و م. نامجو، نگاشت‌های Tـ همساز هموردا بین خمینه‌های ریمانی فشرده با نقص همگنی یک، ریاضی و جامعه، ۱۱ شماره ۱ (۱۴۰۵) ۸۱-۱۰۸.
https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.143572.1714 .

بین هندسه خمینه و رفتار نگاشت‌ها ارائه می‌دهد. نظریه نگاشت‌های T–همساز ویژگی‌های اساسی نگاشت‌های همساز استاندارد را، [۷، ۱۸، ۸]، حفظ می‌کند در حالی‌که انعطاف‌پذیری بیشتری را از طریق تأثیر میدان تانسوری معرفی می‌کند، که به مسائل جدید متنوعی منجر می‌شود.

در این مقاله، ما بر اساس نتایج بنیادی اوراکاوا درباره نگاشت‌های همساز هموردا، نظریه وی را، [۲۸]، با بررسی نگاشت‌های T–همساز بین خمینه‌های ریمانی فشرده با نقص همگنی یک، توسعه می‌دهیم. با تمرکز بر معادلات اویلر–لاگرانژ حاکم بر همسازی این نگاشت‌ها [۱۹، ۱۳، ۴، ۲۸]، در زمینه T–همسازی ارتباطی بین اصول حاکم بر این نوع نگاشت‌ها برقرار می‌کنیم. این رویکرد به ما اجازه می‌دهد تا از تقارن ذاتی اعمال گروهی بهره‌برداری کرده و معادلات دیفرانسیل مرتبط را به‌دست آوریم.

برای تسهیل ساخت نگاشت‌های T–همساز، فرض می‌کنیم که هر دو خمینه ریمانی دامنه و هم‌دامنه، دارای ساختار نقص‌همگنی یک هستند. این فرض به ما امکان می‌دهد تا از تقارن فراهم‌شده توسط اعمال گروهی بهره‌برداری کرده و معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم بر نگاشت‌های همساز را، [۵، ۲۰، ۱۱]، به معادلات دیفرانسیل معمولی کاهش دهیم. این معادلات دیفرانسیل معمولی که نگاشت‌های T–همساز هموردا را توصیف می‌کنند استخراج کرده و پیامدهای آن‌ها را در حالات خاص بررسی می‌کنیم.

به‌عنوان کاربردی مهم از این یافته‌های نظری، نگاشت‌های T–همساز هموردا از چنبره‌های تخت به کره‌ها می‌سازیم. این مثال نه تنها کاربردی بودن نتایج را نشان می‌دهد، بلکه ساختارهای هندسی غنی‌ای را که از تعامل بین انواع مختلف خمینه‌ها به‌وجود می‌آید نیز برجسته می‌کند، همان‌گونه که در نگاشت‌های همساز این موارد بررسی شده است. تعامل بین تخت بودن چنبره و خمیدگی کره زمینه حاصل‌خیزی برای کاوش بیشتر نگاشت‌های همساز و ویژگی‌های آن‌ها فراهم کرده است [۳۰، ۶، ۱۷].

در این مقاله، ابتدا با یادآوری پیش‌نیازهای لازم از کار اوراکاوا و مبحث نگاشت‌های T–همساز را آغاز می‌کنیم و بدین ترتیب چارچوب ریاضی مورد نیاز برای تحلیل خود را برقرار می‌سازیم. سپس معادلات دیفرانسیل معمولی که رفتار نگاشت‌های T–همساز هموردا بین خمینه‌های نقص همگنی یک را حاکم می‌کنند استخراج می‌کنیم. سپس نتایج خود را در مورد ساخت این نگاشت‌ها ارائه داده و به کاربرد آن‌ها در چنبره‌های تخت ۲–بعدی می‌پردازیم. نتایج ما نه تنها درک نظریه‌های موجود را عمیق‌تر می‌کنند، بلکه راه را برای تحقیقات آتی در خصوص ویژگی‌های هندسی خمینه‌ها و نگاشت‌های آن‌ها را هموار می‌سازند.

۲. پیش‌نیازها و مفاهیم اساسی

هدف از این مقاله، توسعه کارهای اوراکاوا [۲۸] روی نگاشت‌های همساز هموردا بین خمینه‌های ریمانی فشرده با نقص همگنی یک، به نگاشت‌های T–همساز هموردا بین آن‌ها است که در [۱] معرفی شده (همچنین ببینید [۲]). علاوه بر این، تبدیل معادله اویلر–لاگرانژ در همسازی این نگاشت‌ها به T–همسازی آنها نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد. به‌عنوان یک کاربرد، نگاشت‌های T–همساز از چنبره‌های تخت ۲–بعدی به درون کره‌ها را ساخته و بررسی می‌کنیم.

برای ساخت نگاشت‌های T–همساز، فرض می‌کنیم که هر دو خمینه ریمانی دامنه و هدف از نقص همگنی یک برخوردار باشند؛ به این معنی که هر دو عمل گروه طولپایی داشته باشند که دارای مدارهایی با نقص بُعد یک هستند. سپس ما معادلات دیفرانسیل معمولی نگاشت‌های T–همساز هموردا بین آن‌ها را استخراج می‌نماییم.

در ابتدا، مقدمات مورد نیاز از [۱، ۲، ۲۷، ۲۸] را یادآوری می‌کنیم. فرض کنید (M,g) یک خمینه ریمانی فشرده و K یک گروه‌لی فشرده باشد. گفته می‌شود که گروه K به‌صورت نقص همگنی یک بر روی (M,g) عمل می‌کند، اگر K به‌طور طولپا و مؤثر بر روی (M,g) عمل کند که دارای مدارهایی با نقص بعد یک باشد؛ یعنی، یک نقطه x در M وجود دارد به‌طوری‌که $\dim(Kx) = \dim M - ۱$ باشد. فضای مداری M/K از K بر روی M، بازه بسته $[۰,l]$ یا دایره است. در این مقاله، ما بر مورد اول یعنی $M/K = [۰,l]$ تمرکز و مثالی از [۲۸] را دنبال می‌نماییم.

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.143572.1714

یک همو‌ستار آفین روی خمینه هموار M، نگاشتی است

$$\nabla:\ \mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M)\to\mathcal{X}(M),$$

که در خواص پایین صدق کند:

$$\begin{aligned}
&\text{i)}\quad \nabla_{fX+lY}Z=f\nabla_X Z+l\nabla_Y Z,\\
&\text{ii)}\quad \nabla_X(Y+Z)=\nabla_X Y+\nabla_X Z,\\
&\text{iii)}\quad \nabla_X(fY)=f\nabla_X Y+X(f)Y,
\end{aligned}$$

که $X,Y,Z\in\mathcal{X}(M)$ (میدان‌های برداری هموار روی خمینه M) و f,l، توابعی هموار روی M هستند. هر خمینه ریمانی (M,g) را می‌توان به یک همو‌ستار آفین یکتا (لوی–چویتا [1]) مجهز کرد به‌طوری‌که آن متقارن و سازگار با متریک ریمانی g باشد. یعنی دارای خواص پایین باشد:

$$\begin{aligned}
&\text{iv)}\quad \nabla_X Y-\nabla_Y X=[X,Y],\\
&\text{v)}\quad Z\langle X,Y\rangle=\langle\nabla_Z X,Y\rangle+\langle X,\nabla_Z Y\rangle.
\end{aligned}$$

فرض کنید $c(t)$، $0\le t\le l$، ژئودزی (M,g) باشد که فضای مدار M/K را نشان می‌دهد، یعنی اینکه $\nabla_{\dot c(t)}\dot c(t)=0$ برای هر t متعلق به فضای مداری $M/K=[0,l]$، که ∇ همو‌ستار لوی–چویتا (M,g) است. فرض کنید J_t، زیرگروه همسان‌گردی K در $c(t)$ باشد، یعنی برای هر $k\in J_t$، $kc(t)=c(t)$. پس، برای $0<t<l$، زیرگروه‌های J_t همان گروه J هستند. جبر لی $\mathfrak{k}$ از K با ضرب داخلی $\langle,\rangle$ را $\mathrm{Ad}(K)$–ناوردا گویند هرگاه برای هر $k\in K$ و $X,Y\in\mathfrak{k}$

$$\langle \mathrm{Ad}_k X,\mathrm{Ad}_k Y\rangle=\langle X,Y\rangle.$$

جبر لی $\mathfrak{k}$ از K می‌تواند به‌طور متعامد نسبت به ضرب داخلی $\mathrm{Ad}(K)$–ناوردا $\langle,\rangle$ روی $\mathfrak{k}$ به‌صورت

$$\mathfrak{k}=\mathfrak{j}\oplus\mathfrak{m}$$

تجزیه شود که در آن $\mathfrak{j}$ جبر لی J و $\mathfrak{m}$ یک زیرفضای $\mathrm{Ad}(J)$–ناوردا از $\mathfrak{k}$ است.

نگاشت $K/J\times[0,l]\ni(kJ,t)\to kc(t)\in M$ یک نگاشت پوشا است، و تحدیدش به $K/J\times(0,l)$ هموار است و تصویر آن از $K/J\times(0,l)$، که با $\mathring{M}$ نشان داده می‌شود، باز و چگال در M است. متریک g روی M می‌تواند روی $\mathring{M}$ به‌صورت

$$g=dt^2+g_t$$

بیان شود. در اینجا g_t، متریک K–ناوردا روی مدار $Kc(t)$، $0<t<l$، به‌صورت

$$g_t(X_{c(t)},Y_{c(t)})=\alpha_t(X,Y),\qquad X,Y\in\mathfrak{m},$$

داده شده است، که برای $X\in\mathfrak{m}$، یک میدان برداری روی M که با همان حرف X نشان داده می‌شود، به‌صورت

$$X_p=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\exp tX.p\quad \text{برای } p\in M,$$

[1] Levi–Civita

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.143572.1714

تعریف می‌کنیم که نگاشت نمایی $\exp tX$ زیرگروه یک پارامتری یکتا از K می‌باشد که بردار مماس آن در همانی X است. فرض می‌کنیم ضرب داخلی α_t روی $\mathfrak{m}$ به‌صورت

$$\alpha_t(X_i, X_j) = f_i(t)^{۲}\delta_{ij}, \quad ۱ \leq i, j \leq m - ۱,$$

باشد که در آن $m = \dim M$. اینجا $\{X_i\}_{i=۱}^{m-۱}$ یک پایه یکه متعامد از $(\mathfrak{m}, \langle , \rangle)$ است.

ما همچنین یک میدان کنج یکه‌متعامد $\{e_i\}_{i=۱}^{m-۱}$ را در همسایگی W از $c(t)$، $۰ < t < l$، به‌صورت زیر ارائه می‌دهیم:

$$W := \{kc(s); k \in U \subset \exp(\mathfrak{m}),\ |s - t| < \varepsilon\};$$

$$\begin{cases} (e_i)_{kc(s)} := f_i(s)^{-۱}\tau_{k*}X_{ic(s)}, & ۱ \leq i \leq m - ۱, \\ (e_m)_{kc(s)} := \tau_{k*}\dot{c}(s), \end{cases} \tag{۱}$$

که در آن τ_k، $k \in K$، عمل K بر روی M، $\dot{c}(s)$ بردار مماس $c(s)$، و U یک همسایگی کوچک از e در $\exp(\mathfrak{m})$ است.

تعریف ۱.۲. [۱] فرض کنید $T : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ یک تانسور هموار روی M، $\phi : M \to N$ یک نگاشت هموار بین خمینه‌های ریمانی (M, g) و (N, h) به‌ترتیب با هموستارهای لوی–چویتا ∇ و $\overline{\nabla}$ باشد و همچنین هموستار القائی روی کلاف برگشتی ϕ^*TN را با $\tilde{\nabla}$ نمایش دهید. عملگر دیفرانسیل $\overset{\mathbf{T}}{\Box}$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\overset{\mathbf{T}}{\Box}(\phi) = \sum_{i=۱}^{m}(\tilde{\nabla}_{Te_i}\phi_*(e_i) - \phi_*(\nabla_{Te_i}e_i))$$

که $\{e_i\}_{i=۱}^{m}$ یک کنج موضعی یکه‌متعامد روی M است.

یک تابعک T–انرژی روی یک حوزه فشرده $\Omega \subset M$ به شکل پایین تعریف می‌شود:

$$E_T(\phi) = \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{m}\int_{\Omega}\langle d\phi(Te_i), d\phi(e_i)\rangle_h \, \mathrm{d}\Omega\,.$$

نگاشت ϕ یک نگاشت T–همساز نامیده می‌شود اگر نقطه بحرانی تابعک T–انرژی باشد. این مطلب بدین معناست که برای هر وردش $\{\phi_t\}_{t\in I}$ از ϕ با تکیه‌گاه در یک حوزه فشرده Ω معادله پایین برقرار باشد

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=۰} E_T(\phi_t) = ۰\,.$$

قضیه ۲.۲. [۱] نگاشت ϕ یک نگاشت T–همساز است اگر و فقط اگر

$$\overset{\mathbf{T}}{\Box}(\phi) + \frac{۱}{۲}\phi_*\left(\operatorname{div}(T + T^t)\right) = ۰. \tag{۲}$$

سمت چپ معادله (۲)، به‌عنوان میدان تنش–امین شناخته شده و به‌صورت

$$A_T(\phi) = \overset{\mathbf{T}}{\Box}(\phi) + \frac{۱}{۲}\phi_*\left(\operatorname{div}(T + T^t)\right),$$

نشان داده می‌شود که یک تعمیم از مفهوم معرفی شده در [۲] است.

۳. بیانیه اصلی: نگاشت‌های $\boldsymbol{T}$ـهمساز هموردا

در این قسمت دو خمینه ریمانی فشرده (M,g) و (N,h) داریم که به‌ترتیب طولپا و مؤثر، عمل نقص همگنی یک را از گروه‌های لی فشرده K و G می‌پذیرند. فضاهای مداری $M/K=[\circ,l]$ و $N/G=[\circ,\bar{l}]$ را در نظر بگیرید و همچنین ژئودزی‌های $c(t)$ $(\circ\leq t\leq l)$ و $\bar{c}(r)$ $(\circ\leq r\leq \bar{l})$ را به‌ترتیب از (M,g) و (N,h) که نمایانگر فضاهای مداری M/K و N/G هستند، ثابت درنظر بگیرید. در این میان، با J_t و H_r زیرگروه‌های همسانگردی از K و G را در $c(t)$ و $\bar{c}(r)$ نشان دهید. سپس بر اساس [۲۸]، برای $\circ<t<l$ و $\circ<r<\bar{l}$، J_t و H_r به‌ترتیب گروه‌های یکسان J و H هستند.

فرض کنید $A:K\to G$ یک همریختی گروه لی باشد. یک نگاشت $\phi:M\to N$، Aـهموردا است اگر $\phi(kx)=A(k)\phi(x)$، $k\in K,\ x\in M$. در این‌صورت، برای هر نگاشت Aـهموردا $\phi:M\to N$، یک تابع $r:[\circ,l]\to[\circ,\bar{l}]$ و یک نگاشت $\Psi:[\circ,l]\to G$ وجود دارد به‌طوری‌که $\phi(c(t))=\Psi(t)\bar{c}(r(t))$، $t\in[\circ,l]$. Aـهمورداییِ ϕ دلالت بر

$$\Psi(t)^{-1}A(J_t)\Psi(t)\subset H_{r(t)},\quad t\in[\circ,l], \tag{۳}$$

دارد. برعکس، تابع $r:[\circ,l]\to[\circ,\bar{l}]$ و یک نگاشت $\Psi:[\circ,l]\to G$ با (۳)، داده شده است. نگاشت Aـهموردا $\phi:M\to N$ را داریم که توسط

$$\phi(kc(t))=A(k)\Psi(t)\bar{c}(r(t)),\quad k\in K, t\in[\circ,l],$$

تعریف می‌شود و هر نگاشت Aـهموردا از M به N را می‌توان به این‌صورت به دست آورد.

از آنجایی‌که K به‌صورت طول‌پا بر روی (M,g) عمل می‌کند، می‌توانیم یک میدان کنج یکه‌متعامد موضعی $\{\tau_{k*}e_i\}_{i=1}^{m}$ را بر روی M به دست آوریم و بنابراین

$$\overset{\mathbf{T}}{\Box}(\phi)(kx)=\sum_i(\tilde{\nabla}_{T\tau_{k*}e_i}\phi_*(\tau_{k*}e_i)-\phi_*(\nabla_{T\tau_{k*}e_i}\tau_{k*}e_i)).$$

در طول مقاله، فرض کنید $T\circ\tau_{k*}=\tau_{k*}\circ T$، از این‌رو

$$\overset{\mathbf{T}}{\Box}(\phi)(kx)=\sum_i(\tilde{\nabla}_{\tau_{k*}Te_i}\phi_*(\tau_{k*}e_i)-\phi_*(\nabla_{\tau_{k*}Te_i}\tau_{k*}e_i)).$$

از آنجایی‌که $\phi\circ\tau_k=\tau_{A(k)}\circ\phi,\ k\in K$، داریم $\phi_*\circ\tau_{k*}=\tau_{A(k)*}\circ\phi_*$، و با طولپایی $\tau_{A(k)}$، نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned}\overset{\mathbf{T}}{\Box}(\phi)(kx)&=\sum_i\left(\tilde{\nabla}_{\tau_{k*}Te_i}\phi_*\left(\tau_{k*}(e_i)\right)-\phi_*\tau_{k*}\nabla_{Te_i}e_i\right)\\&=\sum_i\left(\tilde{\nabla}_{\tau_{k*}Te_i}\tau_{A(k)*}\left(\phi_*(e_i)\right)-\tau_{A(k)*}\circ\phi_*\nabla_{Te_i}e_i\right)\\&=\tau_{A(k)*}\overset{\mathbf{T}}{\Box}(\phi)(x),\end{aligned}$$

که $k\in K,\ x\in\mathring{M}$. پس فقط باید $\overset{\mathbf{T}}{\Box}(\phi)$ را در $c(t)$، $\circ<t<l$ محاسبه کنیم. برای انجام این‌کار، به یاد بیاوریم که متریک‌های g و h روی M و N به‌شرح زیر توصیف می‌شوند: اجازه دهید $\mathfrak{m}$ و $\mathfrak{n}$ زیرفضاهای $\mathfrak{k}$ و $\mathfrak{g}$ باشند که تحت $\mathrm{Ad}(J)$ و $\mathrm{Ad}(H)$، ناوردا هستند و متعامد به $\mathfrak{j}$ و $\mathfrak{h}$ نسبت به ضرب داخلی $\langle,\rangle$ به‌ترتیب در $\mathfrak{k}$ و $\mathfrak{g}$ می‌باشند. سپس

$$g=dt^{۲}+g_t,\ h=dr^{۲}+h_r,$$

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.143572.1714

و ضرب داخلی α_t، و β_r، در $\mathfrak{m}$ و $\mathfrak{n}$ از g_t، و h_r القا می‌شوند. پایه‌های یکه‌متعامد $\{X_j\}_{j=1}^{m-1}$ و $\{Y_a\}_{a=1}^{n-1}$ از $(\mathfrak{m},\langle,\rangle)$ و $(\mathfrak{n},\langle,\rangle)$ را به گونه‌ای انتخاب کنید که:

$$\alpha_t(X_i,X_j)=f_i(t)^2\delta_{ij} \quad \text{و} \quad \beta_r(Y_a,Y_b)=h_a(r)^2\delta_{ab}.$$

مانند فرمول (۱)، میدان‌های کنج یکه‌متعامد $\{e_j\}_{j=1}^{m-1}$ و $\{\bar{e}_a\}_{a=1}^{n-1}$ به‌ترتیب در همسایگی‌های W و $\bar{W}$ از $c(t)$ و $\bar{c}(r)$ را تعریف کنید. در این‌صورت گزاره زیر را به‌دست می‌آوریم.

گزاره ۱.۳. فرض کنید که تابع $r(t):[0,l]\to[0,\bar{l}]$ شرط $r(0)=0,\ r(l)=\bar{l}$، برای $0<t<l$ برآورده کند. آنگاه $\overset{\mathbf{T}}{\square}(\phi)$ که $\phi:(M,g)\to(N,h)$ یک نگاشت A–هموردا و هموار روی $\mathring{M}$ است، می‌تواند به‌صورت پایین توصیف شود:

$$\begin{aligned}
\overset{\mathbf{T}}{\square}(\phi)(c(t)) &= \sum_{a=1}^{n-1}\sum_{i,j=1}^{m-1} T_{ij}(c(t))\Big(f_i(t)^{-1}f_j(t)^{-1}h_a(r)^{-1}\beta_r(Y_a,[V_i,U_j])\Big)\bar{e}_a\\
&+\sum_{a=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1}(T_{jm}+T_{mj})\Big(\ \dot{r}(t)\ h_a(r)^{-2}f_j(t)^{-1}\big(\frac{d}{dr}h_a(r)\big)-f_j(t)^{-2}\big(\frac{d}{dt}f_j(t)\big)h_a(r)^{-1}\Big)\beta_r(Y_a,U_j)\bar{e}_a\\
&+\sum_{a=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1}T_{mj}(c(t))h_a(r)^{-1}f_j(t)^{-1}\beta_r(Y_a,\frac{d}{dt}U_j)\bar{e}_a\\
&+\Bigg(T_{mm}(c(t))\ddot{r}(t)+\sum_{i=1}^{m-1}T_{ii}\ f_i(t)^{-1}\frac{df_i}{dt}\dot{r}(t)\\
&-\sum_{a=1}^{n-1}\sum_{i,j=1}^{m-1}T_{ij}\ h_a(r)^{-3}\big(\frac{d}{dr}h_a(r)\big)f_i(t)^{-1}f_j(t)^{-1}\beta_r(Y_a,U_i)\beta_r(Y_a,U_j)\Bigg)\bar{e}_n\\
&+\sum_{i,j=1}^{m-1}T_{ij}\ f_i(t)^{-1}f_j(t)^{-1}\tau_{\Psi*}\left\{\frac{1}{2}[U_i,U_j]+V_r(U_i,U_j)-\Big(\mathrm{Ad}(\Psi^{-1})A\Big(\frac{1}{2}[X_i,X_j]_{\mathfrak{m}}+U_t(X_i,X_j)\Big)\Big)_{\mathfrak{n}}\right\}_{\bar{c}(r)},
\end{aligned}$$

برای $r=r(t)$، $\Psi=\Psi(t)$، $0<t<l$. در اینجا قرار می‌دهیم $T_{ij}=\langle T(e_j),e_i\rangle_g$ که $\{e_i\}_{i=1}^{m}$ یک میدان کنج یکه‌متعامد داده شده توسط معادلات (۱) است، $A(X_j)=\mathrm{Ad}(\Psi)(U_j+V_j)$، $U_j\in\mathfrak{n}$، $V_j\in\mathfrak{h}$، و $X_{\mathfrak{n}}$ مؤلفه–$\mathfrak{n}$ از $X\in\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}$ هست. همچنین $U_t(X,Y)\in\mathfrak{m}$ و $V_r(X',Y')\in\mathfrak{n}$ با رابطه پایین تعریف شده‌اند:

$$\begin{aligned}
2\alpha_t(U_t(X,Y),\ Z)&=\alpha_t(X,\ [Z,Y]_{\mathfrak{m}})+\alpha_t([Z,X]_{\mathfrak{m}},\ Y), && X,Y,Z\in\mathfrak{m};\\
2\beta_r(V_r(X',Y'),\ Z')&=\beta_r(X',\ [Z',Y']_{\mathfrak{n}})+\beta_r([Z',X']_{\mathfrak{n}},\ Y'), && X',Y',Z'\in\mathfrak{n}.
\end{aligned}$$

اثبات. با فرض $\circ < r(t) < \bar{l}$ برای $\circ < t < l$ میدان‌های کنج یکه‌متعامد $\{\bar{e}_a\}_{a=1}^{n}$ حول $\bar{c}(r(t))$ را در نظر بگیرید. در ابتدا محاسبه کنیم $h(\bar{e}_a, \phi_* e_j)$ حول $c(t)$، $\circ < t < l$، در معادله

$$\tilde{\nabla}_{Te_j}\phi_* e_j = \sum_{a=1}^{n}\left(\left(\nabla_{Te_j} h(\bar{e}_a, \phi_* e_j)\right)\bar{e}_a + h(\bar{e}_a, \phi_* e_j)\tilde{\nabla}_{Te_j}\bar{e}_a\right). \tag{۴}$$

برای $k \in U \subset \exp(\mathfrak{m})$، می‌نویسیم

$$A(k) = \Psi(t)n(k)h(k)\Psi(t)^{-1}$$

با $n(k) \in \exp(\mathfrak{n})$، $h(k) \in H$. سپس از لم‌های پایین استفاده می‌کنیم.

لم ۲.۳. [۲۸] برای $\Psi = \Psi(t)$، $r = r(t)$:

(i)

$$\phi_* e_{jkc(t)} = \begin{cases} f_j(t)^{-1}\tau_{\Psi *}\tau_{n(k)*}\mathrm{Ad}(h(k))U_{j\bar{c}(r)}, & 1 \leq j \leq m-1,\\ \dot{r}(t)\tau_{\Psi *}\tau_{n(k)*}\dot{\bar{c}}(r), & j = m.\end{cases}$$

(ii)

$$\bar{e}_{a\phi(kc(t))} = \begin{cases} h_a(r)^{-1}\tau_{\Psi *}\tau_{n(k)*}Y_{a\bar{c}(r)}, & 1 \leq a \leq n-1,\\ \tau_{\Psi *}\tau_{n(k)*}\dot{\bar{c}}(r), & a = n.\end{cases}$$

(iii)

$$h(\bar{e}_a, \phi_* e_j)(kc(t)) = \begin{cases} h_a(r)^{-1}f_j(t)^{-1}\beta_r(Y_a, \mathrm{Ad}(h(k))U_j), & 1 \leq j \leq m-1,\ 1 \leq a \leq n-1,\\ \circ, & j = m,\ 1 \leq a \leq n-1 \text{ یا } 1 \leq j \leq m-1,\ a = n,\\ \dot{r}(t), & j = m,\ a = n.\end{cases}$$

به‌ویژه برای $1 \leq j \leq m-1$، $1 \leq a \leq n-1$، چون $\beta_r(Y_a, U_j) = \langle Y_a, U_j\rangle_{\mathfrak{n}} h_a(r)^{2}$،

$$\begin{aligned} h(\bar{e}_a, \phi_* e_j)(c(t)) &= h_a(r)^{-1}f_j(t)^{-1}\beta_r(Y_a, U_j)\\ &= h_a(r)f_j(t)^{-1}\langle Y_a, U_j\rangle_{\mathfrak{n}}. \end{aligned} \tag{۵}$$

لم ۳.۳. [۲۸]

(i) برای $1 \leq i, j \leq m-1$،

$$\left(\nabla_{e_i} h(\bar{e}_a, \phi_* e_j)\right)(c(t)) = \begin{cases} f_i(t)^{-1}f_j(t)^{-1}h_a(r)^{-1}\beta_r(Y_a, [V_i, U_j]), & 1 \leq a \leq n-1,\\ \circ, & a = n.\end{cases}$$

(ii) برای $j = m$، $1 \leq i \leq m-1$,

$$\left(\nabla_{e_i} h(\bar{e}_a, \phi_* e_m)\right)(c(t)) = \circ,\ 1 \leq a \leq n.$$

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.143572.1714

(iii) برای $j=m$، $i=m,$

$$\left(\nabla_{e_m}h(\bar{e}_a,\phi_*e_m)\right)(c(t))=\begin{cases}0, & 1\leq a\leq n-1,\\ \ddot{r}(t), & a=n.\end{cases}$$

(iv) برای $i=m$، $1\leq j\leq m-1,$

$$\left(\nabla_{e_m}h(\bar{e}_a,\phi_*e_j)\right)(c(t))\underset{(5)}{=}\begin{cases}\Big(\dot{r}(t)(\frac{d}{dr}h_a(r))h_a(r)^{-2}f_j(t)^{-1}-h_a(r)^{-1}(\frac{d}{dt}f_j(t))f_j(t)^{-2}\Big)\beta_r(Y_a,U_j)\\ \qquad +h_a(r)^{-1}f_j(t)^{-1}\beta_r(Y_a,\frac{d}{dt}U_j),\ 1\leq a\leq n-1,\\ 0,\ a=n.\end{cases}$$

بنابراین در $c(t)$، برای $1\leq j\leq m-1$،

$$\sum_{a=1}^{n}\left(\nabla_{Te_j}h(\bar{e}_a,\phi_*e_j)\right)\bar{e}_a=\sum_{a=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}T_{ij}\left(\nabla_{e_i}h(\bar{e}_a,\phi_*e_j)\right)\bar{e}_a \tag{6}$$
$$=\sum_{a=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{m-1}T_{ij}(c(t))\Big(f_i(t)^{-1}f_j(t)^{-1}h_a(r)^{-1}\beta_r(Y_a,[V_i,U_j])\Big)\bar{e}_a$$
$$+\sum_{a=1}^{n-1}T_{mj}(c(t))\Bigg(\Big(\dot{r}(t)(\frac{d}{dr}h_a(r))h_a(r)^{-2}f_j(t)^{-1}-h_a(r)^{-1}(\frac{d}{dt}f_j(t))f_j(t)^{-2}\Big)\beta_r(Y_a,U_j)$$
$$+h_a(r)^{-1}f_j(t)^{-1}\beta_r(Y_a,\frac{d}{dt}U_j)\Bigg)\bar{e}_a,$$

و در $c(t)$، برای $j=m$،

$$\sum_{a=1}^{n}\left(\nabla_{Te_m}h(\bar{e}_a,\phi_*e_m)\right)\bar{e}_a=\sum_{a=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}T_{im}\left(\nabla_{e_i}h(\bar{e}_a,\phi_*e_m)\right)\bar{e}_a=T_{mm}(c(t))\ddot{r}(t)\bar{e}_n. \tag{7}$$

از طرف دیگر

$$\tilde{\nabla}_{Te_j}\bar{e}_a(c(t))=\sum_{i=1}^{m}T_{ij}\tilde{\nabla}_{e_i}\bar{e}_a=\sum_{i=1}^{m}\sum_{b=1}^{n}T_{ij}\ h(\bar{e}_b,\phi_*e_i)\left(\overline{\nabla}_{\bar{e}_b}\bar{e}_a\right)_{\phi(c(t))}.$$

برای $j=m,\ a=n$،

$$\tilde{\nabla}_{Te_m}\bar{e}_n(c(t))=\left(\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{b=1}^{n-1}T_{im}\ h_b(r)^{-1}f_i(t)^{-1}\beta_r(Y_b,U_i)\left(\overline{\nabla}_{\bar{e}_b}\bar{e}_n\right)_{\phi(c(t))}\right)+T_{mm}\dot{r}(t)\left(\overline{\nabla}_{\bar{e}_n}\bar{e}_n\right)_{\phi(c(t))}. \tag{8}$$

برای $1\leq j\leq m-1,\ 1\leq a\leq n-1$،

$$\tilde{\nabla}_{Te_j}\bar{e}_a(c(t))=\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{b=1}^{n-1}T_{ij}\ h_b(r)^{-1}f_i(t)^{-1}\beta_r(Y_b,U_i)\left(\overline{\nabla}_{\bar{e}_b}\bar{e}_a\right)_{\phi(c(t))}$$
$$+T_{mj}\dot{r}(t)\left(\overline{\nabla}_{\bar{e}_n}\bar{e}_a\right)_{\phi(c(t))}. \tag{9}$$

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.143572.1714

در (۴)، داریم

$$\sum_{a=1}^{n} h(\bar{e}_a, \phi_* e_j)\tilde{\nabla}_{Te_j}\bar{e}_a = \sum_{a,b=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} T_{ij}\ h(\bar{e}_a, \phi_* e_j)h(\bar{e}_b, \phi_* e_i)\left(\overline{\nabla}_{\bar{e}_b}\bar{e}_a\right),$$

با معادلات (۸) و (۹)، برای $j = m$،

$$\begin{aligned}\sum_{a=1}^{n} h(\bar{e}_a, \phi_* e_m)\tilde{\nabla}_{Te_m}\bar{e}_a(c(t)) &= \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{b=1}^{n-1} T_{im}\ \dot{r}(t)\ h_b(r)^{-1} f_i(t)^{-1}\beta_r(Y_b, U_i)\left(\overline{\nabla}_{\bar{e}_b}\bar{e}_n\right)_{\phi(c(t))}\\ &+ T_{mm}\dot{r}(t)^2\left(\overline{\nabla}_{\bar{e}_n}\bar{e}_n\right)_{\phi(c(t))},\end{aligned} \tag{10}$$

برای $1 \leq j \leq m-1$،

$$\begin{aligned}&\sum_{a=1}^{n} h(\bar{e}_a, \phi_* e_j)\tilde{\nabla}_{Te_j}\bar{e}_a(c(t)) = \sum_{a=1}^{n-1} h_a(r)^{-1} f_j(t)^{-1}\beta_r(Y_a, U_j)\\ &\times\left[\left(\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{b=1}^{n-1} T_{ij}\ h_b(r)^{-1} f_i(t)^{-1}\beta_r(Y_b, U_i)\left(\overline{\nabla}_{\bar{e}_b}\bar{e}_a\right)_{\phi(c(t))}\right) + T_{mj}\dot{r}(t)\left(\overline{\nabla}_{\bar{e}_n}\bar{e}_a\right)_{\phi(c(t))}\right]\\ &= \sum_{a,b=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{m-1} T_{ij}\ h_b(r)^{-1}h_a(r)^{-1} f_i(t)^{-1} f_j(t)^{-1}\beta_r(Y_b, U_i)\beta_r(Y_a, U_j)\left(\overline{\nabla}_{\bar{e}_b}\bar{e}_a\right)_{\phi(c(t))}\\ &+ \sum_{a=1}^{n-1} h_a(r)^{-1} f_j(t)^{-1}\beta_r(Y_a, U_j) T_{mj}\dot{r}(t)\left(\overline{\nabla}_{\bar{e}_n}\bar{e}_a\right)_{\phi(c(t))}.\end{aligned} \tag{11}$$

با معادلات (۴)، (۶)، (۷)، (۱۰) و (۱۱)، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{m}\tilde{\nabla}_{Te_j}\phi_* e_j(c(t)) = \sum_{a=1}^{n-1}\sum_{i,j=1}^{m-1} T_{ij}(c(t))\Big(f_i(t)^{-1} f_j(t)^{-1} h_a(r)^{-1}\beta_r(Y_a, [V_i, U_j])\Big)\bar{e}_a\\ &+ \sum_{a=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1} T_{mj}(c(t))\Big(\dot{r}(t)(\frac{d}{dr}h_a(r))h_a(r)^{-2} f_j(t)^{-1} - h_a(r)^{-1}(\frac{d}{dt}f_j(t))f_j(t)^{-2}\Big)\beta_r(Y_a, U_j)\bar{e}_a\\ &+ \left(\sum_{a=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1} T_{mj}(c(t))h_a(r)^{-1} f_j(t)^{-1}\beta_r(Y_a, \frac{d}{dt}U_j)\bar{e}_a\right) + T_{mm}(c(t))\ddot{r}(t)\bar{e}_n\\ &+ \sum_{a,b=1}^{n-1}\sum_{i,j=1}^{m-1} T_{ij}\ h_b(r)^{-1}h_a(r)^{-1} f_i(t)^{-1} f_j(t)^{-1}\beta_r(Y_b, U_i)\beta_r(Y_a, U_j)\left(\overline{\nabla}_{\bar{e}_b}\bar{e}_a\right)_{\phi(c(t))}\\ &+ \sum_{a=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1} h_a(r)^{-1} f_j(t)^{-1}\beta_r(Y_a, U_j) T_{mj}\dot{r}(t)\left(\overline{\nabla}_{\bar{e}_n}\bar{e}_a\right)_{\phi(c(t))}\\ &+ \left(\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{b=1}^{n-1} T_{im}\ \dot{r}(t)\ h_b(r)^{-1} f_i(t)^{-1}\beta_r(Y_b, U_i)\left(\overline{\nabla}_{\bar{e}_b}\bar{e}_n\right)_{\phi(c(t))}\right) + T_{mm}\dot{r}(t)^2\left(\overline{\nabla}_{\bar{e}_n}\bar{e}_n\right)_{\phi(c(t))}.\end{aligned} \tag{12}$$

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.143572.1714

لم ۴.۳ ([۲۷، ۲۸]). در یک نقطه $c(t)$،

(i) برای $1 \leq i, j \leq m-1$،

$$\nabla_{e_i} e_j = f_i(t)^{-1} f_j(t)^{-1} \Big\{ -f_i(t) \frac{df_i}{dt} \delta_{ij} \dot{c}(t) + \frac{1}{2}[X_i, X_j]_{\mathfrak{m}} + U_t(X_i, X_j) \Big\}.$$

(ii) برای $1 \leq i \leq m$،

$$\nabla_{e_m} e_i = 0.$$

(iii) برای $1 \leq i \leq m-1$،

$$\nabla_{e_i} e_m = f_i(t)^{-2} \big(\frac{d}{dt} f_i(t)\big) X_{ic(t)} = f_i(t)^{-1} \big(\frac{d}{dt} f_i(t)\big) e_{ic(t)} \ .$$

در نقطه $\phi(c(t)) = \Psi(t)\bar{c}(r(t))$،

(iv) برای $1 \leq a, b \leq n-1$،

$$\overline{\nabla}_{\bar{e}_b} \bar{e}_a = h_a(r)^{-1} h_b(r)^{-1} \tau_{\Psi *} \Big\{ -h_b(r) \frac{dh_b}{dr} \delta_{ab} \dot{\bar{c}}(r) + \frac{1}{2}[Y_b, Y_a]_{\mathfrak{n}} + V_r(Y_b, Y_a) \Big\}.$$

(v) برای $1 \leq a \leq n$،

$$\overline{\nabla}_{\bar{e}_n} \bar{e}_a = 0.$$

(vi) برای $1 \leq a \leq n-1$،

$$\overline{\nabla}_{\bar{e}_a} \bar{e}_n = h_a(r)^{-2} \big(\frac{d}{dr} h_a(r)\big) \tau_{\Psi *} Y_{a\bar{c}(r)} = h_a(r)^{-1} \big(\frac{d}{dr} h_a(r)\big) \bar{e}_{a\phi(c(t))} \ .$$

بنابراین با معادله (۱۲) و لم ۴.۳، داریم

$$\begin{aligned}
(13) \quad & \sum_{j=1}^{m} \tilde{\nabla}_{T e_j} \phi_* e_j(c(t)) = \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{i,j=1}^{m-1} T_{ij}(c(t)) \Big(f_i(t)^{-1} f_j(t)^{-1} h_a(r)^{-1} \beta_r(Y_a, [V_i, U_j]) \Big) \bar{e}_a \\
& + \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} T_{mj}(c(t)) \Big(\dot{r}(t) \big(\frac{d}{dr} h_a(r)\big) h_a(r)^{-2} f_j(t)^{-1} - h_a(r)^{-1} \big(\frac{d}{dt} f_j(t)\big) f_j(t)^{-2} \Big) \beta_r(Y_a, U_j) \bar{e}_a \\
& + \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} T_{mj}(c(t)) h_a(r)^{-1} f_j(t)^{-1} \beta_r(Y_a, \frac{d}{dt} U_j) \bar{e}_a \\
& + \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} T_{jm}\, \dot{r}(t)\, h_a(r)^{-2} f_j(t)^{-1} \beta_r(Y_a, U_j) \big(\frac{d}{dr} h_a(r)\big) \bar{e}_a \\
& + \Bigg(T_{mm}(c(t)) \ddot{r}(t) - \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{i,j=1}^{m-1} T_{ij}\, h_a(r)^{-3} \big(\frac{d}{dr} h_a(r)\big) f_i(t)^{-1} f_j(t)^{-1} \beta_r(Y_a, U_i) \beta_r(Y_a, U_j) \Bigg) \bar{e}_n \\
& + \sum_{a,b=1}^{n-1} \sum_{i,j=1}^{m-1} \Bigg(T_{ij}\, h_b(r)^{-2} h_a(r)^{-2} f_i(t)^{-1} f_j(t)^{-1} \beta_r(Y_b, U_i) \beta_r(Y_a, U_j) \tau_{\Psi *} \Big\{ \frac{1}{2}[Y_b, Y_a] + V_r(Y_b, Y_a) \Big\} \Bigg),
\end{aligned}$$

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.143572.1714

و

$$(۱۴)\quad \sum_{j=1}^{m}\phi_*\nabla_{Te_j}e_j=\sum_{i,j=1}^{m}T_{ij}\phi_*\nabla_{e_i}e_j=$$

$$\sum_{i,j=1}^{m-1}T_{ij}\ f_i(t)^{-1}f_j(t)^{-1}\phi_*\Big\{-f_i(t)\frac{df_i}{dt}\delta_{ij}\dot{c}(t)+\frac{1}{2}[X_i,X_j]+U_t(X_i,X_j)\Big\}$$

$$+\sum_{i=1}^{m-1}T_{im}\ f_i(t)^{-1}\big(\frac{d}{dt}f_i(t)\big)\phi_*e_i=$$

$$-\sum_{i=1}^{m-1}T_{ii}\ f_i(t)^{-1}\frac{df_i}{dt}\dot{r}(t)\bar{e}_n+\sum_{i,j=1}^{m-1}T_{ij}\ f_i(t)^{-1}f_j(t)^{-1}\phi_*\Big\{\frac{1}{2}[X_i,X_j]+U_t(X_i,X_j)\Big\}$$

$$+\sum_{a=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{m-1}T_{im}\ f_i(t)^{-1}\big(\frac{d}{dt}f_i(t)\big)h(\bar{e}_a,\phi_*e_i)\bar{e}_a=$$

$$-\sum_{i=1}^{m-1}T_{ii}\ f_i(t)^{-1}\frac{df_i}{dt}\dot{r}(t)\bar{e}_n+\sum_{i,j=1}^{m-1}T_{ij}\ f_i(t)^{-1}f_j(t)^{-1}\phi_*\Big\{\frac{1}{2}[X_i,X_j]+U_t(X_i,X_j)\Big\}$$

$$+\sum_{a=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{m-1}T_{im}\ f_i(t)^{-2}\big(\frac{d}{dt}f_i(t)\big)h_a(r)^{-1}\beta_r(Y_a,U_i)\bar{e}_a\,.$$

اکنون با معادلات (۱۳) و (۱۴)، داریم

$$\overset{\mathbf{T}}{\square}(\phi)(c(t))=\sum_{a=1}^{n-1}\sum_{i,j=1}^{m-1}T_{ij}(c(t))\Big(f_i(t)^{-1}f_j(t)^{-1}h_a(r)^{-1}\beta_r(Y_a,[V_i,U_j])\Big)\bar{e}_a$$

$$+\sum_{a=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1}(T_{jm}+T_{mj})\ \Big(\dot{r}(t)\ h_a(r)^{-2}f_j(t)^{-1}\big(\frac{d}{dr}h_a(r)\big)-f_j(t)^{-2}\big(\frac{d}{dt}f_j(t)\big)h_a(r)^{-1}\Big)\beta_r(Y_a,U_j)\bar{e}_a$$

$$+\sum_{a=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1}T_{mj}(c(t))h_a(r)^{-1}f_j(t)^{-1}\beta_r(Y_a,\frac{d}{dt}U_j)\bar{e}_a$$

$$+\Bigg(T_{mm}(c(t))\ddot{r}(t)+\sum_{i=1}^{m-1}T_{ii}\ f_i(t)^{-1}\frac{df_i}{dt}\dot{r}(t)$$

$$-\sum_{a=1}^{n-1}\sum_{i,j=1}^{m-1}T_{ij}\ h_a(r)^{-3}\big(\frac{d}{dr}h_a(r)\big)f_i(t)^{-1}f_j(t)^{-1}\beta_r(Y_a,U_i)\beta_r(Y_a,U_j)\Bigg)\bar{e}_n$$

$$+\sum_{a,b=1}^{n-1}\sum_{i,j=1}^{m-1}\Bigg(T_{ij}\ h_b(r)^{-2}h_a(r)^{-2}f_i(t)^{-1}f_j(t)^{-1}\beta_r(Y_b,U_i)\beta_r(Y_a,U_j)\tau_{\Psi*}\Big\{\frac{1}{2}[Y_b,Y_a]+V_r(Y_b,Y_a)\Big\}\Bigg)$$

$$-\sum_{i,j=1}^{m-1}T_{ij}\ f_i(t)^{-1}f_j(t)^{-1}\phi_*\Big\{\frac{1}{2}[X_i,X_j]+U_t(X_i,X_j)\Big\}.$$

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.143572.1714

چون $\phi_* X_{c(t)} = \tau_{\Psi *}\left(\mathrm{Ad}(\Psi^{-1})A(X)\right)_{\mathfrak{n}\bar{c}(r)}$، برای $X \in \mathfrak{m}$، گزاره ۱.۳ را به‌دست می‌آوریم. □

طبق قضیه ۲.۲، $\mathrm{div}T$ را نیاز داریم تا Tـهمسازی را بررسی کنیم. پس $\mathrm{div}T$ در یک نقطه $c(t)$، با استفاده از لم ۴.۳ محاسبه می‌کنیم.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}T &= \sum_{i=1}^{m}(\nabla_{e_i}T)e_i = \sum_{i=1}^{m}\left(\nabla_{e_i}(Te_i) - T\nabla_{e_i}e_i\right) = \sum_{i,j=1}^{m}\left((\nabla_{e_i}T_{ji})e_j + T_{ji}\nabla_{e_i}e_j\right) - T\sum_{i=1}^{m}\nabla_{e_i}e_i = \\
&\sum_{i,j=1}^{m}(\nabla_{e_i}T_{ji})e_j + \sum_{i,j=1}^{m-1}T_{ji}f_i(t)^{-1}f_j(t)^{-1}\Big\{-f_i(t)\frac{df_i}{dt}\delta_{ij}\dot{c}(t) + \frac{1}{2}[X_i,X_j]_{\mathfrak{m}} + U_t(X_i,X_j)\Big\} \\
&+ \sum_{i=1}^{m-1}T_{mi}\,f_i(t)^{-1}\big(\frac{d}{dt}f_i(t)\big)e_i - T\sum_{i=1}^{m-1}f_i(t)^{-2}\Big\{-f_i(t)\frac{df_i}{dt}\dot{c}(t) + U_t(X_i,X_i)\Big\} = \\
&\sum_{i,j=1}^{m}(\nabla_{e_i}T_{ji})e_j - \sum_{i=1}^{m-1}T_{ii}\;f_i(t)^{-1}\frac{df_i}{dt}e_m + \sum_{i,j=1}^{m-1}T_{ji}f_i(t)^{-1}f_j(t)^{-1}\Big\{\frac{1}{2}[X_i,X_j]_{\mathfrak{m}} + U_t(X_i,X_j)\Big\} \\
&+ \sum_{i=1}^{m-1}T_{mi}\,f_i(t)^{-1}\big(\frac{d}{dt}f_i(t)\big)e_i + \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{m}f_i(t)^{-1}\frac{df_i}{dt}T_{jm}e_j - T\sum_{i=1}^{m-1}f_i(t)^{-2}U_t(X_i,X_i) = \\
&\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m-1}(\nabla_{e_i}T_{ji})e_j + \sum_{i=1}^{m}(\nabla_{e_i}T_{mi})e_m - \sum_{i=1}^{m-1}T_{ii}\;f_i(t)^{-1}\frac{df_i}{dt}e_m \\
&+ \sum_{j=1}^{m-1}T_{mj}\,f_j(t)^{-1}\big(\frac{d}{dt}f_j(t)\big)e_j + \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{m-1}f_i(t)^{-1}\frac{df_i}{dt}T_{jm}e_j + \sum_{i=1}^{m-1}f_i(t)^{-1}\frac{df_i}{dt}T_{mm}e_m \\
&+ \sum_{i,j=1}^{m-1}T_{ji}f_i(t)^{-1}f_j(t)^{-1}\Big\{\frac{1}{2}[X_i,X_j]_{\mathfrak{m}} + U_t(X_i,X_j)\Big\} - T\sum_{i=1}^{m-1}f_i(t)^{-2}U_t(X_i,X_i) = \\
&\sum_{j=1}^{m-1}\left(\sum_{i=1}^{m}(\nabla_{e_i}T_{ji}) + \left(T_{mj}\,f_j(t)^{-1}\big(\frac{d}{dt}f_j(t)\big)\right) + \sum_{i=1}^{m-1}f_i(t)^{-1}\frac{df_i}{dt}T_{jm}\right)e_j \\
&+ \left(\sum_{i=1}^{m}(\nabla_{e_i}T_{mi}) - \sum_{i=1}^{m-1}T_{ii}\;f_i(t)^{-1}\frac{df_i}{dt} + \sum_{i=1}^{m-1}f_i(t)^{-1}\frac{df_i}{dt}T_{mm}\right)e_m \\
&+ \sum_{i,j=1}^{m-1}T_{ji}f_i(t)^{-1}f_j(t)^{-1}\Big\{\frac{1}{2}[X_i,X_j]_{\mathfrak{m}} + U_t(X_i,X_j)\Big\} - T\sum_{i,j=1}^{m-1}f_i(t)^{-2}\left\langle U_t(X_i,X_i),e_j\right\rangle_g e_j = \\
&\sum_{j=1}^{m-1}\left(\sum_{i=1}^{m}(\nabla_{e_i}T_{ji}) + \left(T_{mj}\,f_j(t)^{-1}\big(\frac{d}{dt}f_j(t)\big)\right) + \sum_{i=1}^{m-1}f_i(t)^{-1}\frac{df_i}{dt}T_{jm}\right)e_j \\
&+ \left(\sum_{i=1}^{m}(\nabla_{e_i}T_{mi}) - \sum_{i=1}^{m-1}T_{ii}\;f_i(t)^{-1}\frac{df_i}{dt} + \sum_{i=1}^{m-1}f_i(t)^{-1}\frac{df_i}{dt}T_{mm}\right)e_m
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{i,j=1}^{m-1} T_{ji} f_i(t)^{-1} f_j(t)^{-1}\Big\{\frac{1}{2}[X_i,X_j]_{\mathfrak{m}} + U_t(X_i,X_j)\Big\}\\
&-\sum_{i,j,k=1}^{m-1} T_{jk} f_i(t)^{-2} f_k(t)^{-1}\alpha_t\left(U_t(X_i,X_i),X_k\right)e_j - \sum_{i,j=1}^{m-1} T_{mj} f_i(t)^{-2} f_j(t)^{-1}\alpha_t\left(U_t(X_i,X_i),X_j\right)e_m =\\
&\sum_{j=1}^{m-1}\Bigg(\sum_{i=1}^{m}(\nabla_{e_i}T_{ji}) + \Big(T_{mj}\, f_j(t)^{-1}\big(\frac{d}{dt}f_j(t)\big)\Big) + \sum_{i=1}^{m-1} f_i(t)^{-1}\frac{df_i}{dt}T_{jm}\\
&-\sum_{i,k=1}^{m-1} T_{jk} f_i(t)^{-2} f_k(t)^{-1}\alpha_t\left(U_t(X_i,X_i),X_k\right)\Bigg)e_j\\
&+\Bigg(\sum_{i=1}^{m}(\nabla_{e_i}T_{mi}) - \sum_{i=1}^{m-1} T_{ii}\, f_i(t)^{-1}\frac{df_i}{dt} + \sum_{i=1}^{m-1} f_i(t)^{-1}\frac{df_i}{dt}T_{mm}\\
&-\sum_{i,j=1}^{m-1} T_{mj} f_i(t)^{-2} f_j(t)^{-1}\alpha_t\left(U_t(X_i,X_i),X_j\right)\Bigg)e_m\\
&+\sum_{i,j=1}^{m-1} T_{ji} f_i(t)^{-1} f_j(t)^{-1}\Big\{\frac{1}{2}[X_i,X_j]_{\mathfrak{m}} + U_t(X_i,X_j)\Big\}.
\end{aligned}
$$

لذا داریم

$$
\begin{aligned}
&\phi_*(\mathrm{div}T) = \sum_{j=1}^{m-1}\Bigg(\sum_{i=1}^{m}(\nabla_{e_i}T_{ji}) + \Big(T_{mj}\, f_j(t)^{-1}\big(\frac{d}{dt}f_j(t)\big)\Big) + \sum_{i=1}^{m-1} f_i(t)^{-1}\frac{df_i}{dt}T_{jm}\\
&-\sum_{i,k=1}^{m-1} T_{jk} f_i(t)^{-2} f_k(t)^{-1}\alpha_t\left(U_t(X_i,X_i),X_k\right)\Bigg)\phi_* e_j\\
&+\Bigg(\sum_{i=1}^{m}(\nabla_{e_i}T_{mi}) - \sum_{i=1}^{m-1} T_{ii}\, f_i(t)^{-1}\frac{df_i}{dt} + \sum_{i=1}^{m-1} f_i(t)^{-1}\frac{df_i}{dt}T_{mm}\\
&-\sum_{i,j=1}^{m-1} T_{mj} f_i(t)^{-2} f_j(t)^{-1}\alpha_t\left(U_t(X_i,X_i),X_j\right)\Bigg)\phi_* e_m\\
&+\sum_{i,j=1}^{m-1} T_{ji} f_i(t)^{-1} f_j(t)^{-1}\phi_*\Big\{\frac{1}{2}[X_i,X_j]_{\mathfrak{m}} + U_t(X_i,X_j)\Big\} =\\
&\sum_{a=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1}\Bigg(\sum_{i=1}^{m}(\nabla_{e_i}T_{ji}) + \Big(T_{mj}\, f_j(t)^{-1}\big(\frac{d}{dt}f_j(t)\big)\Big) + \sum_{i=1}^{m-1} f_i(t)^{-1}\frac{df_i}{dt}T_{jm}\\
&-\sum_{i,k=1}^{m-1} T_{jk} f_i(t)^{-2} f_k(t)^{-1}\alpha_t\left(U_t(X_i,X_i),X_k\right)\Bigg)h_a(r)^{-1} f_j(t)^{-1}\beta_r(Y_a,U_j)\bar{e}_a
\end{aligned}
$$

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.143572.1714

$$
\begin{aligned}
&+\Bigg(\sum_{i=1}^{m}(\nabla_{e_i}T_{mi})-\sum_{i=1}^{m-1}T_{ii}\ f_i(t)^{-1}\frac{df_i}{dt}+\sum_{i=1}^{m-1}f_i(t)^{-1}\frac{df_i}{dt}T_{mm}\\
&-\sum_{i,j=1}^{m-1}T_{mj}f_i(t)^{-2}f_j(t)^{-1}\alpha_t\left(U_t(X_i,X_i),X_j\right)\Bigg)\dot r(t)\bar e_n\\
&+\sum_{i,j=1}^{m-1}T_{ji}f_i(t)^{-1}f_j(t)^{-1}\tau_{\Psi*}\left(\mathrm{Ad}(\Psi^{-1})A\Big\{\frac{1}{2}[X_i,X_j]_{\mathfrak m}+U_t(X_i,X_j)\Big\}\right)_{\mathfrak n\bar c(r)}.
\end{aligned}
$$

بنابراین

$$
\begin{aligned}
\phi_*\left(\mathrm{div}\left(T+T^t\right)\right)&=\sum_{a=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1}\Bigg(\sum_{i=1}^{m}(\nabla_{e_i}\left(T_{ji}+T_{ij}\right))+\Bigg(\left(T_{mj}+T_{jm}\right)\ f_j(t)^{-1}\Big(\frac{d}{dt}f_j(t)\Big)\Bigg)\\
&+\sum_{i=1}^{m-1}f_i(t)^{-1}\frac{df_i}{dt}\left(T_{jm}+T_{mj}\right)\\
&-\sum_{i,k=1}^{m-1}\left(T_{jk}+T_{kj}\right)f_i(t)^{-2}f_k(t)^{-1}\alpha_t\left(U_t(X_i,X_i),X_k\right)\Bigg)h_a(r)^{-1}f_j(t)^{-1}\beta_r(Y_a,U_j)\bar e_a\\
&+\Bigg(\sum_{i=1}^{m}(\nabla_{e_i}\left(T_{mi}+T_{im}\right))-2\sum_{i=1}^{m-1}T_{ii}\ f_i(t)^{-1}\frac{df_i}{dt}+2\sum_{i=1}^{m-1}f_i(t)^{-1}\frac{df_i}{dt}T_{mm}\\
&-\sum_{i,j=1}^{m-1}\left(T_{mj}+T_{jm}\right)f_i(t)^{-2}f_j(t)^{-1}\alpha_t\left(U_t(X_i,X_i),X_j\right)\Bigg)\dot r(t)\bar e_n\\
&+\sum_{i,j=1}^{m-1}\left(T_{ji}+T_{ij}\right)f_i(t)^{-1}f_j(t)^{-1}\tau_{\Psi*}\left(\mathrm{Ad}(\Psi^{-1})A\Big\{\frac{1}{2}[X_i,X_j]_{\mathfrak m}+U_t(X_i,X_j)\Big\}\right)_{\mathfrak n\bar c(r)}.
\end{aligned}
$$

چون، $T\circ\tau_{k*}e_{ic(t)}=\tau_{k*}\circ Te_{ic(t)}$ اگروتنهااگر $T_{ji}(kc(t))=T_{ji}(c(t))$، بنابراین داریم

$$
\left(\nabla_{e_i}T_{ji}\right)(c(t))=\begin{cases}0 & 1\le i\le m-1\\ \dfrac{d}{dt}\left(T_{ji}(c(t))\right) & i=m.\end{cases}
$$

لذا

$$\phi_*\left(\operatorname{div}\left(T+T^t\right)\right)=\sum_{a=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1}\Bigg(\left(\frac{d}{dt}\left(T_{jm}+T_{mj}\right)\right)+\left(\left(T_{mj}+T_{jm}\right)\ f_j(t)^{-1}\left(\frac{d}{dt}f_j(t)\right)\right) \tag{15}$$

$$+\sum_{i=1}^{m-1}f_i(t)^{-1}\frac{df_i}{dt}\left(T_{jm}+T_{mj}\right)$$

$$-\sum_{i,k=1}^{m-1}\left(T_{jk}+T_{kj}\right)f_i(t)^{-2}f_k(t)^{-1}\alpha_t\left(U_t(X_i,X_i),X_k\right)\Bigg)h_a(r)^{-1}f_j(t)^{-1}\beta_r(Y_a,U_j)\bar{e}_a$$

$$+\Bigg(2\frac{d}{dt}T_{mm}-2\sum_{i=1}^{m-1}T_{ii}\ f_i(t)^{-1}\frac{df_i}{dt}+2\sum_{i=1}^{m-1}f_i(t)^{-1}\frac{df_i}{dt}T_{mm}$$

$$-\sum_{i,j=1}^{m-1}\left(T_{mj}+T_{jm}\right)f_i(t)^{-2}f_j(t)^{-1}\alpha_t\left(U_t(X_i,X_i),X_j\right)\Bigg)\dot{r}(t)\bar{e}_n$$

$$+\sum_{i,j=1}^{m-1}\left(T_{ji}+T_{ij}\right)f_i(t)^{-1}f_j(t)^{-1}\tau_{\Psi*}\left(\operatorname{Ad}(\Psi^{-1})A\left\{\frac{1}{2}[X_i,X_j]_{\mathfrak{m}}+U_t(X_i,X_j)\right\}\right)_{\mathfrak{n}\bar{c}(r)}.$$

اکنون با قضیه ۲.۲، گزاره ۱.۳ و معادله (۱۵) به نتیجه پایین می‌رسیم.

قضیه ۵.۳. (i) فرض کنید تابع $r(t):[0,l]\to[0,\bar{l}]$ شرط $r(l)=\bar{l}$ ،$r(0)=0$ و $0<r(t)<\bar{l}$ برای $0<t<l$ برآورده کند. آنگاه میدان تنش‌ـامین $A_T(\phi)$ که $\phi:(M,g)\to(N,h)$ یک نگاشت Aـهموردا است و روی $\mathring{M}$، هموار است به‌شرح زیر توصیف می‌شود:

$$A_T(\phi)(c(t))=\sum_{a=1}^{n-1}\Bigg[\sum_{i,j=1}^{m-1}T_{ij}(c(t))\Big(f_i(t)^{-1}f_j(t)^{-1}h_a(r)^{-1}\beta_r(Y_a,[V_i,U_j])\Big)$$

$$+\sum_{j=1}^{m-1}\left(T_{jm}+T_{mj}\right)\left(\ \dot{r}(t)\ h_a(r)^{-2}f_j(t)^{-1}\left(\frac{d}{dr}h_a(r)\right)-f_j(t)^{-2}\left(\frac{d}{dt}f_j(t)\right)h_a(r)^{-1}\right)\beta_r(Y_a,U_j)$$

$$+\sum_{j=1}^{m-1}T_{mj}(c(t))h_a(r)^{-1}f_j(t)^{-1}\beta_r(Y_a,\frac{d}{dt}U_j)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1}\Bigg(\left(\frac{d}{dt}\left(T_{jm}+T_{mj}\right)\right)+\left(\left(T_{mj}+T_{jm}\right)\ f_j(t)^{-1}\left(\frac{d}{dt}f_j(t)\right)\right)+\sum_{i=1}^{m-1}f_i(t)^{-1}\frac{df_i}{dt}\left(T_{jm}+T_{mj}\right)$$

$$-\sum_{i,k=1}^{m-1}\left(T_{jk}+T_{kj}\right)f_i(t)^{-2}f_k(t)^{-1}\alpha_t\left(U_t(X_i,X_i),X_k\right)\Bigg)h_a(r)^{-1}f_j(t)^{-1}\beta_r(Y_a,U_j)\Bigg]\bar{e}_a$$

$$+\Bigg[T_{mm}(c(t))\ddot{r}(t)-\sum_{a=1}^{n-1}\sum_{i,j=1}^{m-1}T_{ij}\ h_a(r)^{-3}\left(\frac{d}{dr}h_a(r)\right)f_i(t)^{-1}f_j(t)^{-1}\beta_r(Y_a,U_i)\beta_r(Y_a,U_j)$$

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.143572.1714

$$+\left(\frac{d}{dt}T_{mm}+\sum_{i=1}^{m-1}f_i(t)^{-1}\frac{df_i}{dt}T_{mm}\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m-1}\left(T_{mj}+T_{jm}\right)f_i(t)^{-2}f_j(t)^{-1}\alpha_t\left(U_t(X_i,X_i),X_j\right)\right)\dot{r}(t)\right]\bar{e}_n$$
$$+\sum_{i,j=1}^{m-1}T_{ij}\ f_i(t)^{-1}f_j(t)^{-1}\tau_{\Psi*}\left\{\frac{1}{2}[U_i,U_j]+V_r(U_i,U_j)-\frac{1}{2}\left(\mathrm{Ad}(\Psi^{-1})A\Big([X_i,X_j]_{\mathfrak{m}}\Big)\right)_{\mathfrak{n}}\right\}_{\bar{c}(r)}.$$

(ii) به‌ویژه، ϕ نگاشت Tـ‌همساز است اگروتنهااگر معادلات پایین برقرار باشند:

$$\sum_{i,j=1}^{m-1}T_{ij}(c(t))\Big(f_i(t)^{-1}f_j(t)^{-1}h_a(r)^{-1}\beta_r(Y_a,[V_i,U_j])\Big)$$
$$+\sum_{j=1}^{m-1}\left(T_{jm}+T_{mj}\right)\Big(\ \dot{r}(t)\ h_a(r)^{-2}f_j(t)^{-1}\big(\frac{d}{dr}h_a(r)\big)-f_j(t)^{-2}\big(\frac{d}{dt}f_j(t)\big)h_a(r)^{-1}\Big)\beta_r(Y_a,U_j)$$
$$+\sum_{j=1}^{m-1}T_{mj}(c(t))h_a(r)^{-1}f_j(t)^{-1}\beta_r(Y_a,\frac{d}{dt}U_j)$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1}\left(\left(\frac{d}{dt}\left(T_{jm}+T_{mj}\right)\right)+\left(\left(T_{mj}+T_{jm}\right)\ f_j(t)^{-1}\big(\frac{d}{dt}f_j(t)\big)\right)+\sum_{i=1}^{m-1}f_i(t)^{-1}\frac{df_i}{dt}\left(T_{jm}+T_{mj}\right)\right.$$
$$\left.-\sum_{i,k=1}^{m-1}\left(T_{jk}+T_{kj}\right)f_i(t)^{-2}f_k(t)^{-1}\alpha_t\left(U_t(X_i,X_i),X_k\right)\right)h_a(r)^{-1}f_j(t)^{-1}\beta_r(Y_a,U_j)$$
$$+\sum_{i,j=1}^{m-1}T_{ij}\ f_i(t)^{-1}f_j(t)^{-1}h_a(r)^{-1}\beta_r\left(\frac{1}{2}[U_i,U_j]+V_r(U_i,U_j)-\frac{1}{2}\left(\mathrm{Ad}(\Psi^{-1})A\Big([X_i,X_j]_{\mathfrak{m}}\Big)\right)_{\mathfrak{n}},Y_a\right)=0,$$

برای $a=1,\dots,n-1$، و

$$T_{mm}(c(t))\ddot{r}(t)-\sum_{a=1}^{n-1}\sum_{i,j=1}^{m-1}T_{ij}\ h_a(r)^{-3}\big(\frac{d}{dr}h_a(r)\big)f_i(t)^{-1}f_j(t)^{-1}\beta_r(Y_a,U_i)\beta_r(Y_a,U_j)$$
$$+\left(\frac{d}{dt}T_{mm}+\sum_{i=1}^{m-1}f_i(t)^{-1}\frac{df_i}{dt}T_{mm}-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m-1}\left(T_{mj}+T_{jm}\right)f_i(t)^{-2}f_j(t)^{-1}\alpha_t\left(U_t(X_i,X_i),X_j\right)\right)\dot{r}(t)=0.$$

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.143572.1714

۴. نگاشت‌های Tـهمساز هموردا از چنبره

در این قسمت یک نگاشت Aـهموردا ϕ را بررسی خواهیم کرد که شرط پایین را برآورده کند:

$$\phi(c(t)) = \bar{c}(r(t)), \text{ یعنی } \Psi \equiv ۱, \tag{۱۶}$$

و همه نگاشت‌های Tـهمساز Aـهموردا که شرط (۱۶) را از یک چنبره تخت به‌توی یک خمینه ریمانی (N, h) برآورده می‌کند، دسته‌بندی می‌کنیم. قرار دهید $(M, g) = (T^۲, g)$ یک چنبره تخت باشد که

$$K = SO(۲) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}; \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

با نقص همگنی یک عمل می‌کند. آنگاه $T^۲ = R/۲\pi\mathbb{Z} \times R/T\mathbb{Z}$ برای یک $T > ۰$. ثابت $T > ۰$ به‌عنوان دوره تناوب از حل یک معادله دیفرانسیل معمولی به‌دست خواهد آمد. در این‌حالت زیرگروه همسانگرد J_t از K تنها از همانی تشکیل شده است،

$$\mathfrak{m} = \mathbb{R}X_۱ \text{ با } X_۱ = \begin{pmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix} \text{ و } f_۱(t) \equiv ۱ .$$

گیریم A یک همریختی از $K = SO(۲)$ با گروه لی فشرده G باشد. آنگاه هر نگاشت Aـهموردا ϕ با شرط (۱۶) از $(T^۲, g)$ به (N, h) به شکل پایین است:

$$\phi(t,\, \theta) := \exp \theta A(X_۱) \bar{c}(r(t)),$$

که $\bar{c}(r)$، $۰ \leq r \leq \bar{l}$، نشان‌دهنده ژئودزی در (N, h)، است و A همیشه در شرط (۳) صدق می‌کند.

گزاره ۱.۴. گیریم A یک همریختی $K = SO(۲) \to G$ باشد که برآورده می‌کند $A(X_۱) = U_۱ + V_۱$، $U_۱ \in \mathfrak{n}$، $V_۱ \in \mathfrak{h}$، و $[U_۱, V_۱] = ۰$. آنگاه همه نگاشت‌های Tـهمساز Aـهموردا $\phi : (T^۲, g) \to (N, h)$ با شرط (۱۶) که عمل نقص همگنی یک از G را می‌پذیرند با همه حل‌های $r(t)$ از دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی پایین شناخته می‌شوند:

$$\begin{aligned} &(T_{۱۲} + T_{۲۱})\,(c(t))\; \dot{r}(t)\; h_a(r)^{-۱} \big(\frac{d}{dr} h_a(r)\big) \beta_r(Y_a, U_۱) + \frac{d}{dt} \left((T_{۱۲} + T_{۲۱})\,(c(t))\right) \beta_r(Y_a, U_۱) \\ &+ T_{۱۱}(c(t))\; \beta_r\left(V_r(U_۱, U_۱), Y_a\right) = ۰, \end{aligned}$$

برای $a = ۱, \dots, n-۱$، و

$$T_{۲۲}(c(t))\ddot{r}(t) - \sum_{a=۱}^{n-۱} T_{۱۱}(c(t))\; h_a(r)^{-۳} \big(\frac{d}{dr} h_a(r)\big) \beta_r(Y_a, U_۱)^۲ + \dot{r}(t) \frac{d}{dt}(T_{۲۲}(c(t))) = ۰,$$

به‌طوری‌که $\bar{c}(r(t))$ متناوب در t با دوره تناوب T است و نگاشت‌های Tـهمساز متناظر با رابطه پایین داده می‌شوند

$$\phi(t,\, \theta) := \exp \theta U_۱ \bar{c}(r(t)).$$

اثبات. چون $\exp \theta A(X_۱) = \exp \theta U_۱ \exp \theta V_۱$ به‌خاطر $[U_۱, V_۱] = ۰$ و $\exp \theta V_۱ \bar{c}(r(t)) = \bar{c}(r(t))$، و با قضیه ۵.۳ به‌نتیجه می‌رسیم. □

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.143572.1714

مثال ۲.۴. عمل طبیعی $G = SO(p+1) \times SO(n-p) \subset SO(n+1)$ روی $\mathbb{S}^n$، (ببینید [۲۸]) را در نظر بگیرید. در این‌حالت نگاشت ϕ در گزاره ۱.۴، به شکل پایین است:

$$\phi(t,\,\theta) = \cos r(t) \exp\theta \begin{pmatrix} 0 & -X^t \\ X & 0 \end{pmatrix} \xi_1 + \sin r(t) \exp\theta \begin{pmatrix} 0 & -Y^t \\ Y & 0 \end{pmatrix} \xi_{p+2} \in \mathbb{S}^n,$$

که $\{\xi_j\}_{j=1}^{n+1}$ پایه استاندارد $\mathbb{R}^{n+1}$ است و $X \in \mathbb{R}^p$ و $Y \in \mathbb{R}^{n-p-1}$ بردارهای دلخواهی هستند به‌طوری‌که هر دوی ماتریس‌های

$$\exp\theta \begin{pmatrix} 0 & -X^t \\ X & 0 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \exp\theta \begin{pmatrix} 0 & -Y^t \\ Y & 0 \end{pmatrix},$$

متناوب در θ با دوره تناوب 2π هستند. تابع $r(t)$ یک حل از دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی پایین است

$$\begin{cases} \Big(-(T_{12}+T_{21})\,(c(t))\; \dot r(t)\;\; \sin r + \dfrac{d}{dt}\left((T_{12}+T_{21})\,(c(t))\right)\cos r\Big) \|X\| = 0, \\ \Big((T_{12}+T_{21})\,(c(t))\; \dot r(t)\;\; \cos r + \dfrac{d}{dt}\left((T_{12}+T_{21})\,(c(t))\right)\sin r\Big) \|Y\| = 0, \\ T_{22}(c(t))\ddot r(t) + T_{11}(c(t))\;\; \left(\|X\|^2 - \|Y\|^2\right)\cos r \sin r + \dot r(t)\dfrac{d}{dt}(T_{22}(c(t))) = 0, \end{cases}$$

به‌طوری‌که $(\cos r(t), \sin r(t))$ متناوب در t با دوره تناوب T است. این مطلب همه نگاشت‌های T–همساز A–هموردا با شرط (۱۶) از (T^2, g) به $(\mathbb{S}^n, \mathrm{can})$ با $(SO(p+1)\times SO(n-p))$–عمل را شناسایی می‌کند. در حالت خاص $T = fI$، که f یک نگاشت هموار روی چنبره است و $f(kc(t)) = f(c(t))$، تابع $r(t)$ یک حل از دستگاه معادلات پایین است:

$$f(t)\ddot r(t) + f(t)\left(\|X\|^2 - \|Y\|^2\right)\cos r \sin r + \dot f(t)\dot r(t) = 0.$$

در حالتی‌که f یک ثابت غیر صفر باشد، [۲۸، معادله (۳.۶)] بازیابی می‌شود.

مراجع

[1] M. Aminian, Introduction of T-harmonic maps, *J. Korean Soc. Math. Educ. Ser. B Pure Appl. Math.*, **30** no. 2 (2023) 109–129.

[2] M. Aminian, S. M. B. Kashani, L_k-biharmonic hypersurfaces in space forms, *Acta Math. Vietnam.*, **42** no. 3 (2017) 471–490.

[3] M. Ara, Geometry of F-harmonic maps, *Kodai Math. J.*, **22** no. 2 (1999) 243–263.

[4] M. Ben-Chen, O. Weber, C. Gotsman, Variational harmonic maps for space deformation, *ACM Trans. Graph.*, **28** no. 3 (2009) 1–11.

[5] V. Branding and A. Siffert, On the equivariant stability of harmonic self-maps of cohomogeneity one manifolds, *J. Math. Anal. Appl.*, **517** no. 2 (2023) 19 pp.

[6] F. Burstall, Harmonic tori in spheres and complex projective spaces, *J. Reine Angew. Math.*, **469** (1995) 149–177.

[7] X. Cao and Q. Chen, Existence for VT-harmonic maps from compact manifolds with boundary, *Sci. China Math.*, **65** no. 11 (2022) 2371–2378.

[8] B. Y. Chen, Harmonic metrics, harmonic tensors and their applications, *Proceedings of the Conference RIGA 2021*, In book: Riemannian Geometry and Applications, Bucharest University Press, (2021) 17–45.

[9] G. Daskalopoulos and C. Mese, Uniqueness of equivariant harmonic maps to symmetric spaces and buildings, *Math. Res. Lett.*, **30** no. 6 (2023) 1639–1655.

[10] J. Jr. Eells and J. H. Sampson, Harmonic mappings of Riemannian manifolds, *Amer. J. Math.*, **86** (1964) 109–160.

[11] J.-H. Eschenburg and M. Y. Wang, The initial value problem for cohomogeneity one Einstein metrics, *J. Geom. Anal.*, **10** no. 1 (2000) 109–137.

[12] S. Feng, Y. Han, K. Jiang and S. W. Wei, The geometry of $\Phi_{(3)}$-harmonic maps, *Nonlinear Anal.*, 234 (2023) Paper No. 113318, 38 pp.

[13] S. D. Jung, Harmonic maps of complete Riemannian manifolds, *Nihonkai Math. J.*, **8** no. 2 (1997) 147–154.

[14] M. Karpukhin and D. Stern, Existence of harmonic maps and eigenvalue optimization in higher dimensions, *Invent. Math.*, **236** no. 2 (2024) 713–778.

[15] H. B. Lawson, Lectures on minimal submanifolds, **1**, Second edition, *Mathematics Lecture Series*, 9, Publish or Perish, Inc., Wilmington, DE, 1980.

[16] F. Lin and C. Liu, Static and dynamic theories of liquid crystals, *J. Partial Differential Equations*, **14** no. 4 (2001) 289–330.

[17] I. McIntosh, Harmonic tori and their spectral data, *In: Surveys on geometry and integrable systems*, Tokyo: Mathematical Society of Japan, (2008) 285–315.

[18] X. Mo, Harmonic maps from Finsler manifolds, *Illinois J. Math.*, **45** no. 4 (2001) 1331–1345.

[19] C. J. Negreiros, Equivariant harmonic maps into homogeneous spaces, *J. Math. Phys.*, **31** no. 7 (1990) 1635–1642.

[20] J. S. Park, Cohomogeneity one manifolds and the Ricci flow, *Commun. Anal. Geom.*, **16** (2008) 243–257.

[21] T. Püttmann, A. Siffert Harmonic self-maps of cohomogeneity one manifolds, *Math. Ann.*, **375** no. 1-2 (2019) 247–282.

[22] A. Ramachandran, C. M. Wood, Higher-power harmonic maps and sections, *Ann. Global Anal. Geom.*, **63** no. 1 (2023) 43 pp.

[23] A. Ratto, Equivariant harmonic maps between manifolds with metrics of (p, q)-signature, *Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire*, **6** no. 6 (1989) 503–524.

[24] I. Slegers, Equivariant harmonic maps depend real analytically on the representation, *Manuscripta Math.*, 169 no. 3-4 (2022) 633–648.

[25] H. Urakawa, *Calculus of variations and harmonic maps*, Translations of Mathematical Monographs, **132**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1993.

[26] H. Urakawa, The least energy of maps homotopic to harmonic maps, *Math. Z.*, **185** (1984) 247–251.

[27] H. Urakawa, Equivariant theory of Yang-Mills connections over Riemannian manifolds of cohomogeneity one, *Indiana Univ. Math. J.*, **37** no. 4 (1988) 753–788.

[28] H. Urakawa, Equivariant harmonic maps between compact Riemannian manifolds of cohomogeneity 1, *Michigan Math. J.*, **40** no. 1 (1993) 27–51.

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.143572.1714

[29] H. Urakawa and K. Ueno, Equivariant harmonic maps associated to large group actions, *Tokyo J. Math.*, **17** no. 2 (1994) 417–437.

[30] Z. Wang , Ye-L. Ou and H. Yang, Biharmonic maps from tori into a 2-sphere, *Chinese Ann. Math. Ser. B*, **39** no. 5 (2018) 861–878.

مهران امینیان
گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه ولیعصر (عج)، رفسنجان، ایران
mehran.aminian@vru.ac.ir

مهران امینیان متولد اسفند ماه ۱۳۶۱ در شهر رفسنجان است. وی در سال ۱۳۸۰ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی محض دانشگاه شهید باهنر شد و در سال ۱۳۸۴ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض دانشگاه صنعتی شریف شد و در سال‌های ۱۳۹۳-۱۳۹۰ مدرک دکتری را در رشته ریاضی گرایش هندسه از دانشگاه تربیت مدرس دریافت کرد.

مهران نامجو
گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه ولیعصر (عج)، رفسنجان، ایران
namjoo@vru.ac.ir

مهران نامجو متولد شهریور ماه ۱۳۵۱ در شهر زاهدان است. وی در سال ۱۳۷۰ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی کاربردی دانشگاه شهید باهنر شد و در سال ۱۳۷۵ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشگاه سیستان و بلوچستان شد و در سال های ۱۳۸۶-۱۳۸۰ مدرک دکتری را در رشته ریاضی گرایش آنالیز عددی از دانشگاه سیستان و بلوچستان دریافت کرد.

 https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.143572.1714